TRAITÉ

D'ALGÈBRE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR :

Traité d'Arithmétique, 7e édition, contenant les matières exigées par les derniers programmes officiels. 1 volume in-8. Prix, broché. 4 fr.

Traité d'Algèbre, 2e partie, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Nouvelle édition. 1 vol. in-8. Prix, broché. . . . . 5 fr.

Rapport sur les progrès de l'analyse mathématique. 1 vol. grand in-8, broché. . . . . 2 fr.

Coulommiers. — Typ. Paul Brodard et Cie

TRAITÉ

D'ALGÈBRE

PAR

Louis François

JOSEPH BERTRAND

Membre de l'Institut (Académie des sciences)
Professeur à l'École polytechnique et au Collège de France

PREMIÈRE PARTIE

à l'usage des classes de mathématiques élémentaires

TREIZIÈME ÉDITION

REVUE ET MISE EN HARMONIE AVEC LES DERNIERS PROGRAMMES OFFICIELS

PAR JOSEPH BERTRAND

ET

PAR HENRI GARCET

Ancien élève de l'École normale
Ancien professeur de mathématiques au lycée Henri IV

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie

79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1884

W. W. Beman
gt.
6-15-1923
2 vols.

AVERTISSEMENT.

Le *Traité d'Algèbre* (première partie) dont nous publions aujourd'hui la septième édition, n'a subi aucune modification. Le texte en a été revu avec soin : quelques améliorations de détail y ont été introduites.

Nous avions cru devoir, dans les éditions précédentes, faire droit aux observations de quelques personnes, qui trouvaient trop considérables les dimensions du premier volume. Nous avions donc supprimé les résumés qui terminaient chaque chapitre. Nous avions diminué le nombre des exercices, en mettant de côté ceux qui étaient les plus difficiles, et qui paraissaient au-dessus de la portée des commençants. Enfin le chapitre sur *les expressions qui se présentent sous une forme indéterminée* avait été rayé : nous avions pensé qu'il valait mieux ne s'occuper de ces sortes de questions qu'après avoir étudié les propriétés des dérivées. Nous avions pu, de cette manière, sans sacrifier rien d'essentiel, ramener notre premier volume dans les limites ordinaires. Nous avons maintenu, pour la présente édition, toutes ces modifications.

H. GARCET.

Septembre 1870

AVERTISSEMENT

PLACÉ EN TÊTE DE LA TROISIÈME ÉDITION.

M. J. Bertrand nous a confié le soin de réimprimer son *Algèbre*. En acceptant cette mission, nous lui avons soumis le plan de quelques modifications qu'il a admises, et dont nous allons rendre compte.

L'ouvrage se compose de deux volumes. Le premier comprend les éléments proprement dits, c'est-à-dire, le calcul algébrique, la résolution des équations du premier et du second degré, les progressions, les logarithmes et leurs applications les plus simples. Le second comprend les séries, la formule du binôme, les compléments de la théorie des logarithmes, les fonctions dérivées et la théorie générale des équations.

Les éléments d'Algèbre doivent être, à notre avis, enseignés avec les plus grands détails. La matière est si abstraite en elle-même ; les généralisations, que l'on rencontre tout d'abord, sont si importantes pour le succès des études ultérieures ; les discussions, à l'aide desquelles on envisage une question sous toutes ses faces, sont si délicates, qu'on ne doit négliger aucun développement, pour initier les élèves aux méthodes et aux procédés de l'*Arithmétique universelle*. Or, lorsqu'on ne consacre qu'un volume à l'exposé de toutes les théories de l'Algèbre, il est bien difficile de ne pas sacrifier la première partie à la seconde, si l'on ne veut pas donner au volume des dimensions trop considérables. Il nous a donc paru convenable et utile de partager l'ouvrage en deux volumes.

D'un autre côté, la division que nous avons adoptée correspond exactement aux divisions mêmes de l'enseignement dans

les lycées. Le premier volume renferme le développement du programme de mathématiques pures et appliquées, il comprend toutes les connaissances exigées pour l'examen du baccalauréat ès sciences, et pour les épreuves d'admission à l'École Militaire, à l'École Navale, à l'École Forestière et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. Il s'adresse, par conséquent, à la grande majorité des élèves qui suivent les cours de sciences, dans les établissements d'instruction secondaire. Le second volume contient les matières dont la connaissance n'est exigée que des candidats à l'Ecole Polytechnique, à l'École Normale supérieure et à la licence ès sciences mathématiques. Il est destiné aux élèves de mathématiques spéciales. A cet autre point de vue, la division en deux volumes nous a paru indispensable.

Nous n'avons pas besoin de dire qu'en nous chargeant de cette troisième édition, nous avons scrupuleusement respecté les doctrines qui distinguent ce livre des autres ouvrages écrits sur le même sujet. Depuis longtemps déjà, nous aimons et nous cherchons à propager les idées de l'auteur. Nous n'avons donc rien changé à l'esprit du livre; et notre rôle s'est borné à développer quelques théories qui s'y trouvaient, peut-être, trop succinctement exposées, et que nous avons présentées avec plus de détails. Lorsqu'on hésite entre deux formes, l'expérience de l'enseignement conduit presque toujours, en effet, à préférer celle qui présume le moins de la pénétration des auditeurs. Nous avons, sous ce rapport, traité nos lecteurs comme nos jeunes élèves. Ils nous le pardonneront, si, comme eux, ils arrivent par là, avec moins d'efforts, à comprendre et à savoir aussi bien.

Les nombreux *exercices*, proposés à la fin de chaque chapitre, ont été augmentés, et classés de manière à graduer, autant que possible, les difficultés. Nous avons cru devoir indiquer, par un mot, la solution de chacun d'eux; nous avons même donné très-brièvement la marche à suivre, lorsque cette solution nous a paru trop difficile à découvrir. Nous avons voulu, par là, aider l'élève dans ses recherches, tout en laissant un aliment suffisant à son travail.

Ces exercices multipliés et leurs solutions nous ont forcé de donner au premier volume, qui paraît aujourd'hui, des dimensions assez considérables; mais nous espérons que le lecteur n'aura pas à se plaindre d'une extension qui tourne au profit de ses études.

H. Garcet.

Novembre 1862.

TRAITÉ
D'ALGÈBRE.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Définition de l'algèbre. — *L'algèbre* a pour objet *d'abréger*, de *simplifier* et surtout de *généraliser* la résolution des questions que l'on peut se proposer sur les nombres.

Pour atteindre ce but, l'algèbre emploie les *lettres* et les *signes*.

2. Emploi des lettres. — Les lettres représentent les nombres. Au lieu de raisonner et d'opérer, comme en arithmétique, sur des nombres particuliers désignés d'avance, on raisonne et on opère, en algèbre, sur des lettres a, b, c,... x, y.... Par suite, les démonstrations que l'on donne et les règles auxquelles on arrive, s'appliquant à tous les nombres indistinctement, sont générales.

3. Signes algébriques. — Les nombres devant rester indéterminés, on ne peut pas effectuer les opérations, et il faut se borner à les indiquer à l'aide de certains signes abréviatifs.

Les signes usités en algèbre sont les suivants :

$+$ est le signe de l'addition ; il se prononce *plus :* $7 + 5$ indique la somme des deux nombres 7 et 5.

$-$ est le signe de la soustraction ; il se prononce *moins :* $7 - 5$ indique la différence entre les deux nombres 7 et 5.

$\times$ est le signe de la multiplication; il se prononce *multiplié par;* 4×5 indique le produit des deux nombres 4 et 5. On indique aussi la multiplication par un point; ainsi l'on écrit 4.5. On supprime souvent ces signes, lorsque les nombres sont représentés par des lettres; et l'on se borne à indiquer la multiplication, en écrivant les facteurs l'un après l'autre, ab au lieu de $a\times b$, ou de $a.b$. Cette simplification ne peut être adoptée pour les facteurs numériques; car elle conduirait, par exemple, à représenter de la même manière le nombre 54 et le produit 5×4.

: signifie *divisé par;* $5:7$ indique le quotient de la division du nombre 5 par le nombre 7. On indique aussi les divisions en écrivant le diviseur au-dessous du dividende, et en séparant les deux termes par une barre horizontale; $\frac{5}{7}$ indique le quotient de la division de 5 par 7.

Lorsque les divers facteurs d'un produit sont égaux entre eux, on se borne à écrire l'un deux, en plaçant à droite et *au-dessus* de lui l'indication du nombre des facteurs égaux que l'on doit multiplier; ainsi a^2 représente $a\times a$, ou le carré de a; a^3 représente $a\times a\times a$, ou le cube de a; a^m représente le produit de m facteurs égaux à a, ou la puissance m^{me} de a. Le nombre des facteurs égaux reçoit le nom d'*exposant.*

$\sqrt{\ }$ indique la racine carrée; $\sqrt{7}$ indique la racine carrée du nombre 7. On indique les racines cubique, quatrième.... de a, par $\sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}$... En désignant par m un nombre entier quelconque, $\sqrt[m]{a}$ indique la racine m^{me} de a, c'est-à-dire le nombre qui multiplié $(m-1)$ fois par lui-même, reproduit a.

$=$ exprime l'égalité des expressions placées à droite et à gauche de ce signe; $a=b$ exprime l'égalité des deux nombres représentés par a et b.

$>$ s'énonce *plus grand que;* $a>b$ exprime que le nombre désigné par a est plus grand que le nombre désigné par b.

$<$ s'énonce *plus petit que;* $a<b$ exprime que le nombre désigné par a est plus petit que le nombre désigné par b.

Lorsqu'on place une expression entre deux parenthèses, il faut regarder comme effectuées les opérations qui y sont indiquées, et la parenthèse comme exprimant le nombre qui en résulte. Ainsi l'expression $19-(4+2-1)$ indique l'excès de 19 sur

le nombre $(4+2-1)$, c'est-à-dire sur 5. De même l'expression $(a+b)(c-d)$ indique le produit de la somme des nombres représentés par a et b et de la différence des nombres représentés par c et d.

Lorsque, dans une question, certaines quantités ont été représentées par des lettres, on représente souvent des quantités analogues par les mêmes lettres, en leur donnant un ou plusieurs *accents*, ou en les affectant de certains *indices* numériques.

Ainsi on écrit $a, a', a'', a''', \ldots$

et l'on énonce *a, a prime, a seconde, a tierce*....;

ou bien l'on écrit $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$

et l'on énonce, *a, a indice* 1, *a indice* 2, *a indice* 3....

Montrons maintenant, par quelques exemples, comment l'emploi des lettres et des signes abrége et généralise les solutions.

4. Emploi des signes comme moyen d'abréviation. — *On propose de partager* 540^f *entre trois personnes, de telle sorte que la part de la première surpasse la part de la seconde de* 48^f, *et que la part de la seconde surpasse la part de la troisième de* 75^f.

Le problème serait résolu, si l'on connaissait la troisième part. Or la seconde vaut la troisième augmentée de 75^f.

La première, valant la seconde augmentée de 48^f, vaut, par suite, la troisième augmentée de 75^f et de 48^f, c'est-à-dire de 123^f.

Les trois parts valent donc, en somme, trois fois la troisième, plus 75^f et 123^f, c'est-à-dire plus 198^f.

Comme la somme à partager est 540^f, en retranchant 198^f de 540^f, ce qui donne 342^f, on obtient trois fois la troisième part.

La troisième part est donc le tiers de 342^f, ou 114^f.

Par suite, la seconde, qui vaut 75^f de plus, est égale à 189^f.

Et la première, qui vaut 48^f de plus que la seconde, est égale à 237^f.

Comme vérification, on remarque que la somme des trois nombres 237, 189 et 114 est bien égale à 540.

Employons maintenant les signes, et représentons par une

lettre x la part de la troisième personne : nous formerons le tableau suivant :

Part de la troisième personne.................. x

Part de la seconde............................ $x+75$

Part de la première............. $x+75+48$, ou $x+123$

Somme des trois parts.. $x+x+75+x+123$, ou $3x+198$

On a donc................. $3x+198=540$.

Si de ces deux quantités égales on retranche 198, les restes sont égaux, et l'on a

$$3x=540-198, \quad \text{ou } 3x=342.$$

Par suite $$x=\frac{342}{3}, \quad \text{ou} \quad x=114.$$

On voit aisément comment l'emploi des signes et de la lettre x, pour représenter l'inconnue, abrége et facilite la solution du problème.

5. Emploi des lettres comme moyen de généralisation.—La méthode que nous venons de donner ne nous fournit qu'un résultat isolé. Rien, dans ce résultat, ne nous indique les opérations à faire pour déduire des données la solution demandée : et si nous voulions résoudre le même problème, en changeant ces données, il nous faudrait recommencer le raisonnement et le calcul pour obtenir la solution nouvelle. Mais si l'on représente les données par des lettres, les calculs ne peuvent plus s'effectuer; et le résultat obtenu fournit la marche à suivre pour résoudre numériquement tous les problèmes de même espèce.

Reprenons, en effet, le problème précédent; et désignons par n le nombre à partager, par d_1 l'excès de la première partie sur la seconde, et par d_2 l'excès de la seconde sur la troisième. En répétant sur ces lettres les raisonnements du n° 4, nous formerons le tableau suivant :

Troisième partie.............. x

Seconde partie............... $x+d_2$

Première partie............... $x+d_2+d_1$

Somme des trois parties........ $3x+2d_2+d_1$.

Puisque, d'après l'énoncé, n est le nombre à partager,

$$3x+2d_2+d_1=n.$$

Soustrayant d_1 et $2d_2$ des deux membres,

$$3x=n-d_1-2d_2,$$

et divisant par 3,

$$x=\frac{n-d_1-2d_2}{3}. \qquad [1]$$

Ce résultat nous apprend que, *pour trouver la troisième part, il faut, du nombre à partager, soustraire successivement la première différence et deux fois la seconde, puis diviser le reste par* 3.

On a ainsi une *règle générale* pour résoudre tous les problèmes de cette espèce, c'est-à-dire tous ceux dont l'énoncé ne variera que par la valeur numérique du nombre à partager et par les différences successives de ses parties.

6. Formules algébriques. — Les expressions telles que [1] qui indiquent la série des opérations à effectuer pour résoudre une question, lorsque les nombres donnés sont représentés par des lettres, se nomment des *formules*.

On dit quelquefois que l'algèbre est la *science des formules*.

7. Utilité des formules. — L'avantage qu'il y a à renfermer ainsi, dans une formule générale, un nombre infini de cas particuliers, est une chose évidente en elle-même. Il n'est pas inutile cependant de le faire ressortir, dès à présent, par quelques exemples.

En premier lieu, l'énoncé des théorèmes généraux se trouve considérablement abrégé, et, par là, plus facile à retenir. Ainsi, au lieu de dire : *La somme de deux nombres est la même dans quelque ordre qu'on les ajoute; le produit de deux facteurs ne change pas quand on les intervertit; pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter les exposants;* on écrira :

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba, \qquad a^m\times a^n=a^{m+n};$$

et pour quiconque connaît la langue algébrique, les théorèmes sont tout aussi bien énoncés par ces formules que par les trois phrases écrites plus haut.

En second lieu, l'emploi des formules simplifie la démonstration des théorèmes. En voici un exemple :

Un mobile se meut d'un mouvement uniforme; sa vitesse, c'est-à-

dire l'espace qu'il parcourt dans l'unité de temps, est v : *quel sera l'espace* x *parcouru dans un temps* t ?

D'après la définition du mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps ; on a donc :

$$\frac{x}{v}=\frac{t}{1}.$$

D'où l'on conclut, en réduisant au même dénominateur,

$$x=vt; \qquad [2]$$

c'est là la formule demandée.

On en déduit immédiatement les deux nouvelles formules ;

$$[3] \qquad v=\frac{x}{t}, \qquad\qquad t=\frac{x}{v}. \qquad [4]$$

La formule [2] rend évidents les théorèmes suivants :

Dans un mouvement uniforme, l'espace parcouru pendant un temps donné est proportionnel à la vitesse; pour une vitesse donnée, il est proportionnel au temps ; et, en général, il est égal au produit du temps par la vitesse.

De la formule [3] on déduit les théorèmes suivants :

Dans un mouvement uniforme, la vitesse est proportionnelle à l'espace parcouru pendant un temps donné ; elle est en raison inverse du temps employé à parcourir un espace donné ; et, en général, elle est égale au rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir.

Enfin on conclut de la formule [4] :

Le temps employé à parcourir un espace donné est inversement proportionnel à la vitesse ; lorsque la vitesse est donnée, le temps est proportionnel à l'espace à parcourir ; et, en général, le temps est égal au rapport de l'espace parcouru à la vitesse du mobile.

Chacun de ces théorèmes exigerait une démonstration spéciale plus ou moins développée, si on les abordait directement * ; les formules [2], [3], [4], les rendent évidents pour tous ceux qui connaissent la valeur des locutions, grandeurs proportionnelles et inversement proportionnelles. (Voir l'*Arithmétique*.)

---

* Galilée, qui ne faisait pas usage de formules, y a consacré quatre pages. (*Giornata terza, de Motu æquabili.*)

Citons un autre exemple. On démontre en géométrie les théorèmes suivants :

1° Deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons : en d'autres termes, il existe, entre une circonférence C et son rayon R, un rapport constant 2π ; on a, par conséquent, la formule

$$C = 2\pi R. \quad [5]$$

2° Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.

3° Un cercle a pour mesure le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon ; en d'autres termes, sa surface S est mesurée par le produit $C \times \frac{R}{2}$, et l'on a

$$S = C \times \frac{R}{2} = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2. \quad [6]$$

Or cette dernière formule rend évident le second des théorèmes énoncés, « la surface d'un cercle est proportionnelle au carré de son rayon. » On pourrait donc se dispenser d'en faire un théorème distinct des deux autres ; et, surtout, on ne doit pas en donner une démonstration directe.

Si l'on se bornait à énoncer les théorèmes, sans en réduire les conséquences en formules, cette dépendance des propositions pourrait rester inaperçue.

8. Classification des formules. — On nomme *expression* ou *quantité algébrique*, un ensemble de lettres et de nombres réunis par quelques-uns des signes des opérations. Les expressions algébriques peuvent comprendre l'indication des six opérations : addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances, extraction des racines. Ainsi

$$\frac{13a^2b(2c+d)\sqrt{g}}{a-\sqrt{b}}$$

est une expression algébrique.

Une expression est *rationnelle*, quand aucune extraction de racine n'y est indiquée. Des deux expressions

$$\frac{7(x+3)(2a+b)}{5c}, \quad \sqrt[3]{a^2+b^2} - \sqrt{a+b+c} + k,$$

la première est rationnelle, et la seconde *irrationnelle*.

Une expression rationnelle, qui ne contient l'indication d'aucune division est dite *entière*. Des deux expressions

$$15(a+b)c^2, \qquad \frac{a^3-b}{a^2+b^2+c^2},$$

la première est entière et la seconde est *fractionnaire*.

Une expression, qui ne contient aucune indication d'addition ou de soustraction, se nomme *monome*. Par exemple, les expressions $13a^3b^4c$, $\frac{3}{4}x^2y$, sont des monomes.

On distingue dans un monome le *coefficient*, les lettres et leurs exposants. Le coefficient est le facteur numérique qui précède l'expression : il porte sur la quantité tout entière. Dans les exemples cités, 13 et $\frac{3}{4}$ sont des coefficients : ils indiquent que les quantités a^3b^4c, et x^2y doivent être respectivement multipliées par 13 et par $\frac{3}{4}$. L'exposant n'affecte que la lettre au-dessus de laquelle il se trouve. Ainsi l'expression $13a^3b^4c$ est l'indication abrégée du produit

$$a\times a\times a\times b\times b\times b\times b\times c\times 13.$$

Quand un monome n'a pas de coefficient, quand une lettre n'a pas d'exposant, on doit les considérer comme ayant le coefficient 1 ou l'exposant 1.

Lorsque plusieurs monomes sont réunis par les signes $+$ ou $-$, l'expression est un *polynome*, dont ils sont les *termes*. On considère ordinairement, comme faisant partie d'un terme, le signe qui le précède. Ainsi, dans le polynome

$$8x^3-5ax^2+6a^2x-4a^3,$$

les termes sont $8x^3$, $-5ax^2$, $+6a^2x$, $-4a^3$.

Un terme qui n'a pas de signe est considéré comme ayant le signe $+$. Les termes affectés du signe $+$ sont dits *positifs*; les termes précédés du signe $-$ sont dits *négatifs*.

Un polynome se nomme *binome*, quand il a deux termes ; *trinome*, quand il en a trois, et ainsi de suite.

On nomme *degré* d'un monome entier, la somme des exposants des lettres qui y entrent. Ainsi l'expression $7a^2b^3c$ est un monome du 6ᵉ degré.

On dit qu'un polynome entier est *homogène*, lorsque tous ses termes sont du même degré : ce degré est le *degré d'homogénéité* du polynome. Ainsi l'expression $5x^4-3abx^2+4ac^2x-2a^2bc$ est un polynome homogène du 4^e degré.

9. *La valeur numérique* d'une expression algébrique est le nombre que l'on obtient, quand on remplace les lettres qui y entrent par les valeurs qui leur sont attribuées, et qu'on effectue les opérations indiquées par les signes. *Réduire* une expression algébrique en *nombre*, c'est trouver sa valeur numérique.

Il suit de la définition précédente, que l'on peut regarder la valeur numérique d'un polynome comme étant la différence entre la somme des valeurs numériques des termes qui sont précédés du signe $+$, et la somme des valeurs numériques des termes qui sont précédés du signe $-$.

S'il arrivait que la seconde somme l'emportât sur la première, le polynome n'aurait pas de signification. On verra bientôt comment on doit considérer de pareils résultats.

10. TERMES SEMBLABLES : LEUR RÉDUCTION. — On dit que des termes sont *semblables* dans un polynome, lorsqu'ils sont composés des mêmes lettres, et que ces lettres sont affectées des mêmes exposants. Par exemple, $+15a^3b^2c$, $-7a^3b^2c$. Deux termes semblables ne peuvent différer que par le coefficient et par le signe.

On peut toujours réduire des termes semblables en un seul. En effet, si l'on rencontre dans un polynome deux termes semblables positifs, par exemple, $+7a^2b+9a^2b$, on peut les remplacer par le terme unique $+16a^2b$. Si les deux termes sont négatifs, comme $-7a^2b-9a^2b$, on peut leur substituer le terme $-16a^2b$. S'ils sont de signes contraires, comme $+9a^2b-7a^2b$, cette différence équivaut à $+2a^2b$. S'il s'agit de l'expression $+7a^2b-9a^2b$, il est évident qu'on peut la remplacer par le terme $-2a^2b$.

Ainsi, *pour réduire plusieurs termes semblables en un seul, on fait la somme des coefficients des termes précédés du signe $+$, puis la somme des coefficients des termes précédés du signe $-$; on retranche ensuite la plus petite somme de la plus grande, et l'on met devant le reste le signe de cette dernière somme. Enfin on*

fait suivre ce coefficient de la partie littérale commune à tous les termes.

Par exemple le polynome

$$5a^2b^2 + 12a^2b^2 - 6a^2b^2 - a^2b^2 - 4ab^3 - 7ab^3 + 2ab^3$$

se réduit à $$10a^2b^2 - 9ab^3.$$

LIVRE I.

DU CALCUL ALGÉBRIQUE.

---

11. Expressions équivalentes. On dit que deux expressions algébriques sont *équivalentes*, lorsqu'en y remplaçant chacune des lettres qu'elles renferment par une valeur particulière, choisie arbitrairement, elles prennent des valeurs numériques toujours égales entre elles. Ainsi les deux expressions $(a+b)^2$ et $a^2+2ab+b^2$ sont équivalentes.

12. Opérations algébriques. Puisque toute quantité algébrique doit être considérée comme un nombre, on définit les *opérations algébriques* de la même manière que celles qui portent le même nom en arithmétique. Mais les opérations algébriques se faisant sur des lettres, il est impossible de les exécuter jusqu'au bout, et l'on doit se borner à les indiquer.

Aussi le *calcul algébrique consiste-t-il* seulement *à transformer une formule en une autre plus simple, mais équivalente.*

Par exemple, quand on substitue a^5 au produit $a^2\times a^3$, ou $a+b$ à l'expression $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$, on fait une opération algébrique : et l'on dit quelquefois que l'on *effectue* le produit de a^2 par a^3, ou l'extraction de la racine carrée de l'expression $a^2+2ab+b^2$

CHAPITRE I.

ADDITION ET SOUSTRACTION ALGÉBRIQUES.

§ I. Addition et soustraction des monomes.

13. Règle d'addition des monomes. *Pour additionner des monomes, on les écrit les uns à la suite des autres, en les séparant par le signe* $+$. On forme ainsi un polynome qui est la *somme* cher-

chée : s'il renferme des termes semblables, on a soin de les réduire en un seul (**10**).

Exemple. La somme des monomes $4a$, $3b$, $5c$, $2a$, $6b$, $8c$, est

$$4a + 3b + 5c + 2a + 6b + 8c,$$

et se réduit à

$$6a + 9b + 13c$$

14. Règle de soustraction des monomes. *Pour soustraire d'un monome un autre monome, on écrit le second à la suite du premier, en les séparant par le signe* —. On forme ainsi un binome, qui est la *différence* demandée. Si les deux termes sont semblables, on les réduit en un seul.

Exemple. La différence des monomes $\sqrt{7a}$ et $\sqrt[3]{3b}$ est

$$\sqrt{7a} - \sqrt[3]{3b}.$$

Celle des monomes $8a^4b^3c$ et $5a^4b^3c$ est

$$8a^4b^3c - 5a^4b^3c$$

et se réduit à

$$3a^4b^3c.$$

Ces deux opérations algébriques étant les plus simples de toutes, on conçoit qu'il n'y a pas lieu de les simplifier.

§ II. Addition et soustraction des polynomes.

15. Principes pour l'addition et la soustraction des polynomes. L'addition et la soustraction des polynomes reposent sur quelques principes que nous allons énoncer, et qui sont évidents pour la plupart.

1° *Une somme reste la même, dans quelque ordre que l'on ajoute ses diverses parties.*

2° *Un polynome ne change pas de valeur numérique, quel que soit l'ordre dans lequel on écrive ses termes.* Il est égal, en effet, dans tous les cas, à l'excès de la somme de ceux qui sont précédés du signe + sur la somme de ceux qui sont précédés du signe — (**9**).

3° *Pour ajouter à un nombre la somme de plusieurs autres, il suffit de lui ajouter successivement chacun d'eux.*

4° *Pour ajouter à un nombre la différence de deux autres, il suffit de lui ajouter le premier, et de retrancher le second du résultat.*

5° *Pour retrancher d'un nombre la somme de plusieurs autres, il suffit d'en retrancher successivement chacun d'eux.*

6° *Pour retrancher d'un nombre* a *la différence* (b — c) *de deux autres, il faut lui ajouter le second* c, *et retrancher le premier* b *du résultat.* En effet, la différence entre deux nombres a et $(b-c)$ ne change pas, lorsqu'on ajoute un même nombre c à ses deux termes. L'excès de a sur $(b-c)$ est donc le même que celui de $(a+c)$ sur b; il est donc $(a+c-b)$.

Ces principes s'expriment par les formules suivantes :

$$a+b+c+d=d+c+b+a; \qquad [1]$$

$$a-b+c-d=c+a-b-d; \qquad [2]$$

$$a+(b+c+d)=a+b+c+d; \qquad [3]$$

$$a+(b-c)=a+b-c; \qquad [4]$$

$$a-(b+c)=a-b-c; \qquad [5]$$

$$a-(b-c)=a+c-b. \qquad [6].$$

Et ils conduisent aux règles suivantes :

16. Règle d'addition des polynomes. *Pour ajouter un polynome à un nombre, il faut lui ajouter les termes précédés du signe +, et retrancher du résultat les termes précédés du signe —.*

Soit, en effet, à ajouter au nombre P le polynome

$$a-b+c-d-e+f,$$

c'est-à-dire, à effectuer l'opération

$$P+(a-b+c-d-e+f).$$

Le polynome, en vertu du second principe (15), peut s'écrire :

$$a+c+f-b-d-e,$$

et, en vertu du cinquième principe, il est équivalent à

$$(a+c+f)-(b+d+e).$$

La somme demandée est donc :

$$P+\{(a+c+f)-(b+d+e)\}.$$

Or, d'après le quatrième principe, cette somme équivaut à

$$P+(a+c+f)-(b+d+e),$$

ou, d'après le troisième et le cinquième, à

$$P+a+c+f-b-d-e.$$

C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

17. Règle de soustraction des polynomes. *Pour retrancher d'un nombre un polynome, il faut ajouter à ce nombre les termes qui, dans le polynome, sont précédés du signe —, et retrancher les autres du résultat.*

Soit, en effet, à retrancher de P le polynome

$$a-b+c-d-e+f,$$

c'est-à-dire, à effectuer l'opération

$$P-(a-b+c-d-e+f).$$

Le polynome, en vertu des principes deuxième et cinquième, est égal à

$$(a+c+f)-(b+d+e);$$

la différence demandée est donc :

$$P-\{(a+c+f)-(b+d+e)\}.$$

Or, d'après les principes sixième, troisième et cinquième,

$$\begin{aligned} P-\{(a+c+f)-(b+d+e)\} &= P+(b+d+e)-(a+c+f) \\ &= P+b+d+e-a-c-f: \end{aligned}$$

c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

18. Remarque. L'ordre, dans lequel on écrit les termes d'un polynome, étant indifférent (princ. 2°), on peut énoncer les règles précédentes en disant :

Pour ajouter à un nombre P *un polynome, il faut écrire ses différents termes à la suite de* P, *en leur conservant leurs signes.*

Pour retrancher d'un nombre P *un polynome, il faut écrire ses différents termes à la suite de* P, *en changeant le signe de chacun d'eux.*

On devra d'ailleurs, s'il y a lieu, réduire les termes semblables dans le résultat.

19. Exemples de ces deux opérations. Dans la pratique, lorsque les polynomes, sur lesquels on opère, renferment des termes semblables, on les dispose les uns au-dessous des autres, de manière que les termes semblables soient dans une même colonne verticale ; et l'on fait alors à la fois l'opération et la réduction.

Exemples. 1° Effectuer l'addition :

$$(4x^3-5a^2x-8a^3-4ax^2)+(2a^2x-3x^3+7a^3)+(9a^3-5ax^2+5x^3)$$

On écrit, en intervertissant convenablement les termes :

$$\begin{array}{rrrr} 4x^3 & -4ax^2 & -5a^2x & -8a^3 \\ -3x^3 & & +2a^2x & +7a^3 \\ 5x^3 & -5ax^2 & & +9a^3 \\ \hline 6x^3 & -9ax^2 & -3a^2x & +8a^3. \end{array}$$

et l'on a :

2° Effectuer la soustraction :

$$(7a^3b - 8a^2b^2 + 5a^4 - 2b^4) - (2a^4 - 4ab^3 + 4a^3b - 2b^4).$$

On écrit, en changeant les signes des termes du second polynome :

$$\begin{array}{l} 5a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 \qquad\quad - 2b^4 \\ -2a^4 - 4a^3b \qquad\quad + 4ab^3 + 2b^4 \\ \hline 3a^4 + 3a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3. \end{array}$$

et l'on a :

§ III. Énoncé plus simple des résultats précédents.

20. Conventions qui introduisent les nombres négatifs pour simplifier les énoncés. La forme des résultats précédents peut se simplifier à l'aide d'une convention très-utile en algèbre. Cette convention consiste à *regarder tous les termes tant positifs que négatifs* (8) *d'un polynome comme* ajoutés *les uns aux autres.*

Ainsi, *l'on convient de regarder la différence* a — b *comme résultant de l'addition de* a *avec* (— b),

$$a - b = a + (-b). \qquad [1]$$

L'expression isolée $(-b)$, que l'on nomme un nombre *négatif*, n'acquiert pour cela aucune signification; seulement on dit : *ajouter* (—b), au lieu de dire : *retrancher* b.

On convient de même que *retrancher* (— b), signifie *ajouter* b,

$$a - (-b) = a + b. \qquad [2]$$

Il serait absurde de chercher à démontrer les formules [1] et [2] : les définitions ne se démontrent pas. On doit remarquer cependant, que la convention exprimée par la formule [2] est une conséquence toute naturelle de la première. En effet, si l'on ajoute $(-b)$ à a, on obtient, d'après la première convention, l'expression $a - b$: si maintenant on retranche $(-b)$ du résultat, on a, d'après la seconde convention, $a - b + b$, ou simplement a : les deux opérations se détruisent, ce qui doit être. Mais si l'on ne faisait pas la seconde convention, il arriverait, qu'en ajoutant d'abord à un nombre a, puis en retranchant du résultat une même quantité $(-b)$, on ne retrouverait pas le nombre a. Cette nouvelle convention est donc nécessaire, dès que l'on a adopté la première.

21. Règle générale d'addition. Ces deux conventions permettent de réduire la règle d'addition à l'énoncé suivant :

Pour ajouter deux polynomes, il faut AJOUTER *au premier tous les termes du second, quels que soient leurs signes.*

Soient, en effet, les deux polynomes :

$$a-b+c, \quad m-n+p-q;$$

leur somme est (18) :

$$a-b+c+m-n+p-q;$$

ce qui équivaut, d'après nos conventions, à

$$a-b+c+m+(-n)+p+(-q);$$

résultat conforme à l'énoncé.

22. RÈGLE GÉNÉRALE DE SOUSTRACTION. Les mêmes conventions permettent de réduire la règle de soustraction à l'énoncé suivant :

Pour retrancher un polynome d'une quantité quelconque A, *il faut en* RETRANCHER *successivement ses différents termes, quels que soient leurs signes.*

Soit, en effet, à retrancher de A le polynome $m-n-p+q$; on a vu (18) que la différence est :

$$A-m+n+p-q;$$

et ce résultat, d'après nos conventions, équivaut à

$$A-m-(-n)-(-p)-q;$$

ce qui est conforme à l'énoncé.

23. REMARQUE. L'introduction des nombres négatifs permet d'énoncer, avec plus de concision, des résultats auxquels cette forme nouvelle n'ajoute absolument rien. Nous verrons que tel est toujours, en algèbre, le but de leur introduction*.

24. AUTRE CONVENTION. Si l'on considère une différence $(a-b)$, et que l'on suppose b plus grand que a, l'opération est impossible; *on convient alors de regarder l'expression* (a—b) *comme représentant un nombre négatif égal à l'excès de* b *sur* a.

$$a-b=-(b-a); \qquad [3]$$

* Les explications qui précèdent sont absolument indispensables; elles n'ont rien de commun avec l'emploi des nombres négatifs pour représenter les grandeurs; nous ne parlerons de cette autre théorie qu'à l'occasion des problèmes du premier degré.

Cette convention est toute naturelle; et, en ne la faisant pas, on détruirait l'analogie complète qui existe entre les opérations relatives aux nombres négatifs et positifs. Désignons, en effet, par d l'excès de b sur a :

$$a-b=a-(a+d);$$

si donc on applique la règle de soustraction (22), on aura :

$$a-b=a-(a+d)=a-a-d=-d=-(b-a).$$

Nous prouvons ainsi, qu'il est naturel de faire la convention en question; mais nous ne *démontrons* pas la formule [3]. Notre raisonnement, en effet, est fondé sur l'application d'une règle de soustraction (22), qui, jusqu'ici, n'a de sens que pour des soustractions possibles. Il est naturel et commode de l'étendre à tous les cas; mais cela n'en est pas moins arbitraire.

25. Généralisation de quelques résultats. La convention que nous venons de faire permet de généraliser des résultats que l'on devrait, sans cela, énoncer avec restriction; on a, par exemple (15, 4°) :

$$c+(a-b)=c+a-b.$$

Cette formule est évidente, lorsque a est plus grand que b. Notre convention la rend vraie dans tous les cas; car si a est moindre que b, on a [24] :

$$(a-b)=-(b-a);$$

et par suite, en appliquant successivement la première convention du n° 20, et le sixième principe du n° 15,

$$c+(a-b)=c-(b-a)=c+a-b$$

De même la formule,

$$c-(a-b)=b+(c-a),$$

devient vraie, par suite de nos conventions, lors même que c est moindre que a. Car, en vertu de la convention (24),

$$a-b=-(b-a).$$

Donc, en appliquant la 2° convention du n° 20, puis les principes (15, 4° et 2°),

$$c-(a-b)=c+(b-a)=c+b-a=b+c-a.$$

D'un autre côté, d'après les mêmes conventions, c étant plus petit que a,

$$b+(c-a)=b-(a-c)=b+c-a;$$

donc
$$c-(a-b)=b+(c-a).$$

Si l'on représente une quantité négative *isolée* par une lettre m, les formules d'addition et de soustraction subsistent :

$$A+(-m)=A-m,\quad A-(-m)=A+m.$$

Car si l'on pose $m=-n$, n étant positif, on a :

$$A-m=A-(-n)=A+n=A+(-m),$$

et
$$A+m=A+(-n)=A-n=A-(-m);$$

ce qui démontre les deux formules.

20. Remarque. Dans les questions d'algèbre, les valeurs numériques des lettres ne sont jamais fixées d'avance; et lorsqu'on a à faire une opération algébrique, on ne sait pas si la mise en nombres ultérieure n'amènera pas des résultats auxquels ne sauraient s'appliquer les formules démontrées pour certains cas. Il est donc fort important que les formules s'appliquent à tous les cas possibles; et l'on comprend, d'après cela, quelle est la grande utilité des conventions relatives aux nombres négatifs.

EXERCICES.

I.

Deux courriers M et N parcourent la ligne OB. Au départ, ils sont situés, l'un en A et l'autre en B, à des distances a et b du point O; ils s'éloignent avec des vitesses v et u, dans le sens OB. Trouver des formules pour exprimer, après le temps t, la distance x des deux courriers, et la distance y du point O au milieu de la droite qui les joint.

On trouve : $x=b-a+(u-v)t$, ou $x=a-b+(v-u)t$,

selon que N est en avant ou en arrière de M;

puis
$$y=\frac{a+b}{2}+\frac{v+u}{2}t.$$

II. Trois vases contiennent des mélanges d'eau et de vin : le premier, a litres d'eau, b litres de vin; le deuxième, a' litres d'eau, b' litres de vin; le troisième, a'' litres d'eau, b'' litres de vin. On prend la moitié du liquide contenu dans le premier vase, et on le verse dans le deuxième; puis le tiers du liquide qui se trouve alors contenu dans celui-ci, et on le verse dans le troisième. Trouver les

formules qui indiquent la quantité d'eau et celle de vin contenues dans chaque vase après ces opérations.

On trouve :	Eau.	Vin.
1er vase..........	$\frac{a}{2}$,	$\frac{b}{2}$;
2e vase..........	$\frac{2a'+a}{3}$,	$\frac{2b'+b}{3}$
3e vase..........	$\frac{6a''+2a'+a}{6}$,	$\frac{6b''+2b'+b}{6}$.

III. Deux vases A et A', dont les capacités sont v et v', sont pleins, l'un d'eau, l'autre de vin. A l'aide de deux mesures de même capacité, on extrait de chacun d'eux un même volume u de liquide; et l'on verse dans A ce qui a été pris dans A', et réciproquement. On recommence trois fois cette opération. Trouver les formules qui expriment les quantités de vin et d'eau contenues dans chacun des vases.

On trouve : pour le vase A,

$$\text{quantité d'eau} = \left(\frac{(v-u)^2}{v} + \frac{u^2}{v'}\right)\frac{v-u}{v} + \left(\frac{v'-u}{v'} + \frac{v-u}{v}\right)\frac{u^2}{v'},$$

$$\text{quantité de vin} = \left(\frac{v-u}{v} + \frac{v'-u}{v'}\right)\frac{u(v-u)}{v} + \left(\frac{(v'-u)^2}{v'} + \frac{u^2}{v}\right)\frac{u}{v'};$$

et pour le vase A',

$$\text{quantité d'eau} = \left(\frac{v'-u}{v'} + \frac{v-u}{v}\right)\frac{u(v'-u)}{v'} + \left(\frac{(v-u)^2}{v} + \frac{u^2}{v'}\right)\frac{u}{v},$$

$$\text{quantité de vin} = \left(\frac{(v'-u)^2}{v'} + \frac{u^2}{v}\right)\frac{v'-u}{v'} + \left(\frac{v-u}{v} + \frac{v'-u}{v'}\right)\frac{u^2}{v}.$$

CHAPITRE II.

MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE.

27. La multiplication algébrique comprend trois cas : 1° multiplication d'un monome par un monome ; 2° multiplication d'un polynome par un monome, et *vice versa* ; 3° multiplication d'un polynome par un polynome.

§ I. Multiplication des monomes.

28. Règle de multiplication des monomes. Le produit de deux monomes M et N est le monome MN.

Lorsque les deux monomes sont entiers, qu'ils ont des coefficients et qu'ils renferment certaines lettres communes, ce résultat peut se simplifier, et se nomme alors le ***produit effectué*** des deux monomes. La simplification repose sur les deux principes suivants, que l'on démontre en arithmétique :

1° Le produit de plusieurs facteurs est indépendant de l'ordre des opérations.

2° Pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un autre produit de plusieurs facteurs, il suffit d'effectuer le produit de tous les facteurs.

Cela posé, soient $M = 5a^4b^3c$, $N = 7a^5c^3d^2$.

En vertu du second principe,

$$M = aaaabbbc \times 5,\ N = aaaaacccdd \times 7,$$

et par suite, $MN = aaaabbbc \times 5 \times aaaaacccdd \times 7$;
ou, en vertu du premier principe,

$$MN = aaaaaaaaabbbccccdd \times 5 \times 7.$$

Appliquant de nouveau le second principe,

$$MN = a^9b^3c^4d^2 \times 35,$$

ou plus simplement, $MN = 35a^9b^3c^4d^2$.

La méthode est générale, et conduit à la règle suivante :

Pour faire le produit de deux monomes entiers, 1° on fait le produit de leurs coefficients; 2° on écrit à la suite, une fois chacune, les lettres que renferment les facteurs; 3° on donne à chaque lettre un exposant égal à la somme de ceux dont cette lettre est affectée dans chaque facteur. Si une lettre n'entre que dans l'un des facteurs, on la met au produit avec son exposant.

29. Produit de plusieurs monomes. Ce qui précède suffit pour faire la multiplication d'un nombre quelconque de monomes. On multipliera, en effet, le premier par le second, puis le produit qui est un monome par le troisième, puis le nouveau produit par le quatrième, et ainsi de suite. Ainsi :

$$7a^3b^2e \times 5a^2bc^2 \times 8a^4c^3d^2 \times 2ade = 560a^{10}b^3c^5d^3e^2.$$

Par suite, la puissance m^{me} d'un monome s'obtient en formant la puissance m^{me} du coefficient, et en multipliant par m tous les exposants. Ainsi :

$$(5a^3b^2c)^m = 5^m a^{3m} b^{2m} c^m.$$

§ II. Multiplication d'un polynome par un monome.

30. Règle de multiplication. Soit à multiplier le polynome

$$P=a-b+c-d$$

par le monome m (a, b, c, d, sont des monomes quelconques). Nous distinguons plusieurs cas, pour plus de clarté.

1° m est entier. L'opération revient alors à faire l'addition de m polynomes égaux à P :

$$Pm=(a-b+c-d)+(a-b+c-d)+(a-b+c-d)+\ldots;$$

mais, d'après la règle d'addition (**21**), cette formule équivaut à

$$Pm=am-bm+cm-dm.$$

Ainsi chaque terme du multiplicande est multiplié par le multiplicateur, et conserve son signe.

2° m est fractionnaire de la forme $\frac{1}{p}$ (p étant entier). L'opération revient alors, comme on le sait, à prendre la p^{me} partie du multiplicande; et le résultat est :

$$Pm=\frac{a}{p}-\frac{b}{p}+\frac{c}{p}-\frac{d}{p};$$

car c'est bien là l'expression qui, multipliée par p, d'après la règle (1°), reproduit le multiplicande $(a-b+c-d)$.

D'ailleurs cette formule peut s'écrire :

$$Pm=a\times\frac{1}{p}-b\times\frac{1}{p}+c\times\frac{1}{p}-d\times\frac{1}{p},$$

ou $$Pm=am-bm+cm-dm,$$

comme dans le premier cas.

3° m est fractionnaire de la forme $\frac{p}{q}$. Pour effectuer le produit, il faut, dans ce cas, répéter p fois la q^{me} partie du multiplicande. Or, d'après le second cas, le multiplicande divisé par q devient :

$$a\times\frac{1}{q}-b\times\frac{1}{q}+c\times\frac{1}{q}-d\times\frac{1}{q},$$

et le produit de ce résultat par p est :

$$a\times\frac{p}{q}-b\times\frac{p}{q}+c\times\frac{p}{q}-d\times\frac{p}{q}:$$

car multiplier par p la q^{me} partie d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{p}{q}$. Donc, dans ce cas, le produit est encore :

$$Pm=am-bm+cm-dm.$$

Ainsi, dans tous les cas, *pour multiplier un polynome par un monome, on multiplie séparément par le monome chaque terme du polynome, en lui conservant le signe qu'il avait primitivement.*

Comme on peut intervertir l'ordre des facteurs, qui représentent toujours des nombres (28), la même règle permettra de multiplier un monome par un polynome. Ainsi les produits

$$(3a^4b-5a^3b^2+6abc^3-4b^2c)\times 5ab^2,$$
$$5ab^2\times(3a^4b-5a^3b^2+6abc^3-4b^2c),$$

sont équivalents à $15a^5b^3-25a^4b^4+30a^2b^3c^3-20ab^4c$.

31. Mettre un monome en facteur. La formule que nous venons de démontrer,

$$(a-b+c-d)m=am-bm+cm-dm$$

prouve que, si les termes d'un polynome $(am-bm+cm-dm)$ renferment un facteur commun m, on peut le supprimer dans chacun d'eux, ce qui donne l'expression $(a-b+c-d)$, et multiplier le résultat par m, c'est-à-dire écrire $(a-b+c-d)m$. C'est ce qu'on appelle *mettre un monome en facteur*. Ainsi les termes du polynome $12a^3x^4-8a^5x^2+16a^2x^5$ contiennent $4a^2x^2$ comme facteur commun. On peut donc écrire

$$12a^3x^4-8a^5x^2+16a^2x^5=(3ax^2-2a^3+4x^3)\times 4a^2x^2.$$

§ III. Multiplication d'un polynome par un polynome.

32. Cas où les deux polynomes ne contiennent que des termes séparés par le signe $+$. Soit à multiplier le polynome $P=a+b+c$ par le polynome $Q=p+q+r$; a, b, c, p, q, r désignant des nombres quelconques, qui peuvent eux-mêmes être représentés par des expressions algébriques plus ou moins compliquées. On a, d'après la règle du n° 30 :

$$PQ=P(p+q+r)=Pp+Pq+Pr,$$

ou $$PQ=(a+b+c)p+(a+b+c)q+(a+b+c)r.$$

Appliquant encore la règle (30) à chacun des produits, on a :

$$PQ = ap + bp + cp + aq + bq + cq + ar + br + cr,$$

résultat qu'on peut énoncer ainsi :

Le produit de deux polynomes, dont les termes sont positifs, est un polynome égal à la somme des produits qu'on obtient en multipliant tous les termes du premier par chacun des termes du second.

33. Cas où les deux polynomes contiennent des termes précédés du signe —. On peut toujours former un groupe de l'ensemble des termes qui, dans le multiplicande, sont précédés du signe +, et un autre groupe de l'ensemble des termes qui sont précédés du signe — (15, 2°). Nommons ces deux groupes A et B. Désignons par C et D les sommes analogues dans le multiplicateur. Les deux facteurs sont alors :

$$P = A - B, \quad Q = C - D.$$

On a, en appliquant la règle (30) :

$$PQ = P(C - D) = PC - PD = (A - B)C - (A - B)D.$$

Appliquant la même règle à chacun des produits partiels, on a :

$$PQ = (AC - BC) - (AD - BD),$$

ou, d'après la règle de soustraction des polynomes (22),

$$PQ = AC - BC - AD + BD.$$

D'ailleurs AC, BC, AD, BD, sont des produits de polynomes à termes positifs : on les effectuera d'après la règle du n° 32 ; puis on fera les additions et les soustractions indiquées par les signes. On obtiendra ainsi un polynome unique, qui sera le produit demandé. Le produit de deux polynomes peut donc toujours être remplacé par un polynome unique, que l'on nomme souvent *leur produit effectué*.

34. Règle de multiplication de deux polynomes. Si l'on examine comment le produit PQ est composé avec les termes qui entrent dans les deux facteurs, on remarque d'abord qu'il contient les produits de chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur. Quant aux signes qu'il faut donner à chaque terme du produit, on voit que tous les termes du produit partiel AC ont le signe +, et qu'ils sont fournis par des termes qui ont le signe + dans les deux facteurs ; que, de même, tous les termes du produit BD ont le signe +,

mais qu'ils sont fournis par des termes qui ont le signe — dans les deux facteurs; qu'au contraire, les termes des deux produits BC et AD sont précédés du signe —, et qu'ils sont fournis par des termes qui ont des signes différents dans les deux facteurs.

On conclut de là la règle suivante :

Pour multiplier un polynome par un autre, on multiplie chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur; on affecte du signe + chacun des termes qui, dans le produit, proviennent de la multiplication de deux termes affectés tous deux du signe +, ou tous deux du signe —; et l'on affecte du signe — chacun de ceux qui proviennent de la multiplication de deux termes affectés de signes différents. Puis on opère, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.

Cette *règle des signes* se traduit par le tableau suivant :

$$\begin{aligned}+a\times+b&=+ab,\\-a\times+b&=-ab,\\+a\times-b&=-ab,\\-a\times-b&=+ab.\end{aligned}$$

35. Manière plus simple d'énoncer les résultats précédents. L'énoncé de la règle précédente se simplifie, si l'on considère, ainsi que nous l'avons déjà fait (**20**), les termes qui sont précédés du signe —, comme des nombres *négatifs ajoutés* aux termes précédents, et si l'on adopte, en outre, les *définitions* suivantes :

Le produit d'un nombre négatif (— a) *par un nombre positif* b, *est* — (a × b).

$$(-a)(b)=-(a\times b). \qquad [1]$$

Le produit de deux nombres négatifs (— a) *et* (— *b*) *est* a × b.

$$(-a)(-b)=ab. \qquad [2]$$

D'après ces *conventions*, la règle de multiplication peut s'énoncer en disant : *le produit de deux polynomes s'obtient en multipliant chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, et en* AJOUTANT *les résultats obtenus.*

En effet, soit, par exemple, à multiplier $(a-b)$ par $(c-d)$; le produit est (**34**) :

$$ac-bc-ad+bd,$$

ou, d'après nos conventions,

$$ac+(-b)c+(-d)a+(-b)(-d);$$

ce qui est bien la somme des produits obtenus en multipliant chacun des termes a et $-b$ du multiplicande par chacun des termes c et $-d$ du multiplicateur.

36. Remarque I. Il n'y a pas lieu de chercher à démontrer les formules

$$[1] \qquad (-a)(b) = -ab, \quad (-a)(-b) = ab; \qquad [2]$$

elles expriment des définitions. *Ces définitions permettent de renfermer sous un seul énoncé les différents cas qu'il fallait distinguer dans la règle de multiplication des polynomes.*

37. Remarque II. On a vu (33), que

$$PQ, \text{ ou } (A-B)(C-D) = AC-BC-AD+BD. \qquad [3]$$

La démonstration supposait que A et C étaient respectivement plus grands que B et D ; les conventions, que nous venons de faire, rendent cette formule vraie, dans tous les cas.

Supposons, en effet, que l'un des facteurs soit négatif ; que l'on ait, par exemple :

$$A < B, \quad C > D.$$

$A-B$ étant négatif et égal (24) à $-(B-A)$, on a, d'après la première convention (35) :

$$PQ, \text{ ou } (A-B)(C-D) = -(B-A)(C-D).$$

Effectuant le produit d'après la règle (34), on a :

$$PQ = -(BC-AC-BD+AD),$$

ou, d'après la convention du n° 24 :

$$PQ = -BC+AC+BD-AD;$$

ce qui coïncide, à l'ordre des termes près, avec la formule [3].

Supposons, en second lieu, que les deux différences $A-B$ et $C-D$ soient négatives ; leur produit sera (35) le même que si elles étaient prises positivement, et l'on aura :

$$PQ, \text{ ou } (A-B)(C-D) = (B-A)(D-C) = BD-AD-BC+AC;$$

ce qui est encore conforme à la formule [3].

38. Remarque III. Nous représenterons dorénavant un pol

nome quelconque, quels que soient les signes de ses termes, par une expression de la forme

$$a+b+c+p+q+r;$$

a, b, c, p, q, r désignant des nombres positifs ou négatifs.

Par exemple, la formule

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

qui résulte immédiatement de la règle de multiplication, est vraie, par cela même, quels que soient les signes des quantités désignées par a et b. On peut donc supposer que b y représente un nombre négatif $(-b')$. Cette formule devient alors :

$$(a-b')^2=a^2+2a(-b')+(-b')^2,$$

ou, en appliquant les conventions (35),

$$(a-b')^2=a^2-2ab'+b'^2.$$

Les formules qui donnent le carré d'une somme et celui d'une différence se trouvent ainsi ramenées à une seule.

De même la formule

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

que l'on obtient en multipliant les deux membres de la précédente par $(a+b)$, devient, dans les mêmes circonstances,

$$(a-b')^3=a^3-3a^2b'+3ab'^2-b'^3;$$

de sorte que les formules qui donnent le cube d'une somme et celui d'une différence sont aussi ramenées à une seule.

39. Remarque IV. Les formules

$$[1] \qquad (-a)b=-ab, \qquad (-a)(-b)=ab, \qquad [2]$$

expriment des conventions faites en supposant que a et b sont des nombres positifs ; mais il est facile de voir que, par suite des mêmes conventions, ces formules ne cessent pas d'avoir lieu, lors même que a et b désignent des nombres négatifs.

La première formule peut, en effet, s'énoncer de la manière suivante :

Si, dans un produit, on change le signe de l'un des facteurs, le produit change de signe sans changer de valeur.

Et la seconde formule peut s'énoncer en disant :

Si, dans un produit, on change les signes des deux facteurs, le produit ne change ni de signe ni de valeur.

Or, nos conventions rendent ces deux propositions évidentes. Car considérons un produit ab de deux facteurs quelconques; si ces deux facteurs sont de même signe, leur produit est positif (35); en changeant le signe de l'un d'eux, ils deviennent de signes différents, et leur produit est négatif. C'est l'inverse, si les deux facteurs primitifs sont de signes contraires.

40. Remarque V. Lorsque, dans *un produit de plusieurs facteurs*, quelques-uns sont négatifs, le produit se définit comme en arithmétique : c'est le résultat obtenu en multipliant le premier facteur par le second, puis le produit effectué par le troisième facteur, puis le résultat par le quatrième, et ainsi de suite.

Il suit de là, que *le produit aura même valeur absolue que si tous les facteurs étaient regardés comme positifs. Il sera précédé du signe* $+$, *si le nombre des facteurs négatifs est pair, et du signe* $-$, *si ce nombre est impair.*

Pour le démontrer, remarquons que l'on peut toujours introduire $+1$ comme premier facteur. Dans les multiplications successives que l'on aura à effectuer pour former le produit, le signe qui, d'après cela, est d'abord $+$, changera autant de fois qu'il y a de facteurs négatifs; et comme deux changements consécutifs ramènent le signe $+$, il est évident que le signe sera $+$ si le nombre des changements est pair, et $-$ dans le cas contraire.

Il résulte évidemment de ce qui précède, que les puissances paires d'un nombre négatif sont positives, et que les puissances impaires sont négatives.

41. Définition de la division, quand le dividende et le diviseur ne sont pas tous deux positifs. Si l'on nomme *quotient* de deux nombres A et B, un troisième nombre qui, multiplié par le diviseur B, reproduit le dividende A, il résulte des conventions précédentes, que *la valeur absolue du quotient de deux nombres ne dépend pas de leurs signes, et que ce quotient est positif si le dividende et le diviseur ont le même signe, et négatif dans le cas contraire.*

En effet, si le dividende est positif, le quotient doit avoir le même signe que le diviseur; et si le dividende est négatif, le

quotient doit avoir un signe contraire à celui du diviseur (34). Cette *règle des signes* est consignée dans le tableau suivant :

$$+a:+b=+\frac{a}{b},$$

$$+a:-b=-\frac{a}{b},$$

$$-a:+b=-\frac{a}{b},$$

$$-a:-b=+\frac{a}{b}.$$

42. MULTIPLICATION D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE POLYNOMES. *Pour faire le produit d'un nombre quelconque de polynomes, il faut d'abord multiplier le premier par le second, puis le résultat par le troisième, et ainsi de suite.* Le produit effectué de deux polynomes étant toujours un polynome, il suffira, quel que soit le nombre des facteurs, de savoir multiplier deux polynomes l'un par l'autre (34).

Soient P_1, P_2, P_3, P_4 les différents polynomes dont on veut former le produit; en multipliant P_1 par P_2, on obtiendra un produit Q_1, dont les termes sont (35) les produits de tous les termes de P_1 par tous ceux de P_2; on multipliera Q_1 par P_3, et on obtiendra un produit Q_2, qui sera la somme des produits de tous les termes de Q_1 par tous ceux de P_3, c'est-à-dire la somme de tous les produits de trois facteurs obtenus, en prenant un facteur parmi les termes de P_1, un parmi les termes de P_2, et un enfin parmi les termes de P_3. On multipliera ensuite Q_2 par P_4. Le résultat Q_3 de cette multiplication sera la somme des produits des termes de Q_2 par ceux de P_4, c'est-à-dire la somme de tous les produits de quatre facteurs pris respectivement dans les polynomes P_1, P_2, P_3, P_4. On pourra continuer indéfiniment le raisonnement; et l'on verra que le *produit des polynomes* P_1, P_2, P_3,... P_n, *est la somme de tous les produits de* n *facteurs formés avec un terme de* P_1, *un terme de* P_2, *un terme de* P_3,... *et un terme de* P_n.

§ IV. Produit des polynomes ordonnés.

43. CE QUE C'EST QU'ORDONNER UN POLYNOME. *Ordonner un polynome par rapport à une lettre,* c'est disposer ses termes dans

un ordre tel, qu'en les considérant depuis le premier jusqu'au dernier, les exposants de cette lettre aillent tous en diminuant, ou tous en augmentant. Ainsi

$$8x^5+3x^4+2x^3-x^2-11x+1$$

est un polynome ordonné par rapport aux *puissances décroissantes* de la lettre x; et le polynome

$$5a^4-3a^3b-6ab^3+4b^4$$

est ordonné par rapport aux *puissances croissantes* de la lettre b, et aussi par rapport aux puissances décroissantes de la lettre a.

Un polynome est *complet*, lorsqu'il contient la lettre *ordonnatrice* à tous les degrés, à partir du degré le plus élevé. Le premier des deux polynomes précédents est complet; le second est *incomplet*, car le terme en a^2b^2 manque. Un polynome complet renferme autant de termes, plus un, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la lettre ordonnatrice: car il contient un terme indépendant de la lettre ordonnatrice, ou de *degré zéro*.

Lorsque plusieurs termes du polynome contiennent la lettre ordonnatrice avec le même exposant, on réunit tous ces termes en un seul, en *mettant en facteur* (31) la puissance de cette lettre; et l'on regarde le multiplicateur polynome que l'on obtient ainsi, comme le coefficient de cette puissance. On place d'ailleurs ce coefficient dans une parenthèse, ou bien on le dispose en colonne verticale à gauche de la puissance.

EXEMPLE. Le polynome

$$a^2x^5-2abx^5+b^2x^5+2a^3x^4-4b^3x^4-a^4x^3-a^2b^2x^3+b^4x^3+3a^2b^3x^2-2ab^4x^2$$

s'écrira

$$(a^2-2ab+b^2)\,x^5+(2a^3-4b^3)\,x^4-(a^4+a^2b^2-b^4)\,x^3+(3a^2b^3-2ab^4)x^2,$$

ou bien

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^2 & x^5+2a^3 & x^4-a^4 & x^3+3a^2b^3 & x^2 \\ -2ab & -4b^3 & -a^2b^2 & -2ab^4 & \\ +b^2 & & +b^4 & & \end{array}$$

La barre verticale sépare ainsi de son coefficient chaque puissance de la lettre ordonnatrice.

44. EXEMPLES DE MULTIPLICATIONS ORDONNÉES. Dans la pratique, on ordonne les deux facteurs par rapport à la même lettre, s'ils ont une lettre commune; et l'on place le multiplicateur sous le multiplicande, comme en arithmétique. Les produits partiels du multiplicande par chaque terme du multiplicateur sont alors

ordonnés par rapport à la même lettre; et l'on peut facilement placer les termes semblables les uns sous les autres, et en opérer ensuite la réduction.

Exemple I. Les deux polynomes sont complets.

$$
\begin{array}{ll|lllllll}
\text{Multiplicande....} & & 3x^4 & -\ 5ax^3 & -\ 4a^2x^2 & +\ 7a^3x & -\ 2a^4 & & \\
\text{Multiplicateur....} & & 2x^3 & -\ 5ax^2 & -\ 3a^2x & +\ 4a^3 & & & \\
\hline
\text{Produits} & 2x^3 & 6x^7 & -10ax^6 & -\ 8a^2x^5 & +14a^3x^4 & -4a^4x^3 & & \\
\text{du} & -5ax^2 & & -15ax^6 & +25a^2x^5 & +20a^3x^4 & -35a^4x^3 & +10a^5x^2 & \\
\text{multiplic}^{de} & -3a^2x & & & -\ 9a^2x^5 & +15a^3x^4 & +12a^4x^3 & -21a^5x^2 & +\ 6a^6x \\
\text{par} & +4a^3 & & & & +12a^3x^4 & -20a^4x^3 & -16a^5x^2 & +28a^6x\ -8a^7 \\
\hline
\text{Produit simplifié.} & & 6x^7 & -25ax^6 & +\ 8a^2x^5 & +61a^3x^4 & -47a^4x^3 & -27a^5x^2 & +34a^6x\ -8a^7
\end{array}
$$

Exemple II. Les polynomes sont incomplets. On laisse des intervalles vides pour pouvoir placer les termes semblables les uns sous les autres.

$$
\begin{array}{ll|lllllllll}
\text{Multiplicande....} & & 5a^5 & -3a^4b & & -2a^2b^3 & & +b^5 & & & \\
\text{Multiplicateur....} & & 3a^3 & -5ab^2 & +2b^3 & & & & & & \\
\hline
\text{Produits} & 3a^3.. & 15a^8 & -9a^7b & & -\ 6a^5b^3 & & +\ 3a^3b^5 & & & \\
\text{du multiplic}^{de} & -5ab^2 & & & -25a^6b^2 & +15a^5b^3 & & +10a^3b^5 & & -5ab^7 & \\
\text{par} & +2b^3. & & & & +10a^5b^3 & -6a^4b^4 & & -4a^2b^6 & & +2b^8 \\
\hline
\text{Produit simplifié.} & & 15a^8 & -9a^7b & -25a^6b^2 & +19a^5b^3 & -6a^4b^4 & +13a^3b^5 & -4a^2b^6 & -5ab^7 & +2b^8
\end{array}
$$

Exemple III. Les polynomes ont des coefficients polynomes.

Multiplicande..	a^2 $-2ab$ $+b^2$	x^3+2a^3 $-4b^3$	x^2-a^4 $-a^2b^2$ $+b^4$	$x+3a^2b^3$ $-2ab^4$
Multiplicateur..	a $-b$	x^2+a^2 $-ab$ $-b^2$	$x-a^3$ $+b^3$	

Produits partiels par

ax^2........	a^3 $-2a^2b$ $+ab^2$	x^5+2a^4 $-4ab^3$	x^4-a^5 $-a^3b^2$ $+ab^4$	$x^3+3a^3b^3$ $-2a^2b^4$	x^2	x
$-bx^2$.....	$-a^2b$ $+2ab^2$ $-b^3$	$-2a^3b$ $+4b^4$	$+a^4b$ $+a^2b^3$ $-b^5$	$-3a^2b^4$ $+2ab^5$		
a^2x.......		$+a^4$ $-2a^3b$ $+a^2b^2$	$+2a^5$ $-4a^2b^3$	$-a^6$ $-a^4b^2$ $+a^2b^4$	$+3a^4b^3$ $-2a^3b^4$	
$-abx$.....		$-a^3b$ $+2a^2b^2$ $-ab^3$	$-2a^4b$ $+4ab^4$	$+a^5b$ $+a^3b^3$ $-ab^5$	$-3a^3b^4$ $+2a^2b^5$	
$-b^2x$......		$-a^2b^2$ $+2ab^3$ $-b^4$	$-2a^3b^2$ $+4b^5$	$+a^4b^2$ $+a^2b^4$ $-b^6$	$-3a^2b^5$ $+2ab^6$	
$-a^3$......			$-a^5$ $+2a^4b$ $-a^3b^2$	$-2a^6$ $+4a^3b^3$	$+a^7$ $+a^5b^2$ $-a^3b^4$	$-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$
b^3.........			$+a^2b^3$ $-2ab^4$ $+b^5$	$+2a^3b^3$ $-4b^6$	$-a^4b^3$ $-a^2b^5$ $+b^7$	$+3a^2b^6$ $-2ab^7$

Produit total simplifié	a^3 $-3a^2b$ $+3ab^2$ $-b^3$	x^5+3a^4 $-5a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$ $+3b^4$	x^4+a^4b $-4a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+3ab^4$ $+4b^5$	x^3-3a^6 $+a^5b$ $+10a^3b^3$ $-3a^2b^4$ $+ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$

On voit que, dans ce cas, l'opération est plus longue, mais la règle est toujours la même : on multiplie toujours tous les termes du multiplicande par tous ceux du multiplicateur, et l'on opère la réduction des termes semblables.

§ V. Théorèmes et applications.

45. Nombre minimum des termes du produit. Lorsque l'on multiplie un polynome par un autre, on vient de voir que le produit peut renfermer des termes semblables, qui se réduisent

les uns avec les autres. Mais *il existe dans chaque produit deux termes au moins qui ne se réduisent avec aucun autre.* Ce sont, lorsque les polynomes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et celui du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.

En effet, un terme quelconque du produit est le produit d'un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur, et l'exposant de la lettre ordonnatrice dans ce terme est la somme des exposants dont cette lettre est affectée dans les deux facteurs. Par conséquent, dans le produit du premier terme du multiplicande et du premier terme du multiplicateur, l'exposant de la lettre ordonnatrice est la somme des exposants les plus élevés; il est donc plus fort qu'aucun autre. De même, dans le produit des derniers termes, l'exposant est la somme des exposants les moins élevés; il est plus faible qu'aucun autre. Les deux termes ainsi obtenus ne peuvent donc se réduire avec les autres.

Le produit de deux polynomes, ou d'un polynome par un monome, a donc toujours au moins deux termes. Il peut d'ailleurs ne renfermer que ces deux-là.

Exemple : Multiplicande.... $x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

Multiplicateur.... $x-1$

$$\begin{array}{l}
x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x \\
\quad\;\; -x^7-x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1 \\
\hline
\end{array}$$

Produit simplifié. $x^8 \qquad\qquad\qquad\qquad -1$

On voit qu'ici tous les termes se détruisent, à l'exception de x^8 e de -1, qui sont les produits des premiers termes entre eux et des derniers termes entre eux.

46. Remarque. Si les deux polynomes contiennent plusieurs lettres, on pourra les ordonner successivement par rapport à chacune d'elles; et, en appliquant la remarque précédente, on obtiendra un certain nombre de termes, qui devront subsister sans réduction dans le produit. Par exemple, si l'on multiplie les deux polynomes suivants, qui sont ordonnés par rapport à a,

$$a^4-a^3b^5+a^2b^3-b^4, \text{ et } a^6+a^4b-a^3b^7-ab^2,$$

les termes $a^4\times a^6$ ou a^{10}, et $(-b^4)(-ab^2)$ ou ab^6, seront irréduc-

tibles dans le produit. Mais si l'on ordonne ces deux polynomes par rapport à b,

$$-a^2b^5 - b^4 + a^2b^3 + a^4, \quad \text{et} \quad -a^4b^7 - ab^2 + a^4b + a^6,$$

ce seront les produits $(-a^2b^5)(-a^4b^7)$ ou a^6b^{12}, et $a^4 . a^6$ ou a^{10}, qui devront subsister dans le produit. Le terme a^{10} se présente, comme on voit, de deux manières différentes : et nous trouvons seulement trois termes distincts, qui, dans le résultat, ne peuvent éprouver aucune réduction.

47. Nombre maximum des termes du produit. Le produit du multiplicande par l'un des termes du multiplicateur contient autant de termes qu'il y en a dans le multiplicande. Donc, si le résultat n'offre pas de termes semblables à réduire, *le nombre des termes du produit total sera le produit du nombre des termes du multiplicande par le nombre des termes du multiplicateur*. C'est là évidemment *le plus grand* nombre de termes du résultat.

48. Produits homogènes. Nous nous contenterons d'énoncer le théorème suivant :

Le produit de plusieurs polynomes homogènes (8) *est un polynome homogène, dont le degré est la somme des degrés des facteurs.*

49. Théorème. *Le produit de la somme de deux nombres* a *et* b *par leur différence est égal à la différence des carrés des deux nombres.* Ce théorème résulte immédiatement de l'application de la règle de multiplication au produit de $(a+b)$ par $(a-b)$: il fournit la formule

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Cette formule est importante : elle sert surtout à *décomposer la différence de deux carrés en un produit de deux facteurs, dont l'un est la somme et l'autre la différence des racines.*

Exemples :

1° $$(a^2+ab+b^2)^2 - (a^2-ab+b^2)^2 = (2a^2+2b^2)\,2ab$$
$$= 4ab\,(a^2+b^2);$$

2° $$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \frac{2m}{2} \times \frac{2n}{2} = mn.$$

50. Théorème. *Le carré d'un polynome est égal à la somme des carrés de ses différents termes, plus deux fois la somme de leurs produits deux à deux.*

Le théorème est connu pour le binome :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Il se démontre aisément pour le trinome $(a+b+c)$. Car représentons par s la somme $a+b$ des deux premiers termes ; nous aurons, en appliquant la formule précédente,

$$(a+b+c)^2 = (s+c)^2 = s^2 + 2sc + c^2.$$

Remplaçant s par sa valeur, et effectuant les calculs, nous aurons :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned}$$

Il est facile d'étendre le théorème à un polynome de n termes,

$$P = a + b + c + \ldots. + k + l.$$

Car représentons par s la somme des $(n-1)$ premiers termes ; nous aurons :

$$P^2 = (a+b+c+\ldots.+k+l)^2 = (s+l)^2 = s^2 + 2sl + l^2.$$

Si l'on suppose que le théorème est vrai pour le polynome s, s^2 renferme les carrés des termes a, b, c,... k et leurs doubles produits deux à deux ; $2sl$ renferme les doubles produits des termes a, b, c.... k par le nouveau terme l, et l^2 est le carré de ce dernier terme. Donc P^2 renferme les carrés de tous les termes de P, ainsi que leurs doubles produits deux à deux. Donc, si le théorème a lieu pour un polynome de $(n-1)$ termes, il subsiste pour un polynome qui contient n termes, c'est-à-dire un terme de plus. Or il est démontré pour un polynome de trois termes ; donc il subsiste pour un polynome de quatre termes : mais, s'il a lieu pour un polynome de quatre termes, notre raisonnement montre qu'il a lieu pour un polynome de cinq termes, et ainsi de suite. Ainsi le théorème est général.

On formule souvent ainsi ce théorème :

$$(\Sigma a)^2 = \Sigma a^2 + 2\,\Sigma ab,$$

le signe Σ indiquant la somme d'une série de termes analogues à celui que ce signe précède.

Le raisonnement que nous venons de faire, à l'aide duquel on

s'élève d'une formule démontrée pour un cas particulier à une formule générale, doit être remarqué : on l'emploie souvent en algèbre.

Lorsque l'on veut effectuer dans la pratique le carré d'un polynome, on suit dans le calcul la marche fournie par la démonstration précédente, c'est-à-dire que l'on fait le carré du premier terme, le double produit du premier par le second, et le carré du second ; puis le double produit de la somme des deux premiers par le troisième, et le carré du troisième ; puis le double produit de la somme des trois premiers par le quatrième, et le carré du quatrième ; et ainsi de suite. D'ailleurs, pour réduire plus aisément les termes semblables, on dispose les calculs, comme on le voit dans l'exemple suivant, de manière que chaque ligne horizontale soit terminée par le carré d'un terme.

Soit à effectuer le carré du polynome

$$3x^4-4ax^3-5a^2x^2+2a^3x-a^4;$$

on aura :

$$\begin{array}{lllllllll}
9x^8 & & & & & & & & \\
 & -24ax^7 & +16a^2x^6 & & & & & & \\
 & & -30a^2x^6 & +40a^3x^5 & +25a^4x^4 & & & & \\
 & & & +12a^3x^5 & -16a^4x^4 & -20a^5x^3 & +4a^6x^2 & & \\
 & & & & -6a^4x^4 & +8a^5x^3 & +10a^6x^2 & -4a^7x & +a^8 \\
\hline
\end{array}$$

Carré simplifié.. $9x^8-24ax^7-14a^2x^6+52a^3x^5+3a^4x^4-12a^5x^3+14a^6x^2-4a^7x+a^8$

51. Remarque. *Le carré d'un polynome contient au moins quatre termes qui n'éprouvent pas de réduction.* Ce sont, lorsque le polynome est ordonné, les deux premiers et les deux derniers. En effet, soient α et β les exposants de la lettre ordonnatrice dans les deux premiers termes du polynome, les exposants de cette lettre, dans les deux premiers termes du carré, seront 2α et $\alpha+\beta$; or ces deux exposants sont différents, puisque, par hypothèse, $\alpha>\beta$; et ils sont évidemment supérieurs à ceux dont la lettre est affectée dans les autres termes du carré. Donc ces deux termes ne sauraient éprouver aucune réduction. On verra de même, que le double produit des deux derniers termes du polynome et le carré du dernier sont irréductibles.

EXERCICES.

I. Démontrer que le cube d'un polynome est égal à la somme des cubes des termes, plus trois fois la somme des produits de l'un des termes par le

carré d'un autre, plus six fois la somme des produits des termes trois à trois ; ou que

$$(\Sigma a)^3 = \Sigma a^3 + 3\,\Sigma a^2 b + 6\,\Sigma abc.$$

La démonstration est analogue à celle du n° 50.

II. Vérifier la formule

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

III. Vérifier l'égalité

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) &= (ap+bq+cr+ds)^2 + (aq-bp+cs-dr)^2 \\ &+ (ar-cp+dq-bs)^2 + (as-dp+br-cq)^2.\end{aligned}$$

IV. Si l'on pose

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= \mathrm{A}, \\ a+b-c-d &= \mathrm{B}, \\ a-b+c-d &= \mathrm{C}, \\ a-b-c+d &= \mathrm{D}; \end{aligned}$$

et, si l'on a, en même temps,

$$ab(a^2+b^2) = cd(c^2+d^2);$$

on propose de vérifier la formule

$$\mathrm{AB}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2) = \mathrm{CD}(\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2).$$

Les exercices II, III, IV, n'offrent d'autre difficulté que la longueur des calculs.

V. Soient x, y, z, u, v, w, des nombres quelconques. Si l'on pose

$$m = \frac{x-y}{x+y},\quad p = \frac{y-z}{y+z},\quad q = \frac{z-u}{z+u},\quad r = \frac{u-v}{u+v},\quad s = \frac{v-w}{v+w},\quad t = \frac{w-x}{w+x},$$

prouver que l'on a la formule

$$\begin{aligned}&(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)(1+t) \\ &= (1-m)(1-p)(1-q)(1-r)(1-s)(1-t).\end{aligned}$$

VI. Démontrer que $2y^2 + 3z^2 + 6t^2$ est égal à la somme de trois carrés.

VII. Simplifier l'expression

$$\tfrac{1}{6}\{x(x+1)(x+2) + x(x-1)(x-2)\} + \tfrac{3}{2}(x-1)x(x+1).$$

On trouve
$$\frac{x(11x^2-5)}{6}.$$

VIII. Vérifier la formule

$$4\{(a^2-b^2)cd + (c^2-d^2)ab\}^2 + \{(a^2-b^2)(c^2-d^2) - 4abcd\}^2 = (a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2.$$

IX. Réduire l'expression

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{3} - \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

On trouve
$$\frac{x(x+1)}{2}.$$

X. Si l'on fait, dans le polynome,

$$ax^2+2bxy+cy^2,$$

la substitution

$$x=\alpha x'+\beta y',$$
$$y=\alpha' x'+\beta' y',$$

il prendra la forme $\quad Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2;$

et l'on aura la formule

$$B^2-AC=(b^2-ac)(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2.$$

XI. Vérifier les égalités

$$1+x^4=(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2});$$
$$1+x^6=(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3}).$$

XII. Si l'on pose $\quad B=b^2+bc+c^2,\quad C=b^2c+bc^2,$

on aura la formule $\quad 4B^3-27C^2=(b-c)^2(2b^2+5bc+2c^2)^2$

et, par conséquent, $4B^3-27C^2$ est toujours positif.

Les formules VIII, X, XI, XII, se vérifient en effectuant les calculs : les deux membres deviennent alors identiques.

XIII. Démontrer que, si deux nombres entiers a et b sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, la demi-somme de leurs carrés est une somme de deux carrés.

On s'appuie sur le théorème (50).

XIV. Si a, b, m sont des nombres entiers, et si l'expression a^2+2mb^2 est un carré, démontrer que a^2+mb^2 est la somme de deux carrés.

On applique le théorème précédent.

CHAPITRE III.

DIVISION ALGÉBRIQUE.

52. Lorsqu'on a à diviser une expression algébrique A par une autre B, on indique le quotient, en plaçant le dividende au-dessus du diviseur, et en les séparant par une barre horizontale. On écrit $\frac{A}{B}$, et, le plus souvent, il est impossible de transformer la formule en une autre plus simple.

Mais lorsque A et B renferment des lettres communes, il ar-

rive quelquefois que l'on peut simplifier le quotient; et c'est ce qu'on appelle alors *effectuer* la division. Nous allons étudier l'opération à ce point de vue pour les monomes et les polynomes; nous donnerons la règle à suivre dans chaque cas, et nous étudierons en même temps les conditions, sans lesquelles le calcul n'est pas possible.

53. La division algébrique présente trois cas : 1° division d'un monome par un monome ; 2° division d'un polynome par un monome ; 3° division d'un polynome par un polynome.

§ I. Division des monomes.

54. Règle de division. Soit à diviser 75 $a^7b^4c^2d^5$ par 25 a^3bc^2; et *supposons* qu'il existe un monome entier qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende. D'après la règle de multiplication (28), le coefficient 75 du dividende doit être le produit du coefficient 25 du diviseur par celui du quotient: ce dernier s'obtiendra donc en divisant 75 par 25; il sera 3. D'après la même règle, l'exposant 7 de la lettre a dans le dividende doit être la somme de l'exposant 3 de la même lettre dans le diviseur, et de celui de cette lettre dans le quotient; on obtiendra donc ce dernier en retranchant 3 de 7; il sera 4. De même l'exposant de b sera 3. Comme c entre avec le même exposant 2 au dividende et au diviseur, cette lettre n'entrera pas au quotient; et comme d entre au dividende sans entrer au diviseur, elle devra se trouver au quotient avec son exposant 5. Le quotient est donc $3a^4b^3d^5$.

La méthode est générale; elle conduit à la règle suivante :

Pour diviser un monome entier par un autre: 1° on divise le coefficient du dividende par celui du diviseur; 2° on écrit, une fois chacune, les lettres qui entrent au dividende avec un exposant plus grand qu'au diviseur; 3° on affecte chacune de ces lettres d'un exposant égal à la différence de ceux qu'elle possède dans les deux monomes. Si une lettre n'entre qu'au dividende, elle entre au quotient avec son exposant.

55. Conditions de possibilité. Nous avons supposé, pour faire le raisonnement, que le quotient existait sous forme d'un monome entier. Or il est évident que cette hypothèse sera vérifiée, toutes les fois que *le coefficient du dividende sera divisible par celui*

du diviseur; qu'en outre, *les lettres du diviseur entreront toutes dans le dividende*; et qu'enfin *l'exposant de chacune d'elles au diviseur sera au plus égal à celui dont elle est affectée au dividende.* Car si ces conditions sont remplies, on pourra, en appliquant la règle (54), trouver un monome entier, qui multiplié par le diviseur, reproduira le dividende : ce sera donc le *quotient effectué.*

Mais si une ou plusieurs de ces trois conditions ne sont pas réalisées, il sera *impossible* d'obtenir le quotient sous forme d'un monome entier. Car, si le quotient existait sous cette forme, le raisonnement et la règle seraient applicables, et les trois conditions devraient être remplies.

Ce sont donc là les conditions nécessaires et suffisantes, pour que la division des monomes entiers soit possible.

56. Exposant zéro. D'après la règle que nous venons de donner, si une lettre a entre au dividende avec l'exposant m et au diviseur avec l'exposant n, elle entre au quotient avec l'exposant $m-n$. Mais la démonstration suppose que l'on a $m>n$. Si l'on a $m=n$, la lettre a disparaît du quotient, et la règle ne s'applique plus. Si toutefois l'on convenait de l'appliquer encore, on aurait a^{m-m} ou a^0; et comme le quotient de a^m par a^m est évidemment l'unité, on conserverait à la règle des exposants sa généralité, en faisant la *convention que* a^0 *représente l'unité,* quel que soit a. D'après cela,

$$75a^7b^4c^2d^5 : 25a^3bc^2 = 3a^4b^3c^0d^5;$$

et ce quotient n'est pas altéré par la convention, puisque le facteur $c^0=1$. On conserve d'ailleurs ainsi, dans le quotient, la trace d'une lettre qui, sans cela, disparaîtrait.

Nous donnerons plus loin de plus grands détails sur cette convention, qui se lie à la généralisation des exposants.

§ II. Division d'un polynome par un monome.

57. Règle de division. Le quotient de la division d'un polynome par un monome n'est jamais un monome; car le produit de deux monomes est toujours un monome (28). Ainsi, lorsque ce quotient existe sous forme entière, il ne peut être qu'un polynome. L'opération consiste donc, dans ce cas, à trouver un polynome qui, multiplié par le monome diviseur, reproduise le po-

lynome dividende. Or on a vu (30), que le produit d'un polynome par un monome est la somme des produits de chaque terme du multiplicande par le multiplicateur. Donc le *quotient cherché s'obtiendra en divisant chaque terme du dividende par le diviseur : on donnera d'ailleurs à chaque quotient partiel le signe du terme du dividende qui l'a fourni.* Par exemple,

$$(36a^4x^5 - 24a^3x^6 + 28a^5x^2) : 4a^3x^2 = 9ax^3 - 6x^4 + 7a^2.$$

58. Conditions de possibilité. *Si chaque terme du dividende, pris isolément, est divisible par le diviseur,* il est évident que le quotient est un polynome entier, qu'on peut obtenir par l'application de la règle précédente; et la démonstration de cette règle prouve, d'ailleurs, que cette condition est nécessaire.

§ III. Division des polynomes.

59. Il est bien rare que l'on puisse *effectuer* la division d'un polynome par un autre, c'est-à-dire *trouver un troisième polynome qui, multiplié par le second, reproduise le premier.* Cependant lorsque le dividende et le diviseur admettent une lettre commune, il arrive *quelquefois* que l'on peut mettre le quotient sous cette forme. Nous supposerons ici, que les deux polynomes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, et nous chercherons, *s'il est possible,* à représenter le quotient par un polynome ordonné de la même manière.

Le procédé de division repose sur les théorèmes suivants :

60. Théorème I. *Si deux polynomes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, et que le quotient de leur division soit égal à un polynome ordonné de la même manière, le premier terme de ce quotient est le quotient de la division du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.*

En effet, le quotient, multiplié par le diviseur, doit reproduire le dividende. Or, le premier terme du produit de deux polynomes ordonnés provient, sans réduction (45), du produit des premiers termes de chacun d'eux. Le premier terme du dividende est donc le produit du premier terme du quotient par le premier terme du diviseur; et le premier terme du quotient résulte, par conséquent, de la division du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.

On peut remarquer (41), que le premier terme du quotient sera positif ou négatif, suivant que le premier terme du dividende et le premier terme du diviseur auront ou n'auront pas le même signe.

61. THÉORÈME II. *Si l'on multiplie le diviseur par le premier terme du quotient, et si l'on retranche le produit du dividende, on obtiendra un reste qui, divisé par le diviseur, donnera pour résultat l'ensemble des autres termes du quotient.*

Le dividende est égal, en effet, au produit du diviseur par le quotient. Si donc on en retranche le produit du diviseur par un des termes du quotient, le reste sera le produit du diviseur par la somme des autres termes du quotient : cette somme sera, par suite, le quotient de la division du reste par le diviseur.

62. RÈGLE DE DIVISION. Les deux théorèmes précédents permettent de faire une division quelconque : car le premier donne le moyen de trouver le premier terme du quotient, et le second ramène la recherche de tous les autres à une division nouvelle. Le premier théorème, appliqué à cette division nouvelle, permet de trouver le premier terme du nouveau quotient, c'est-à-dire le second terme du quotient cherché; et le second théorème ramène la recherche des suivants à une troisième division, et ainsi de suite.

De là résulte cette règle :

Pour diviser un polynome par un autre : après les avoir ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; ce qui donne le premier terme du quotient. On multiplie le diviseur par ce quotient, et l'on retranche le produit du dividende: cette soustraction se fait en changeant le signe de chaque terme à soustraire, et en réduisant les termes semblables. On divise le premier terme du reste par le premier terme du diviseur; ce qui donne le second terme du quotient. On multiplie le diviseur par ce second terme, et l'on retranche le produit du reste. On obtient ainsi un second reste, dont on divise le premier terme par le premier terme du diviseur : ce qui donne le troisième terme du quotient. On multiplie le diviseur par ce troisième terme, et l'on retranche ce produit du second reste. On continue ainsi, jusqu'à ce que l'on trouve zéro pour reste.

Le polynome, dont on a obtenu ainsi les termes un à un, est

le quotient cherché ; car, en opérant d'après cette règle, on a retranché successivement du dividende les produits du diviseur par les différents termes de ce polynome ; puisqu'il ne reste rien, il faut que le dividende soit le produit du diviseur par ce polynome, c'est-à-dire que ce polynome soit le quotient.

62. Exemple I. Soit à diviser $x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$ par x^2+x-1 : on écrira, comme il suit, le diviseur à la droite du dividende, en les séparant par une barre verticale.

Dividende...	$x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$	x^2+x-1	diviseur.
	$-x^5-\ x^4+\ x^3$	x^3+5x^2+1	quotient.
1er reste.....	$5x^4+5x^3-4x^2+x-1$		
	$-5x^4-5x^3+5x^2$		
2e reste......	x^2+x-1		
	$-x^2-x+1$		
	0		

Le premier terme du quotient est x^3, quotient de la division de x^5 par x^2. Le produit du diviseur par x^3 est $x^5+x^4-x^3$; on écrit sous le dividende ce produit changé de signe ; ce qui réduit la soustraction à faire une simple réduction de termes semblables : et l'on obtient ainsi un premier reste $5x^4+5x^3-4x^2+x-1$.

Le second terme du quotient est $5x^2$, quotient de la division de $5x^4$ par x^2. On multiplie le diviseur par $5x^2$, ce qui donne $5x^4+5x^3-5x^2$; puis on écrit ce produit sous le premier reste en changeant son signe, et l'on opère la réduction. On obtient pour second reste x^2+x-1.

Le troisième terme du quotient est 1, quotient de x^2 par x^2. Si l'on multiplie le diviseur par 1, et qu'on retranche le produit du second reste, on obtient pour reste 0. Le quotient cherché est donc

$$x^3+5x^2+1.$$

On doit s'habituer à effectuer à la fois la multiplication de chaque terme du diviseur par le terme trouvé au quotient, la soustraction du terme correspondant du dividende, et la réduction des termes semblables. Le tableau du calcul se réduit alors, comme on le voit ici :

Dividende...	$x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$	x^2+x-1	diviseur.
1er reste....	$5x^4+5x^3-4x^2+x-1$	x^3+5x^2+1	quotient.
2e reste.....	x^2+x-1		
	0		

Exemple II. Les coefficients de la lettre ordonnatrice sont des monomes littéraux.

Soit à diviser le polynome

$$15a^8-9a^7b-25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8$$

par le polynome

$$3a^3-5ab^2+2b^3.$$

Nous nous contenterons de faire le tableau du calcul.

Dde	$15a^8-9a^7b-25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8$	$3a^3-5ab^2+2b^3$	Dr
1er reste	$-9a^7b- \quad +9a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8$	$5a^5-3a^4b-2a^2b^3+b^5$	Qt
2e reste	$-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8$		
3e reste	$+3a^3b^5-5ab^7+2b^8$		

64. Exemple III. La règle précédente ne suppose nullement que les puissances de la lettre ordonnatrice aient des coefficients numériques ou monomes. Ces coefficients peuvent être des polynomes (**43**), sans qu'il y ait rien à changer aux raisonnements et à la manière de procéder. Seulement, quand les coefficients du premier terme du dividende et du premier terme du diviseur sont des polynomes, il y a des divisions partielles à opérer, chaque fois que l'on veut obtenir un nouveau terme du quotient. Voici un exemple :

Dividende	a^3 $-3a^2b$ $+3ab^2$ $-b^3$	x^5+3a^4 $-5a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$ $+3b^4$	x^4+a^4b $-4a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+3ab^4$ $+4b^5$	x^3-3a^6 $+a^5b$ $+10a^3b^3$ $-3a^2b^4$ $+ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$
1er reste		$+a^4$ $-3a^3b$ $+2a^2b^2$ $+ab^3$ $-b^4$	x^4+a^5 $-3a^3b^2$ $-3a^2b^3$ $+2ab^4$ $+5b^5$	x^3-3a^6 $+a^5b$ $+7a^3b^3$ $+2a^2b^4$ $-ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$
2e reste			$-a^5$ $+2a^4b$ $-a^3b^2$ $+a^2b^3$ $-2ab^4$ $+b^5$	x^3-2a^6 $+6a^3b^3$ $-4b^6$	x^2+a^7 $+a^4b^3$ $-a^4b^3$ $-a^3b^4$ $-a^2b^5$ $+b^7$ 0	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$

a^2 $-2ab$ $+b^2$	x^3+2a^2 $-4b^2$	x^2-a^4 $-a^2b^2$ $+b^4$	$x+3a^2b^2$ $-2ab^4$	diviseur.
a $-b$	x^2+a^2 $-$ $-b^2$	$x-a^3$ $+b^3$		quotient.

1re division partielle.

$$\begin{array}{r|l} a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 & a^2-2ab+b^2 \\ \hline -a^2b+2ab^2-b^3 & a-b \\ 0 & \end{array}$$

2e division partielle.

$$\begin{array}{r|l} a^4-3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4 & a^2-2ab+b^2 \\ \hline -a^3b+a^2b^2+ab^3-b^4 & a^2-ab-b^2 \\ -a^2b^2+2ab^3-b^4 & \\ 0 & \end{array}$$

3e division partielle.

$$\begin{array}{r|l} -a^5+2a^4b-a^3b^2+a^2b^3-2ab^4+b^5 & a^2-2ab+b^2 \\ \hline +a^2b^3-2ab^4+b^5 & -a^3+b^3 \\ 0 & \end{array}$$

On divise d'abord, dans ce cas, $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$, coefficient du premier terme du dividende, par $(a^2-2ab+b^2)$, coefficient du premier terme du diviseur (première division partielle); ce qui donne $(a-b)$. Et comme x^5, divisé par x^3, donne x^2, le premier terme du quotient est $(a-b)x^2$. On multiplie le diviseur par ce terme, ce qui oblige à effectuer plusieurs multiplications de polynomes; puis on retranche ce produit du dividende, et on a un premier

resta. Pour continuer l'opération, on doit diviser $(a^4-3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4)$, coefficient du premier terme du reste, par $(a^2-2ab+b^2)$, (deuxième division partielle) : ce qui donne (a^2-ab-b^2). Le second terme du quotient est donc $(a^2-ab-b^2)x$. La multiplication du diviseur par ce terme, et la soustraction, amènent un nouveau reste, sur lequel on opère comme sur le précédent; et l'on arrive ainsi au quotient cherché.

65. Conditions de possibilité. — Les raisonnements, qui nous ont conduit au procédé de division, supposent essentiellement que le quotient puisse s'exprimer par un polynome. Or, lorsqu'on a à diviser un polynome par un autre, on ignore le plus souvent si cette condition est remplie. Il est donc important de déterminer les caractères auxquels on reconnaîtra qu'une division est possible sous cette forme. Ces caractères se rencontrent dans le procédé même que l'on emploie.

En effet, si une division est possible,

1° *Le premier terme du dividende doit être divisible par le premier terme du diviseur, et le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur* (45).

2° *Le premier terme de chaque reste doit être divisible par le premier terme du diviseur :* car il est le produit du premier terme du diviseur par un terme du quotient.

3° *Après un certain nombre de divisions partielles successives, on doit trouver au quotient un terme qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende partiel qui l'a fourni :* car on doit obtenir le reste zéro.

Ces conditions sont nécessaires : et si l'une d'elles n'est pas remplie, il n'existe pas de quotient sous la forme d'un polynome : la division ne peut s'effectuer.

Ces conditions sont suffisantes; car si elles sont remplies, le procédé employé fournit évidemment un polynome, qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende.

66. Caractères auxquels on reconnait si une division peut ou ne peut pas s'effectuer. — Lorsque les polynomes sont ordonnés, comme nous l'avons supposé (59), suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, l'exposant de cette lettre dans le premier terme de chaque reste va toujours en diminuant, puisque la réduction des termes semblables fait disparaître au moins le premier terme de chaque dividende partiel. Par conséquent, si l'on continue d'appliquer le procédé de division, *on*

arrivera nécessairement à un reste, dont le premier terme contiendra la lettre ordonnatrice avec un exposant plus faible que celui dont elle est affectée dans le premier terme du diviseur. Ou ce reste sera nul, et la division sera effectuée; ou il ne sera pas nul, et la division sera impossible.

Remarquons, d'ailleurs, que l'on pourra être averti de l'impossibilité de la division, avant d'arriver au reste dont nous parlons. Car il pourra se faire que *le premier terme d'un reste antérieur ne soit pas divisible par le premier terme du diviseur.*

EXEMPLE IV. Diviser $x^5 + 5x^4 + 2x^3$ par $x^2 + x$.

$$\begin{array}{rr|ll}
\text{Dividende.} & x^5 + 5x^4 + 2x^3 & x^2 + x & \text{diviseur.} \\ \cline{3-3}
& + 4x^4 + 2x^3 & x^3 + 4x^2 - 2x + 2 & \text{quotient.} \\
& - 2x^3 & & \\
& + 2x^2 & & \\
& - 2x & &
\end{array}$$

La suite des calculs amène le reste $-2x$, qui n'est pas divisible par x^2 : donc la division est impossible.

Quand une division ne peut pas s'effectuer, il existe un autre caractère auquel on peut reconnaître à quel moment on doit s'arrêter. En effet, si la division est possible, le dernier terme du dividende doit être le produit du dernier terme du diviseur par le dernier terme du quotient (45). Il résulte de là, qu'on peut déterminer immédiatement le dernier terme du quotient, en divisant le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur. Donc, *lorsqu'en formant les termes successifs du quotient, on en trouvera un de degré moindre que le terme ainsi calculé, on pourra affirmer que l'opération ne se termine pas*, et qu'aucun polynome ne peut représenter le quotient. *Il en sera de même, si l'on arrive à un terme de même degré que le terme ainsi calculé, et qui ne lui soit pas identique.*

Dans l'exemple IV, si le quotient existait, le dernier terme devrait être $2x^2$, quotient de $2x^3$ par x. Or le premier terme $4x^4$ du premier reste, divisé par x^2, donne pour quotient $4x^2$. Sans aller plus loin, on peut affirmer que la division ne se terminera pas.

67. DIVISION DES POLYNOMES ORDONNÉS SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES D'UNE LETTRE. Il arrive, dans certains cas, que l'on ordonne les termes d'un polynome suivant les puissances crois-

santes d'une lettre. On peut faire la division de deux polynomes ordonnés de cette manière, et trouver les divers termes du quotient, en commençant par ceux dans lesquels la lettre principale a le moindre exposant. La théorie est absolument la même que dans le mode ordinaire d'opérer; seulement, dans le cas où la division exacte n'est pas possible, il peut arriver qu'elle se poursuive indéfiniment; et l'on obtient alors des restes, dont le degré augmente de plus en plus, au lieu de diminuer, comme cela avait lieu dans le cas des polynomes ordonnés suivant les puissances décroissantes.

Pour donner un exemple de cette manière d'opérer, reprenons la division effectuée au paragraphe (**63**), en ordonnant les deux polynomes suivant les puissances croissantes de x.

EXEMPLE V. Divid

$$\begin{array}{r|l} \text{Divid}^{de}\ -1+x-4x^2+4x^3+6x^4+x^5 & -1+x+x^2 \quad \text{div}^r \\ \hline -5x^2+4x^3+6x^4+x^5 & +1+5x^2+x^3 \quad \text{quot}^t \\ -x^3+x^4+x^5 & \end{array}$$

Nous dirons : le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, le terme, dont le degré en x y est le moins élevé, provient sans réduction du produit des deux termes analogues dans le diviseur et dans le quotient (**45**); et, par conséquent, le premier terme du quotient est le quotient de la division du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur : il est $+1$.

On démontrera, absolument comme on l'a fait (**61**), qu'en retranchant du dividende le produit du diviseur par le premier terme du quotient, on obtient un reste $-5x^2+4x^3+6x^4+x^5$ qui, divisé par le diviseur, fournira les termes qui doivent compléter le quotient.

Le premier de ces termes est égal, pour les raisons données plus haut, au quotient de la division de $-5x^2$ par -1, c'est-à dire qu'il est $+5x^2$.

En multipliant $+5x^2$ par le diviseur, en retranchant le résultat du premier reste, on obtient un second reste $-x^3+x^4+x^5$, qui, divisé par le diviseur, fournira les termes qui doivent compléter le quotient.

Le premier de ces termes est égal, pour les raisons données plus haut, au quotient de la division de $-x^3$ par -1, c'est-à-dire qu'il est $+x^3$; en le multipliant par le diviseur, et retranchant le produit du reste précédent, on trouve une différence nulle; et l'opération est par conséquent terminée.

68. CARACTÈRE AUQUEL ON RECONNAIT QU'UNE DIVISION AINSI ORDONNÉE EST IMPOSSIBLE. Dans l'exemple précédent, l'opération se termine, et le résultat est identique, comme cela devait être, avec celui qu'a fourni la première manière d'opérer. Mais il n'en serait pas de même, si nous prenions une division impossible à effectuer exactement. Soit, par exemple, à diviser $(1+x+x^2+2x^3)$ par $(1+2x)$.

EXEMPLE VI. Dividende

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 + x + & x^2 + 2x^3 & & & 1 + 2x \quad \text{diviseur.} \\ \hline
-x + & x^2 + 2x^3 & & & 1 - x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots \quad \text{quotient.} \\
& +3x^2 + 2x^3 & & & \\
& -4x^3 & & & \\
& & +8x^4 & &
\end{array}$$

En appliquant le procédé ordinaire à cet exemple, on obtient des restes successifs, dans lesquels l'exposant de la lettre x, au premier terme, va toujours en augmentant; d'ailleurs la division du premier terme de chaque reste par le premier terme du diviseur est toujours possible. Donc le premier caractère d'impossibilité (66) ne se manifestera pas.

Mais il en existe un autre, analogue au second, qui se présente toujours, dans le cas où la division ne peut pas s'effectuer. En effet, si la division est possible, le dernier terme du dividende est le produit du dernier terme du quotient par le dernier terme du diviseur; par suite, le dernier terme du quotient s'obtiendra immédiatement, en divisant le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur. Or le degré des termes du quotient, par rapport à la lettre ordonnatrice, va en augmentant. Donc, *lorsqu'on arrivera, en appliquant le procédé, à placer au quotient un terme de même degré que le terme ainsi calculé et qui ne lui serait pas identique, ou bien un terme de degré supérieur, on pourra affirmer que la division est impossible.*

Dans l'exemple VI, si le quotient existait, son dernier terme serait x^2, quotient de $2x^3$ par $2x$; donc, lorsqu'on est amené à mettre au quotient le terme $3x^2$, on doit s'arrêter; la division ne saurait s'effectuer.

En résumé, on voit que, dans tous les cas, le procédé même de la division conduit nécessairement à des caractères certains de possibilité ou d'impossibilité.

§ IV. Des divisions qui ne peuvent se faire exactement.

69. DÉFINITIONS. On dit qu'un polynome est *entier* par rapport à une lettre x, lorsqu'il ne contient la lettre x ni en dénominateur, ni sous le signe $\sqrt{\ }$. Ainsi l'expression

$$\frac{3a^2x^3}{4} - \frac{2b^3x^2}{5a} + 3x\sqrt{c} - \frac{4}{5}$$

est un polynome entier en x.

Si un polynome est entier par rapport à une lettre x, le *degré* de ce polynome, *par rapport* à cette lettre, est l'exposant le plus élevé dont elle est affectée. Le polynome précédent est du 3^e degré *en x*.

On dit qu'un polynome, entier en x, est *divisible* par un autre polynome entier en x, quand le quotient peut s'exprimer par un polynome de même forme. Les coefficients peuvent être quelconques. Ainsi ax^2-3 est divisible par $x\sqrt{a}+\sqrt{3}$; le quotient est $x\sqrt{a}-\sqrt{3}$.

Lorsque les deux polynomes n'ont pas pour quotient un troisième polynome, on dit qu'ils ne sont pas divisibles l'un par l'autre. On peut néanmoins, dans ce cas, donner, en général, à l'expression de leur quotient, une forme plus simple que celle qui résulterait de la seule indication de l'opération. Nous allons démontrer, en effet, les théorèmes suivants.

70. Théorème I. *Si deux polynomes* A *et* B *sont entiers en* x (A *étant d'un degré au moins égal à celui de* B), *on peut toujours mettre le quotient* $\frac{A}{B}$ *sous la forme d'un polynome* Q, *entier en* x, *augmenté d'une fraction* $\frac{R}{B}$ *ayant pour dénominateur le diviseur* B, *et pour numérateur un polynome* R *entier en* x, *de degré moindre que* B.

On peut, en effet, ordonner les polynomes A et B suivant les puissances décroissantes de x, et leur appliquer le procédé de division (**62**); comme les coefficients du quotient ne sont pas astreints à être entiers, on peut continuer l'opération, jusqu'à ce que l'on trouve un reste de degré moindre que B. On obtiendra ainsi au quotient différents termes, dont aucun ne contiendra x en dénominateur. Car les dividendes partiels qui les fournissent sont tous d'un degré supérieur ou au moins égal à celui de B; et leur premier terme contient, par suite, x à un degré supérieur ou au moins égal à celui du premier terme de B.

Soit Q l'ensemble des termes obtenus, lorsque l'on parvient à un dividende partiel R, de degré moindre que B: R est ce qui reste du dividende A, lorsqu'on en retranche successivement les produits de B par les divers termes de Q; il est donc égal à A$-$BQ; et l'on a, par suite,

$$A=BQ+R:$$

d'où, en divisant par B les deux membres de la formule,

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B};$$

le quotient $\frac{A}{B}$ est donc mis sous la forme annoncée.

71. Théorème II. *La transformation précédente ne peut se faire que d'une seule manière.*

Supposons, en effet, qu'en divisant A par B, on puisse obtenir d'une part Q pour quotient et R pour reste, et de l'autre Q′ pour quotient et R′ pour reste, Q et Q′ étant entiers en x, et R et R étant de degrés moindres que B, on aurait, par ce qui précède,

$$A=BQ+R, \qquad A=BQ'+R';$$

et l'on en conclurait,

$$BQ+R=BQ'+R',$$

formule que l'on pourrait écrire

$$B(Q-Q')=R'-R.$$

Or R et R′ étant de degrés moindres que B, il en est de même de leur différence; tandis que le degré de B (Q — Q′), par rapport à x, est au moins égal à celui de B. Donc le second membre est d'un degré moindre que le premier; et l'égalité est impossible.

72. Exemples. On trouve, par la méthode précédente :

1° $$\frac{x^5-2x^3+x-1}{x^2-3}=x^3+x+\frac{4x-1}{x^2-3};$$

2° $$\frac{2x^4+3x^2-5x+7}{7x^3+x-1}=\frac{2}{7}x+\frac{\frac{19}{7}x^2-\frac{33}{7}x+7}{7x^3+x-1};$$

3° $$\frac{x^3\sqrt{\frac{2}{3}}+3x-\frac{1}{4}}{3x^2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{3x+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}}{3x^2-\frac{1}{2}}.$$

Si le degré du polynome A était moindre que celui de B, le quotient Q serait égal à zéro, et le reste R serait égal au dividende lui-même.

73. Remarque. Quand on applique au quotient de deux polynomes A et B la transformation précédente, on donne au poly-

nome Q le nom de *quotient entier*, et au numérateur R de la fraction $\frac{R}{B}$ celui de *reste* de la division.

74. Cas ou l'on change la lettre ordonnatrice. Nous avons prouvé que, les deux polynomes A et B étant ordonnés par rapport à une même lettre x, le quotient entier et le reste ne peuvent avoir qu'une seule forme (71). Mais, si l'on change la lettre ordonnatrice, les mêmes polynomes peuvent conduire à un nouveau quotient et à un nouveau reste. Si l'on considère, par exemple, la fraction

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},$$

en ordonnant par rapport à x, on trouve pour quotient x^2-y^2, et pour reste $2y^4$. Si l'on ordonnait, au contraire, par rapport à y, on trouverait pour quotient y^2-x^2, et pour reste $2x^4$; en sorte que l'on a :

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=x^2-y^2+\frac{2y^4}{x^2+y^2},$$

$$\frac{y^4+x^4}{y^2+x^2}=y^2-x^2+\frac{2x^4}{x^2+y^2}.$$

§ V. Différences et analogies entre la division arithmétique et la division des polynomes.

75. Les polynomes ordonnés suivant les puissances d'une même lettre, présentent, avec les nombres entiers, des analogies qu'il est bon de remarquer. Un nombre entier, comme 783214, exprime $(7\times10^5)+(8\times10^4)+(3\times10^3)+(2\times10^2)+(1\times10)+4$; et l'on peut l'assimiler au polynome

$$7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4,$$

dans lequel on aurait supposé $x=10$. Les chiffres du nombre sont ainsi les coefficients des termes du polynome. Il ne faut pas croire cependant, que toute question d'arithmétique, relative à des nombres entiers, soit purement et simplement un cas particulier d'une question d'algèbre, dans laquelle ces nombres seraient remplacés par les polynomes correspondants.

Comparons, par exemple, les deux questions suivantes :

Diviser 783214 par 321 :

Diviser $7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4$ par $3x^2+2x+1$.

Les conditions des deux problèmes ont entre elles des différences essentielles, qui ne permettent pas de considérer le premier comme un cas particulier du second.

1° Les divers chiffres du quotient de la division arithmétique doivent être entiers ; tandis que le quotient de la division algébrique peut être un polynome, entier par rapport à x, dont les coefficients soient des nombres fractionnaires.

2° Les divers chiffres du quotient et du reste, dans la division arithmétique, doivent être moindres que 10 ; tandis que rien ne limite la grandeur des coefficients des diverses puissances de x, dans la division algébrique.

3° Dans la division arithmétique, le reste doit être moindre que le diviseur. Dans la division algébrique, il doit être de degré moindre.

4° Enfin en algèbre, les résultats obtenus conviennent pour toutes les valeurs de x : il n'y a pas de condition analogue en arithmétique.

§ VI. Théorèmes et applications.

76. Théorème. *Si un polynome, entier en* x, *est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de cette lettre, le reste de la division de ce polynome par le binome* (x—a) *s'obtient en remplaçant* x *par* a *dans le polynome.*

En effet, le diviseur $(x-a)$ étant du premier degré, on pourra pousser la division, jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de degré moindre, c'est-à-dire indépendant de x. Soient donc X le dividende, Q le quotient, entier en x, qui résulte de cette division, et R le reste. On aura identiquement la formule :

$$X=(x-a)Q+R.$$

Or, cette égalité a lieu pour toute valeur attribuée à x ; car en multipliant $(x-a)$ par Q, et en ajoutant R au produit, on doit retrouver identiquement le polynome X, sans qu'il soit nécessaire de donner à x une valeur particulière. On peut donc y supposer $x=a$. Or, cette hypothèse annule le facteur $(x-a)$;

elle donne à Q une valeur déterminée; elle annule donc le produit $(x-a)$ Q. D'ailleurs elle ne change pas la valeur de R, qui ne contient pas x : donc si l'on désigne par X_a, la valeur que prend X, quand on y remplace x par a, l'égalité se réduit à

$$X_a = R.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

77. Corollaires. 1° *Si un polynome* X *devient nul, quand on y remplace* x *par* a, *il est divisible par* (x — a). Car X_a, étant nul par hypothèse, le reste R de la division est nul aussi.

2° *Si un polynome* X *est divisible par* (x — a), *il se réduit à zéro, quand on y remplace* x *par* a. Car le reste R étant nul par hypothèse, il en est de même de X_a.

Ainsi, *pour qu'un polynome, entier en* x, *soit divisible par* (x — a), *il faut et il suffit qu'il se réduise à zéro, quand on y remplace* x *par* a.

78. Cette dernière proposition est d'une grande importance. Bornons-nous à en signaler quelques conséquences : m est, dans ce qui suit, un nombre entier quelconque.

1° $(x^m - a^m)$ *est toujours divisible par* $(x-a)$. Car ce polynome s'annule, quand on y remplace x par a.

2° $(x^m + a^m)$ *n'est jamais divisible par* $(x-a)$. Car, en remplaçant x par a dans le dividende, on obtient le reste $2a^m$.

3° $(x^m - a^m)$ *est divisible par* $(x+a)$, *quand* m *est pair, et ne l'est pas, quand* m *est impair*. En effet, diviser par $(x+a)$, c'est diviser par $[x-(-a)]$: il faut donc, pour avoir le reste, substituer $(-a)$ à x. Le dividende devient alors $[(-a)^m - a^m]$. Or, si m est pair, on a (40) $(-a)^m = a^m$; et si m est impair, on a $(-a)^m = -a^m$. Donc le reste est nul dans le premier cas, et il est $(-2a^m)$ dans le second.

4° $(x^m + a^m)$ *est divisible par* $(x+a)$ *quand* m *est impair, et ne l'est pas, quand* m *est pair*. Car, en substituant encore $(-a)$ à x, le dividende devient $[(-a)^m + a^m]$. Il est donc nul, si m est impair; et il est $2a^m$, si m est pair.

79. Loi du quotient de la division d'un polynome par $(x-a)$. Nous avons fait connaître la loi, d'après laquelle on obtient le reste de la division d'un polynome par $(x-a)$ (76). On peut aussi découvrir aisément la loi du quotient. Représentons le poly-

nome par $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m$, et cherchons à effectuer la division.

$$\begin{array}{l|l|l}
\text{Div}^{\text{de}} \quad A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m & x - a & \text{Div}^{\text{r}}. \\
\hline
1^{\text{er}}\,\text{R}^{\text{te}} \left\{ \begin{array}{r|l} A_0a & x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m \\ +A_1 & \end{array} \right. & \begin{array}{r|l} A_0x^{m-1} + A_0a & x^{m-2} + \ldots \\ +A_1 & \end{array} & \text{Q}^{\text{t}}. \\
2^{\text{e}}\,\text{R}^{\text{te}} \left\{ \begin{array}{r|l} +A_0a^2 & x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m \\ +A_1a & \\ +A_2 & \end{array} \right. & &
\end{array}$$

Le premier terme du quotient est A_0x^{m-1}. En multipliant le diviseur par ce terme, et en retranchant le produit du dividende, on obtient un premier reste, dont le premier terme est $(A_0a + A_1)x^{m-1}$, et dont les autres sont les termes mêmes qui suivent le second dans le dividende. Le second terme du quotient est $(A_0a + A_1)x^{m-2}$; pour avoir le premier terme du second reste, il faut multiplier par a le second terme du quotient, et lui ajouter le troisième terme du dividende : on obtient ainsi $(A_0a^2 + A_1a + A_2)x^{m-2}$. Par suite le troisième terme du quotient est $(A_0a^2 + A_1a + A_2)x^{m-3}$. En continuant le calcul, on met facilement en évidence la loi suivante :

Le quotient d'un polynome, entier en x, *du degré* m, *par* (x — a), *est un polynome, entier en* x, *du degré* (m — 1). *Il est ordonné, comme le polynome proposé, par rapport aux puissances décroissantes de* x. *Le coefficient du premier terme est celui du premier terme du dividende. Pour obtenir le coefficient du second terme, on multiplie le précédent par* a ; *et l'on ajoute au produit le coefficient du second terme du dividende. Pour former le coefficient du troisième terme, on multiplie celui que l'on vient de former par* a, *et l'on ajoute le coefficient du troisième terme du dividende. Et, en général, le coefficient du* n^{me} *terme est égal au produit du coefficient précédent par* a, *produit augmenté du coefficient du* n^{me} *terme du dividende. Si le dividende n'est pas un polynome complet, il faut rétablir les termes qui manquent, en leur donnant zéro pour coefficient.*

Exemple. Trouver le quotient et le reste de la division du polynome $3x^5 - 4x^4 - 2x^2 + 7$ par $x - 2$. On écrit ainsi le dividende

$$3x^5 - 4x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 7\,;$$

on trouve pour quotient $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 12$, et pour reste 31.

Si l'on applique la loi précédente aux exemples du n° 78, on trouve :

$$1^\circ \quad \frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots\ldots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1}$$

2° $\dfrac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots\ldots+a^{m-3}x^2+a^{m-2}x+a^{m-1}+\dfrac{2a^m}{x-a}$

3° $\dfrac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots-a^{m-3}x^2+a^{m-2}x-a^{m-1}$,

si m est pair;

et $\dfrac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots+a^{m-3}x^2-a^{m-2}x+a^{m-1}-\dfrac{2a^m}{x+a}$,

si m est impair.

4° $\dfrac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots+a^{m-3}x^2-a^{m-2}x+a^{m-1}$,

si m est impair;

et $\dfrac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots-a^{m-3}x^2+a^{m-2}x-a^{m-1}+\dfrac{2a^m}{x+a}$,

si m est pair.

On peut, d'ailleurs, obtenir directement ces formules.

80. Théorème. *Si un polynome* A, *entier en* x, *se réduit à zéro quand on y remplace* x *par* a, *ou par* b, *ou par* c (a, b, c, *étant des nombres inégaux*), *ce polynome est divisible par le produit*

$$(x-a)(x-b)(x-c).$$

En effet, puisque A s'annule pour $x=a$, il est divisible par $(x-a)$ (77). Si donc on désigne par Q le quotient, entier en x, que l'on obtient, on a :

$$A=(x-a)Q.$$

Cette égalité ayant lieu, quel que soit x, on peut y supposer $x=b$; et, si l'on désigne par Q_b la valeur de Q, dans cette hypothèse, l'égalité devient

$$0=(b-a)Q_b.$$

Or, la différence $(b-a)$ n'est pas nulle, par hypothèse : donc $Q_b=0$. Donc Q est divisible par $(x-b)$ (77). Désignant le quotient par Q', on a :

$$Q=(x-b)Q';$$

et par suite,
$$A=(x-a)(x-b)Q'.$$

Cette égalité ayant lieu, quel que soit x, on peut y supposer $x=c$; et elle devient :

$$0=(c-a)(c-b)Q'_c,$$

Q'_c étant la valeur que prend alors Q'.

Or, les différences $(c-a)$, $(c-b)$, ne sont pas nulles : donc Q' doit être nul. Donc Q' est divisible par $(x-c)$; et, en désignant le nouveau quotient par Q'', on a :

$$Q'=(x-c)\,Q'',$$

d'où
$$A=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,Q''.$$

Donc A est divisible par le produit $(x-a)\,(x-b)\,(x-c)$.

EXERCICES.

I. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que (x^m-a^m) soit divisible par (x^n-a^n).

Il faut et il suffit que m soit divisible par n.

II. Prouver que le polynome

$$x^qy^r+y^qz^r+z^qx^r-x^ry^q-y^rz^q-z^rx^q$$

est divisible par le produit $(x-y)\,(x-z)\,(y-z)$.

III. Prouver que le polynome

$$x^py^qz^r+y^pz^qx^r+z^px^qy^r-x^ry^qz^p-y^rz^qx^p-z^rx^qy^p$$

est divisible par le même produit.

IV. Prouver que, si m est impair, le polynome

$$(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$$

est divisible par le produit $(a+b)\,(a+c)\,(b+c)$.

La démonstration des exercices II, III, IV, s'appuie sur le théorème du n° 80,

V. Si un polynome, entier en x, a pour coefficients des nombres entiers, et s'il prend des valeurs numériques impaires, quand on y remplace x par 0 par 1 successivement, ce polynome ne pourra se réduire à zéro pour aucune valeur entière attribuée à x.

CHAPITRE IV.

DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

81. Définitions. Lorsqu'une expression A n'est pas divisible par une expression B, on indique le quotient, comme on l'a vu,

(52) par la forme $\frac{A}{B}$. Cette expression porte le nom de *fraction algébrique*. Le dividende A est le *numérateur ;* le diviseur B est le *dénominateur :* A et B sont les *termes* de la fraction.

Une fraction algébrique est plus générale qu'une fraction arithmétique ; car les termes de la première ne sont pas, comme ceux de la seconde, assujettis à être des nombres entiers. Mais nous allons montrer que les règles de calcul sont communes aux deux genres de fractions.

§ I. Transformation des fractions algébriques.

82. THÉORÈME. *On n'altère pas la valeur d'une fraction algébrique, en multipliant ses deux termes par une même quantité.*

En effet, soient $\frac{a}{b}$ la fraction proposée, et m le multiplicateur. Représentons par une lettre q le quotient de la division de a par b : on a, d'après la définition même de la fraction,

$$a = bq.$$

Multipliant par le même nombre m ces deux quantités égales, on a :

$$am = bqm = bmq;$$

et, divisant par bm les deux produits égaux, on obtient l'égalité

$$\frac{am}{bm} = q, \quad \text{ou} \quad \frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

qui démontre le théorème.

La même formule prouve que l'on n'altère pas la valeur d'une fraction, en divisant ses deux termes par une même quantité.

Le principe fondamental étant ainsi le même en algèbre qu'en arithmétique, les conséquences seront les mêmes.

83. SIMPLIFICATION DES FRACTIONS. *On simplifie une fraction algébrique, en supprimant les facteurs communs à ses deux termes* (**82**).

Lorsque les deux termes sont des monomes, il est toujours facile de découvrir leurs facteurs communs.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{36a^4b^3c^2d}{28ab^5cd^3}$. Le plus grand commun diviseur des coefficients est 4 ; quant aux facteurs littéraux communs, on reconnaît immédia-

tement un facteur a, trois facteurs b, un facteur c, et un facteur d. En les supprimant, on obtient la fraction simplifiée $\frac{9a^3c}{7b^2d^2}$.

Lorsque les deux termes sont des polynomes, on trouve encore immédiatement leurs facteurs monomes communs.

Ainsi, dans la fraction $\frac{12a^4b^3-8a^3b^2}{16a^5b-20a^2b^4}$, on aperçoit le facteur monome $4a^2b$: si on le supprime, la fraction se réduit à $\frac{3a^2b^2-2ab}{4a^3-5b^3}$.

Mais il n'est pas aussi facile de découvrir les facteurs polynomes qui seraient communs aux deux termes : la recherche de ces facteurs se rattache à la théorie du plus grand commun diviseur algébrique, qui appartient à l'algèbre supérieure. Cependant il arrive quelquefois que des caractères particuliers permettent de les déterminer.

Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{a^4-2a^3+4a^2-7a+4}{a^2+5a-6}$$

On reconnaît que le numérateur et le dénominateur s'annulent pour l'hypothèse $a=1$: ils sont donc (77) divisibles tous deux par $(a-1)$. Si l'on supprime ce facteur commun, la fraction se réduit à

$$\frac{a^3-a^2+3a-4}{a+6}.$$

De même la fraction

$$\frac{8a^2c^2d^3-72b^2c^2d^3}{6ac^3d^2-18bc^3d^2}$$

peut s'écrire, en isolant les facteurs monomes communs aux termes du numérateur, et les facteurs communs aux termes du dénominateur,

$$\frac{8c^2d^3(a^2-9b^2)}{6c^3d^2(a-3b)};$$

et, sous cette forme, on reconnaît que $2c^2d^2(a-3b)$ est commun aux deux termes. La fraction se réduit donc à

$$\frac{4d(a+3b)}{3c}.$$

84. Réduction des fractions au même dénominateur. *On réduit des fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le produit effectué des dénominateurs de toutes les autres.* Ainsi les fractions

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f},\ \frac{g}{h},$$

deviennent, par cette transformation,

$$\frac{adfh}{bdfh},\quad \frac{cbfh}{bdfh},\quad \frac{ebdh}{bdfh},\quad \frac{gbdf}{bdfh};$$

elles n'ont pas changé de valeur (82); elles ont pour dénominateur commun le produit des dénominateurs primitifs.

On peut quelquefois obtenir un dénominateur commun plus simple que ce produit : car il suffit de choisir, comme en arithmétique, une expression *divisible* par chacun des dénominateurs particuliers. Lorsque ces dénominateurs sont monomes, ce *multiple commun* est égal au produit du plus petit multiple commun des coefficients, par les facteurs littéraux pris chacun avec leur exposant le plus élevé.

Soient, par exemple, les fractions

$$\frac{A}{12a^3b^2c},\quad \frac{B}{16a^2b^4},\quad \frac{C}{18abc^3}:$$

le plus petit multiple commun est $144a^3b^4c^3$. Les quotients de ce monome par les dénominateurs sont respectivement $12b^2c^2$, $9ac^3$, $8a^2b^3$. Les fractions équivalentes sont donc

$$\frac{A\times 12b^2c^2}{144a^3b^4c^3},\quad \frac{B\times 9ac^3}{144a^3b^4c^3},\quad \frac{C\times 8a^2b^3}{144a^3b^4c^3}.$$

Si les dénominateurs sont des polynomes, la recherche d'un multiple commun plus simple que leur produit ne peut s'exécuter, en général, qu'à l'aide des théories de l'algèbre supérieure. Cependant il peut arriver que des considérations particulières en fournissent l'expression.

Soient, par exemple, les fractions

$$\frac{2a}{3b^2},\quad \frac{a+b}{2b(a-b)},\quad \frac{a-b}{4a(a+b)},\quad \frac{a^3+2b^3}{9a^2(a^2-b^2)}.$$

Comme $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, on voit que l'expression $36a^2b^2(a^2-b^2)$ est divisible par chacun des dénominateurs; les quotients sont respectivement

$$12a^2(a^2-b^2),\quad 18a^2b(a+b),\quad 9ab^2(a-b),\quad 4b^2;$$

et les fractions équivalentes sont

$$\frac{24a^3(a^2-b^2)}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\quad \frac{18a^2b(a+b)^2}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\quad \frac{9ab^2(a-b)^2}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\quad \frac{4b^2(a^3+2b^3)}{36a^2b^2(a^2-b^2)}.$$

§ II. Opérations sur les fractions algébriques.

85. ADDITION. *Lorsque les fractions ont le même dénominateur,*

on additionne les numérateurs, et l'on donne à la somme le dénominateur commun.

Ainsi $$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}=\frac{a+b+c+d}{m};$$

car les produits par m de chacun des membres de cette formule sont (30) égaux à $(a+b+c+d)$.

Si les fractions ont des dénominateurs différents, on les réduit au même dénominateur; puis on applique la règle précédente.

86. SOUSTRACTION. *Lorsque les fractions ont le même dénominateur, on soustrait le second numérateur du premier, et l'on donne à la différence le dénominateur commun.*

Ainsi $$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m};$$

car les produits par m des deux membres de cette formule sont égaux (30) à $(a-b)$.

Si les fractions ont des dénominateurs différents, on les réduit au même dénominateur; puis on applique la règle précédente.

87. MULTIPLICATION. *On multiplie une fraction par une autre, en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, puis en divisant le premier produit par le second.*

En effet, soit à multiplier la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{a'}{b'}$. Désignons par q et q' les valeurs de ces deux fractions, de sorte qu'on a, par définition :

$$a=bq, \quad a'=b'q'.$$

Multiplions ces égalités membre à membre; nous aurons :

$$aa'=bq.b'q', \quad \text{ou (28)} \quad aa'=bb'qq'.$$

Divisons maintenant les deux membres par bb', nous aurons :

$$\frac{aa'}{bb'}=qq', \qquad \text{ou} \qquad \frac{aa'}{bb'}=\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'};$$

ce qui démontre la règle énoncée.

Il résulte de cette règle que *le produit de plusieurs fractions est une fraction égale au produit des numérateurs divisé par le produit des dénominateurs.*

Ainsi
$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}\cdots=\frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots};$$

et par suite
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

88. DIVISION. *On divise une fraction par une autre, en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Soit, en effet, à diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{a'}{b'}$. Posons encore,

$$a=bq,\quad a'=b'q',$$

et divisons ces égalités membre à membre; nous aurons :

$$\frac{a}{a'}=\frac{bq}{b'q'}.$$

Multiplions les deux membres par $\frac{b'}{b}$, nous aurons (87) :

$$\frac{ab'}{a'b}=\frac{bqb'}{b'q'b},$$

ou simplifiant le second membre (83),

$$\frac{ab'}{a'b}=\frac{q}{q'},$$

c'est-à-dire
$$\frac{a}{b}\times\frac{b'}{a'}=\frac{a}{b}:\frac{a'}{b'};$$

ce qui démontre la règle.

§ III. Des exposants négatifs.

89. DÉFINITION. On a vu (54), que le quotient de la division de a^m par a^n est a^{m-n} : mais la démonstration suppose que l'on a $m>n$. Si l'on a, au contraire, $m<n$, le quotient doit s'écrire sous forme de fraction, $\frac{a^m}{a^n}$. On peut alors supprimer m facteurs a communs aux deux termes, et la fraction prend la forme $\frac{1}{a^{n-m}}$.

D'un autre côté, si l'on appliquait la règle des exposants au cas où l'exposant du diviseur surpasse l'exposant du dividende, on écrirait :

$$a^m:a^n=a^{m-n}.$$

Par suite, on conservera à cette règle toute sa généralité, si l'*on convient que l'expression* a^{-p} *représente la fraction* $\frac{1}{a^p}$.

Nous admettrons, comme définition, qu'*une lettre affectée d'un exposant négatif exprime une fraction, qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur la même lettre affectée du même exposant pris positivement.* Et nous allons voir que cette notation permet de généraliser quelques théorèmes.

Et d'abord, la formule

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}, \qquad [1]$$

ayant lieu, par définition, quand m est positif, est vraie, par cela même, pour des valeurs négatives de m. En effet, si l'on suppose $m=-m'$, $-m$ deviendra égal à m'; et les deux membres de la formule [1] deviendront $a^{m'}$ et $\frac{1}{a^{-m'}}$. Or, par définition, $a^{-m'}=\frac{1}{a^{m'}}$, puisque m' est positif : donc $\frac{1}{a^{-m'}}$ est le quotient de 1 par $\frac{1}{a^{m'}}$ ou $a^{m'}$ (88). Les deux membres sont donc égaux.

90. Généralisation de la règle des exposants pour la multiplication. On a démontré (28), pour les exposants positifs, la formule

$$a^m\times a^n=a^{m+n}. \qquad [2]$$

Cette formule est encore vraie, si l'un des deux exposants, ou tous les deux, sont négatifs.

Supposons d'abord m positif, et n négatif et égal à $-n'$, nous aurons :

$$a^m\times a^n=a^m\times a^{-n'}=a^m\times\frac{1}{a^{n'}}=\frac{a^m}{a^{n'}}.$$

Mais $\frac{a^m}{a^{n'}}=a^{m-n'}$, en vertu de la règle générale de la division (89).

Donc $$a^m\times a^n=a^{m-n'},$$

ou, en remplaçant n' par $-n$,

$$a^m\times a^n=a^{m+n}.$$

Supposons maintenant m et n négatifs tous deux, et égaux à $-m'$ et $-n'$; nous aurons :

$$a^m\times a^n=a^{-m'}\times a^{-n'}=\frac{1}{a^{m'}}\times\frac{1}{a^{n'}}=\frac{1}{a^{m'+n'}}=a^{-m'-n'}=a^{m+n};$$

ce qu'il fallait démontrer.

91. Généralisation de la règle des exposants pour la division. On a (89), pour des valeurs positives de m et n, la formule

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad [3]$$

Cette formule est encore vraie, si l'un des nombres, m ou n, ou tous les deux, sont négatifs.

Supposons d'abord $m = -m'$, et n positif; nous aurons :

$$a^m : a^n = a^{-m'} : a^n = \frac{1}{a^{m'}} : a^n = \frac{1}{a^{m'+n}} = a^{-m'-n} = a^{m-n}.$$

Si, au contraire, m est positif, et n négatif et égal à $-n'$, on a :

$$a^m : a^n = a^m : a^{-n'} = a^m : \frac{1}{a^{n'}} = a^m \times a^{n'} = a^{m+n'} = a^{m-n}.$$

Si enfin on a, à la fois, $m = -m', n = -n'$, on aura :

$$a^m : a^n = a^{-m'} : a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} : \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^{n'}}{a^{m'}} = a^{n'-m'} = a^{m-n}.$$

La formule [3] est donc vraie dans tous les cas.

92. Généralisation de la règle des exposants pour les puissances. On a démontré (29), pour les valeurs positives de m et de n, la formule

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad [4]$$

Cette formule est encore vraie, si l'un des nombres m ou n, ou tous les deux, sont négatifs.

Supposons d'abord m positif, et n négatif et égal à $-n'$; nous aurons :

$$(a^m)^n = (a^m)^{-n'} = \frac{1}{(a^m)^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}} = a^{-mn'} = a^{m(-n')} = a^{mn}.$$

Supposons ensuite $m = -m'$, et n positif; nous aurons :

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^n = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^n = \frac{1}{a^{m'n}} = a^{-m'n} = a^{(-m')n} = a^{mn}.$$

Supposons enfin $m = -m', n = -n'$, à la fois; nous aurons :

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^{-n'} = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{-n'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'n'}}\right)} = a^{m'n'} = a^{mn}.$$

La règle est donc générale.

§ IV. Théorèmes et applications.

93. Théorème. *Si plusieurs fractions* $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}\ldots$ *sont égales entre elles, on obtient une fraction égale à chacune d'elles, en divisant la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs.*

En effet, désignons par une lettre q la valeur commune de toutes ces fractions; on aura, par définition,

$$a = bq, \quad a' = b'q, \quad a'' = b''q\ldots;$$

d'où, en ajoutant ces égalités membre à membre, et mettant q en facteur dans le second membre,

$$a + a' + a'' + \ldots = (b + b' + b'' + \ldots)\,q$$

Par suite, en divisant les deux membres par $(b + b' + b'' + \ldots)$, il vient:

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} = q = \frac{a}{b}; \qquad [5]$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaires. 1° On peut, avant de faire l'addition, multiplier les deux termes de chaque fraction par un même nombre quelconque. Ainsi

$$\frac{a}{b} = \frac{a\lambda}{b\lambda}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'\lambda'}{b'\lambda'}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{a''\lambda''}{b''\lambda''}\ldots$$

Comme les fractions n'ont pas changé de valeur, on en conclut:

$$\frac{a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \ldots}{b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' + \ldots} = \frac{a\lambda}{b\lambda} = \frac{a}{b}. \qquad [6]$$

2° Si l'on élève chaque fraction au carré, on a, en les supposant positives,

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \ldots = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots};$$

d'où, en extrayant les racines carrées des divers membres,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}} \qquad [7]$$

Ainsi, *si plusieurs fractions sont égales, chacune d'elles est égale au quotient de la racine carrée de la somme des carrés des numé-*

rateurs, divisée par la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs.

94. THÉORÈME. *Si plusieurs fractions, à termes positifs, sont inégales, la fraction formée, en divisant la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs, est comprise entre la plus grande et la plus petite d'entre elles.* Soient, par exemple,

$$\frac{a}{b}<\frac{a'}{b'}<\frac{a''}{b''}<\frac{a'''}{b'''}.$$

Si l'on pose $\frac{a}{b}=q$, d'où $a=bq$,

on en conclut : $a'>b'q,\quad a''>b''q,\quad a'''>b'''q$;

d'où, en ajoutant, membre à membre :

$$a+a'+a''+a'''>(b+b'+b''+b''')q,$$

et, par suite, $$\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}>q,$$

ou $$\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}>\frac{a}{b}.$$

Si l'on pose $\frac{a'''}{b'''}=q$, d'où $a'''=b'''q$,

on aura : $a''<b''q,\quad a'<b'q,\quad a<bq$;

puis, ajoutant membre à membre, on aura :

$$a+a'+a''+a'''<(b+b'+b''+b''')q,$$

d'où l'on tire : $$\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}<q,$$

ou $$\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}<\frac{a'''}{b'''};$$

ce qu'il fallait démontrer.

On démontrera aisément des corollaires analogues à ceux du théorème (93).

EXERCICES.

I. Vérifier la formule

$$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$$
$$=x^2+y^2+z^2-b^2-c^2.$$

II. Vérifier la formule

$$\frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(y^2-b^2)\,(z^2-b^2)}{b^2\,(b^2-c^2)} + \frac{(y^2-c^2)\,(z^2-c^2)}{c^2\,(c^2-b^2)} = 1.$$

III. Vérifier la formule

$$\frac{x^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(x^2-b^2)\,(b^2-z^2)\,y^2}{(y^2-b^2)\,b^2\,(c^2-b^2)} + \frac{(x^2-c^2)\,(c^2-z^2)\,y^2}{(c^2-y^2)\,c^2\,(c^2-b^2)} = \frac{(y^2-x^2)\,(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)\,(y^2-c^2)}.$$

IV. Vérifier la formule

$$\frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left\{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right\} + \frac{2}{(p+q)^3}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right\}.$$

V. Vérifier la formule

$$\frac{1}{(a-b)\,(a-c)\,(x+a)} + \frac{1}{(b-a)\,(b-c)\,(x+b)} + \frac{1}{(c-a)\,(c-b)\,(x+c)}$$
$$= \frac{1}{(x+a)\,(x+b)\,(x+c)}.$$

Les formules I, II, III, IV, V se vérifient en réduisant les deux membres au même dénominateur : on rencontre alors des identités.

VI. Simplifier l'expression

$$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}.$$

On trouve
$$\frac{1}{1-x^2}.$$

VII. Simplifier l'expression

$$\frac{1}{1-\left\{\dfrac{a+b+(1+ab)\,x}{1+ab+(a+b)\,x}\right\}^2}$$
$$\times\frac{(1+ab)\,\{1+ab+(a+b)\,x\}-(a+b)\,\{a+b+(1+ab)\,x\}}{\{1+ab+(a+b)\,x\}^2}.$$

On trouve
$$\frac{1}{1-x^2}.$$

VIII. Vérifier la proportion

$$\frac{\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{c}{a+2b}}{\dfrac{c}{a+2b}-\dfrac{c}{a+3b}} = \frac{\dfrac{c}{a+b}}{\dfrac{c}{a+3b}}.$$

IX. Réduire l'expression

$$\frac{x^{3n}}{x^n-1} - \frac{x^{2n}}{x^n+1} - \frac{1}{x^n-1} + \frac{1}{x^n+1},$$

et vérifier qu'elle est un polynome entier en x.

X. Réduire l'expression

$$\frac{a+b}{ab}\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{b+c}{bc}\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{a+c}{ac}\left(a^2+c^2-b^2\right),$$

et érifier que la somme ne contient pas de dénominateurs.

CHAPITRE V.

DES RADICAUX ALGÉBRIQUES,

95. Définitions. On a vu (**29**) que, pour élever un monome entier à la puissance m^{me}, il faut élever son coefficient à la puissance m^{me}, et multiplier par m tous les exposants. Par suite, si le coefficient d'un monome est une puissance m^{me} parfaite, et si ses exposants sont tous multiples de m, *on extrait la racine* m^{me} *de ce monome, en extrayant la racine* m^{me} *du coefficient, et en divisant par* m *tous les exposants.* Ainsi

$$\sqrt[m]{5^m a^{3m} b^{2m} c^m} = 5a^3b^2c.$$

Le plus souvent il n'existe pas de monome rationnel dont la puissance m^{me} soit égale à un monome donné ; alors on ne peut qu'indiquer la racine m^{me} à l'aide d'un signe. *On désigne par* $\sqrt[m]{A}$ *le nombre dont la puissance* m^{me} *est égale à* A. Ce nombre se nomme *radical*, et m est l'*indice* du radical. On donne aussi le nom de radical au signe seul $\sqrt[m]{\ }$.

Lorsque A est un polynome, il n'arrive presque jamais, que sa racine m^{me} puisse s'exprimer par un autre polynome ; d'ailleurs les règles qui conduisent à sa valeur, quand elle existe sous cette forme, ne se démontrent que dans la seconde partie de l'algèbre. Nous l'indiquerons, dans tous les cas, par le signe $\sqrt[m]{A}$.

96. Des différentes valeurs de $\sqrt[m]{A}$. Si l'on se borne à considérer les nombres positifs, $\sqrt[m]{A}$ a, d'après notre définition, une valeur unique et déterminée. Mais les conventions faites en algèbre nous obligent, dès à présent, à lui donner un sens plus étendu. Il peut arriver quatre cas.

1° Si A est positif, et que m soit pair, la racine m^{me} de A a deux valeurs égales et de signes contraires. En effet, si l'on élève à la puissance m^{me} le nombre $\sqrt[m]{A}$, quel que soit le signe qui le précède, on obtient toujours A, puisque le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs est positif (40). Par exemple, $\sqrt{4}$ représente, d'après nos conventions, -2 et $+2$; car ces deux nombres ont tous deux pour carré le nombre 4.

2° Si A est positif et m impair, il n'y a pas lieu, *pour le moment*, d'attribuer à $\sqrt[m]{A}$ une signification plus générale qu'en arithmétique. Ainsi $\sqrt[3]{8}=2$.

3° Si A est négatif et m pair, $\sqrt[m]{A}$ ne représente aucun nombre positif ou négatif; car les puissances paires d'un nombre positif ou négatif sont toujours positives (40).

4° Si A est négatif et m impair, posons $A=-A'$; alors $\sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{-A'}=-\sqrt[m]{A'}$; car m étant impair, la puissance m^{me} de $-\sqrt[m]{A'}$ sera $-A'$ ou A (40). Ainsi $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$; car le cube de -2 est -8.

Ces généralisations sont, en algèbre, d'une grande importance; elles recevront plus tard de grands développements; mais il n'en sera plus question dans ce chapitre. *Nous considérerons seulement les racines positives des nombres positifs.*

§ 1. Transformation des radicaux.

97. PRINCIPE I. *Lorsqu'un radical est multiplié par un facteur, on peut faire passer ce facteur sous le radical, pourvu qu'on l'élève à une puissance marquée par l'indice.* Ainsi

$$a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^m b}. \qquad [1]$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer, qu'en élevant $a\sqrt[m]{b}$ et $\sqrt[m]{a^m b}$ à la puissance m^{me}, on obtient des résultats égaux. En effet, la puissance m^{me} d'un produit étant le produit des puissances m^{mes} des facteurs, on a, pour la première expression :

$$(a\sqrt[m]{b})^m=a^m(\sqrt[m]{b})^m=a^m b.$$

D'ailleurs on a, pour la seconde, d'après la définition même,

$$(\sqrt[m]{a^m b})^m=a^m b.$$

La même formule [1] démontre, qu'*on peut faire sortir un facteur placé sous le radical, pourvu qu'on en extraie une racine marquée par l'indice.*

98. Principe II. *On n'altère pas la valeur d'un radical, en multipliant l'indice et l'exposant de ce radical par un même nombre.* Ainsi

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}. \qquad [2]$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer, qu'en élevant $\sqrt[m]{a^n}$ et $\sqrt[mp]{a^{np}}$ à la puissance mp^{me}, on obtient des résultats égaux. Et en effet, la seconde expression, élevée à la puissance mp^{me}, donne, par définition, a^{np}. Quant à la première, comme la puissance mp^{me} d'une expression est la puissance p^{me} de la puissance m^{me} de cette quantité (**28**), on a :

$$(\sqrt[m]{a^n})^{mp}=\{(\sqrt[m]{a^n})^m\}^p=(a^n)^p=a^{np}.$$

Les deux résultats sont donc bien égaux.

La même formule [2] démontre, qu'*on peut diviser l'indice et l'exposant d'un radical par un même nombre, sans altérer sa valeur.*

99. Simplification d'un radical. Lorsque le radical porte sur une quantité élevée à une certaine puissance, on peut souvent lui faire subir une simplification.

1° *Si l'indice de la racine est égal au degré de la puissance, les deux opérations se détruisent.* On a, en effet (**95**) :

$$\sqrt[m]{a^m}=a.$$

2° *S'il existe un facteur commun à l'indice de la racine et à l'exposant de la puissance, on peut le supprimer.* On a, en effet (**98**) :

$$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}.$$

3° *S'il se trouve sous le radical un facteur dont l'exposant soit multiple de l'indice de la racine, on peut le faire sortir du radical, en divisant cet exposant par l'indice.* On a (**97**) :

$$\sqrt[m]{a^{mp}b}=a^p\sqrt[m]{b}.$$

100. Réduction des radicaux au même indice. Soient deux radicaux $\sqrt[m]{a^p}$, $\sqrt[n]{b^q}$; on peut multiplier l'indice et l'exposant du

premier par n, indice du second; puis multiplier l'indice et l'exposant du second par m, indice du premier (98); on obtient ainsi : $\sqrt[mn]{a^{pn}}$ et $\sqrt[mn]{b^{qm}}$. Ces radicaux ont le même indice; car cet indice est le produit des deux indices.

On réduit donc deux radicaux au même indice, en multipliant l'indice et l'exposant de chacun d'eux par l'indice de l'autre.

On réduit de même plusieurs radicaux au même indice, en multipliant l'indice et l'exposant de chacun d'eux par le produit effectué des indices de tous les autres. Ainsi les radicaux

$$\sqrt[m]{a^{\alpha}},\quad \sqrt[n]{b^{\beta}},\quad \sqrt[p]{c^{\gamma}},\quad \sqrt[q]{d^{\delta}},$$

deviennent, par cette transformation,

$$\sqrt[mnpq]{a^{\alpha npq}},\quad \sqrt[mnpq]{b^{\beta mpq}},\quad \sqrt[mnpq]{c^{\gamma mnq}},\quad \sqrt[mnpq]{d^{\delta mnp}}.$$

Ces règles ont beaucoup d'analogie avec celles à l'aide desquelles on réduit les fractions au même dénominateur. On peut même pousser l'analogie plus loin, et *donner aux radicaux un indice commun égal au plus petit multiple commun de leurs indices.* En effet, soit μ le plus petit multiple commun aux indices, m, n, p, q; de sorte que l'on ait :

$$\mu = mm',\quad \mu = nn',\quad \mu = pp',\quad \mu = qq';$$

en multipliant l'indice et l'exposant du premier radical par m', et ceux des autres par n', p', q', respectivement, les radicaux deviennent,

$$\sqrt[mm']{a^{\alpha m'}},\quad \sqrt[nn']{b^{\beta n'}},\quad \sqrt[pp']{c^{\gamma p'}},\quad \sqrt[qq']{d^{\delta q'}},$$

ou

$$\sqrt[\mu]{a^{\alpha m'}},\quad \sqrt[\mu]{b^{\beta n'}},\quad \sqrt[\mu]{c^{\gamma p'}},\quad \sqrt[\mu]{d^{\delta q'}}.$$

§ II. Opérations sur les radicaux.

101. MULTIPLICATION. *Lorsque les radicaux ont le même indice, pour faire leur produit, on multiplie les quantités placées sous les signes, et l'on affecte le produit du signe commun.* Ainsi :

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}\times\sqrt[m]{d}=\sqrt[m]{abcd}. \qquad [3]$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer, qu'en élevant les deux membres à la puissance m^{me}, on obtient des résultats égaux. Car le second devient $abcd$, par définition; et comme la puissance m^{me}

d'un produit est le produit des puissances m^{mes} des facteurs (29). le premier membre devient :

$$(\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}\times\sqrt[m]{d})^m=(\sqrt[m]{a})^m\,(\sqrt[m]{b})^m\,(\sqrt[m]{c})^m\,(\sqrt[m]{d})^m=abcd.$$

Si les radicaux n'ont pas le même indice, on les ramène à un indice commun (100), et on applique la règle précédente. Ainsi:

$$\sqrt[p]{a^\alpha}\times\sqrt[q]{a^\beta}\times\sqrt[r]{a^\gamma}=\sqrt[pqr]{a^{\alpha qr}}\times\sqrt[pqr]{a^{\beta pr}}\times\sqrt[pqr]{a^{\gamma pq}}=\sqrt[pqr]{a^{\alpha qr+\beta pr+\gamma pq}}.$$

Si les radicaux ont des coefficients numériques ou littéraux, on en fait le produit. Ainsi :

$$3h\sqrt[p]{a^\alpha}\times 4k\sqrt[q]{a^\beta}=12hk\sqrt[pq]{a^{\alpha q+\beta p}}.$$

102. Division. *Lorsque les radicaux ont le même indice, pour diviser le premier par le second, on divise les quantités placées sous les signes, et l'on affecte le quotient du signe commun.* Ainsi :

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}. \qquad [4]$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer, qu'en élevant les deux membres à la puissance m^{me}, on obtient des résultats égaux. Et, en effet, le second devient, par définition, $\frac{a}{b}$. Quant au premier, comme la puissance m^{me} d'une fraction est le quotient des puissances m^{mes} de ses deux termes (87), il devient :

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}=\frac{a}{b}.$$

Si les radicaux ont des indices différents, on les ramène au même indice, et l'on applique la règle précédente. Ainsi :

$$\frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{b^n}}=\frac{\sqrt[pq]{a^{mq}}}{\sqrt[pq]{b^{np}}}=\sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$$

Si les radicaux ont des coefficients, on en fait le quotient. Ainsi :

$$\frac{3h\sqrt[p]{a^m}}{4k\sqrt[q]{b^n}}=\frac{3h}{4k}\sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$$

103. Puissances d'un radical. *Pour élever un radical à une puissance, on élève à cette puissance la quantité placée sous le radical.* Ainsi :

$$(\sqrt[m]{a^\alpha})^p=\sqrt[m]{a^{\alpha p}}. \qquad [5]$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer, qu'en élevant les deux membres à la puissance m^{me}, on obtient des résultats égaux. Et, en effet, le second devient, par la définition, a^{np}. Quant au premier, comme la puissance m^{me} de la puissance p^{me} d'une quantité est égale à la puissance pm^{me} ou à la puissance mp^{me} de cette quantité, et réciproquement, on a :

$$\{(\sqrt[m]{a^n})^p\}^m = (\sqrt[m]{a^n})^{pm} = (\sqrt[m]{a^n})^{mp} = \{(\sqrt[m]{a^n})^m\}^p = (a^n)^p = a^{np}.$$

Après l'opération, on simplifie le radical, s'il y a lieu (99).

Si le radical a un coefficient, on l'élève à la même puissance. Ainsi :

$$(h\sqrt[m]{a^n})^p = h^p\sqrt[m]{a^{np}}.$$

104. Racines d'un radical. *Pour extraire une racine d'un radical, on multiplie l'indice du radical par l'indice de la racine,* et l'on simplifie ensuite le résultat, s'il y a lieu. Ainsi :

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[mp]{a^n}. \qquad [6]$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'en élevant les deux membres à la puissance mp^{me}, on obtient des résultats égaux. Et, en effet, le second devient alors, par la définition, a^n. Quant au premier, comme la puissance mp^{me} d'une quantité est égale à la puissance m^{me} de la puissance p^{me} de cette quantité, on a :

$$(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}})^{mp} = \{(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}})^p\}^m = (\sqrt[m]{a^n})^m = a^n.$$

§ III. Des exposants fractionnaires.

105. Définition. On a vu (95) que, pour extraire la racine p^{me} d'une quantité a^{mp}, dont l'exposant est multiple de l'indice, il suffit de diviser l'exposant par l'indice. Ainsi $\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m$. Mais, si la division n'est pas possible, la règle ne s'applique plus, et la racine p^{me} de a^m s'écrit alors $\sqrt[p]{a^m}$. Si, toutefois, on appliquait encore la règle précédente à ce cas, on devrait écrire $a^{\frac{m}{p}}$. On conservera donc à cette règle toute sa généralité, si l'on *convient* de représenter le radical $\sqrt[p]{a^m}$ par le symbole $a^{\frac{m}{p}}$.

Nous admettrons, comme définition, *qu'une lettre* a, *affectée d'un exposant fractionnaire* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}}$, *représente un radical qui a pour*

exposant le numérateur m, *et pour indice le dénominateur* p. Et nous allons voir que cette notation nous permettra d'énoncer plus simplement les résultats précédents.

Mais, avant d'en montrer les avantages, nous ferons remarquer qu'elle n'implique pas contradiction; et que l'expression $a^{\frac{m}{p}}$ conserve la même valeur, si on y remplace l'exposant $\frac{m}{p}$ par une fraction égale $\frac{m'}{p'}$. En d'autres termes, si l'on a $\frac{m}{p}=\frac{m'}{p'}$,

on aura aussi $$a^{\frac{m}{p}}=a^{\frac{m'}{p'}},$$

c'est-à-dire, en vertu de nos conventions,

$$\sqrt[p]{a^m}=\sqrt[p']{a^{m'}}.$$

Or cette dernière égalité est évidente : car si l'on réduit ces deux radicaux au même indice, ils deviennent $\sqrt[pp']{a^{mp'}}$ et $\sqrt[pp']{a^{m'p}}$; et l'on voit qu'ils ont alors le même exposant, puisque l'égalité $\frac{m}{p}=\frac{m'}{p'}$ entraîne l'égalité $mp'=m'p$.

106. Généralisation de la règle des exposants pour la multiplication. On a démontré (**28**), pour les exposants entiers et positifs, la formule

$$a^m\times a^n=a^{m+n}. \qquad [1]$$

Cette formule est encore vraie, si l'un des exposants m ou n, ou tous les deux, sont fractionnaires.

Supposons d'abord m fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$, n restant entier; nous aurons, d'après la définition et le principe I (**97**):

$$a^m\times a^n=a^{\frac{p}{q}}\times a^n=\sqrt[q]{a^p}\times a^n=\sqrt[q]{a^p\times a^{nq}}=\sqrt[q]{a^{p+nq}};$$

or, si l'on applique notre convention à cette dernière expression, elle devient, $a^{\frac{p+nq}{q}}$ ou $a^{\frac{p}{q}+n}$;

donc $$a^{\frac{p}{q}}\times a^n=a^{\frac{p}{q}+n}.$$

Si maintenant les deux facteurs ont des exposants fractionnaires, $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{r}{t}$, on aura :

$$a^m\times a^n=a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{t}}=\sqrt[q]{a^p}\times\sqrt[t]{a^r}=\sqrt[qt]{a^{pt}}\times\sqrt[qt]{a^{rq}}=\sqrt[qt]{a^{pt}\times a^{rq}}=\sqrt[qt]{a^{pt+rq}};$$

or ce dernier radical peut s'écrire, d'après nos conventions,

$$a^{\frac{pt+rq}{qt}} \text{ ou } a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{t}};$$

donc $$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{t}}.$$

107. Généralisation de la règle des exposants pour la division. On a (89), pour des valeurs entières et positives de m et de n :

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad [2]$$

Cette formule est encore vraie, si m ou n, ou tous les deux, sont fractionnaires.

Supposons d'abord $m = \frac{p}{q}$, et n entier ; nous aurons :

$$a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^n = \sqrt[q]{a^p} : a^n = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[q]{a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{p-nq}};$$

or ce dernier radical peut s'écrire, d'après nos conventions,

$$a^{\frac{p-nq}{q}} \text{ ou } a^{\frac{p}{q}-n};$$

donc $$a^{\frac{p}{q}} : a^n = a^{\frac{p}{q}-n}.$$

Supposons ensuite m entier, et $n = \frac{p}{q}$; il viendra :

$$a^m : a^n = a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^m : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq}} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq-p}};$$

or ce dernier radical s'écrit, d'après nos conventions,

$$a^{\frac{mq-p}{q}} \text{ ou } a^{m-\frac{p}{q}};$$

on en conclut : $$a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}}.$$

Supposons enfin $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{t}$; il viendra :

$$a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{t}} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[t]{a^r} = \sqrt[qt]{a^{pt}} : \sqrt[qt]{a^{rq}} = \sqrt[qt]{a^{pt-rq}};$$

et, comme ce dernier radical s'écrit, d'après nos conventions,

$$a^{\frac{pt-rq}{qt}} \text{ ou } a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{t}},$$

on en conclut : $$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{t}}.$$

108. Généralisation de la règle des exposants pour la

FORMATION DES PUISSANCES. On a démontré (29), pour les valeurs entières et positives de m et de n, la formule

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad [3]$$

Cette formule est encore vraie, quand m ou n, ou tous les deux, sont fractionnaires.

Supposons d'abord $m = \frac{p}{q}$, n entier ; on a :

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^n = (\sqrt[q]{a^p})^n = \sqrt[q]{a^{pn}};$$

et comme, d'après nos conventions,

$$\sqrt[q]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{q}} = a^{\frac{p}{q}\times n},$$

on en conclut : $(a^m)^n = a^{\frac{p}{q}\times n} = a^{mn}.$

Supposons, au contraire, m entier et $n = \frac{p}{q}$; on a :

$$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{m\times\frac{p}{q}} = a^{mn}.$$

Supposons, enfin, $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{t}$; nous aurons :

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{t}} = \sqrt[t]{(\sqrt[q]{a^p})^r} = \sqrt[tq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{tq}} = a^{\frac{p}{q}\times\frac{r}{t}} = a^{mn}.$$

109. GÉNÉRALISATION DE LA RÈGLE DES EXPOSANTS POUR L'EXTRACTION DES RACINES. On a vu (108) que, pour des valeurs entières et positives de m et n, on a la formule

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}, \qquad [4]$$

formule démontrée quand n est divisible par m, formule de convention quand la division n'est pas possible. Cette formule est vraie, quand m ou n, ou tous les deux, sont fractionnaires.

Supposons d'abord m entier, et $n = \frac{p}{q}$; nous aurons :

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[mq]{a^p};$$

or, d'après nos conventions, $\sqrt[mq]{a^p}$ s'écrit

$$a^{\frac{p}{mq}} \quad \text{ou} \quad a^{\frac{p}{q}:m};$$

donc $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{p}{q}:m} = a^{\frac{n}{m}}.$

Supposons, en second lieu, $m=\frac{p}{q}$, n restant entier. La racine, d'indice $\frac{p}{q}$, de la quantité a^n, est le nombre dont la puissance $\frac{p}{q}$ est égale à a^n. Désignons ce nombre par x, de telle sorte que

$$x^{\frac{p}{q}}=a^n, \quad \text{ou} \quad \sqrt[q]{x^p}=a^n.$$

Si l'on élève les deux membres à la puissance q^{me}, puis si l'on extrait des résultats la racine p^{me}, on aura successivement :

$$x^p=a^{nq}, \quad x=\sqrt[p]{a^{nq}}=a^{\frac{nq}{p}}=a^{n:\frac{p}{q}};$$

donc $$x=\sqrt[m]{a^n}=a^{n:\frac{p}{q}}=a^{\frac{n}{m}}.$$

Supposons enfin $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{r}{t}$; $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{t}}}$ est la quantité x, dont la puissance $\frac{p}{q}$ est égale à $a^{\frac{r}{t}}$; on a donc :

$$x^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{r}{t}}, \quad \text{ou} \quad \sqrt[q]{x^p}=\sqrt[t]{a^r}.$$

Élevant les deux membres à la puissance q^{me}, puis extrayant des résultats la racine p^{me}, nous aurons successivement :

$$x^p=\sqrt[t]{a^{rq}}, \quad x=\sqrt[pt]{a^{rq}}=a^{\frac{rq}{pt}}=a^{\frac{r}{t}:\frac{p}{q}};$$

donc $$x=\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{r}{t}:\frac{p}{q}}=a^{\frac{n}{m}}.$$

110. Généralisation dans le cas où les exposants fractionnaires sont négatifs. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les nombres m et n sont positifs. Les diverses formules que nous avons généralisées sont encore vraies, lorsqu'on donne aux exposants fractionnaires des valeurs négatives, pourvu que l'on convienne de représenter par le symbole $a^{-\frac{p}{q}}$ l'expression $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ (89), ou, ce qui est la même chose, l'expression $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ (105).

En effet, si, pour toutes les valeurs positives, entières ou fractionnaires de m, on a toujours la formule

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

les raisonnements qui nous ont servi, dans le chapitre précédent (89 à 92), à étendre les formules aux cas où les exposants sont entiers et négatifs, s'appliquent, sans modifications, aux cas où ces exposants sont fractionnaires et négatifs.

Remarquons que la formule [2] (107) n'est vraie, quand on a $m < n$, qu'autant qu'on adopte la nouvelle convention que nous venons de faire.

Une seule généralisation reste à faire, dans le cas de l'extraction des racines. On a (109), pour toutes les valeurs positives de m et de n, entières ou fractionnaires, la formule

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}. \qquad [4]$$

Cette formule est encore vraie, quand m ou n, ou tous les deux, sont négatifs.

Supposons d'abord n négatif et égal à $-n'$, m positif, on a :

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n'}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^{n'}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^{n'}}} = \frac{1}{a^{\frac{n'}{m}}};$$

or, d'après nos conventions, cette dernière expression s'écrit :

$$a^{\frac{-n'}{m}}, \quad \text{ou} \quad a^{-n':m};$$

donc $$\sqrt[m]{a^n} = a^{-n':m} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Supposons ensuite m négatif et égal à $-m'$, n restant positif; $\sqrt[-m']{a^n}$ est une quantité x, dont la puissance $(-m')$ est égale à a^n. Ainsi

$$x^{-m'} = a^n, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x^{m'}} = a^n, \quad \text{ou} \quad x^{m'} = \frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

et, par suite, $$x = \sqrt[m']{a^{-n}} = a^{\frac{-n}{m'}} = a^{n:-m'} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Supposons enfin $m=-m'$, $n=-n'$; $\sqrt[-m']{a^{-n'}}$ est la quantité x qui, élevée à la puissance $(-m')$, reproduit $a^{-n'}$. Ainsi, l'on a :

$$x^{-m'}=a^{-n'},\quad \text{ou}\quad \frac{1}{x^{m'}}=\frac{1}{a^{n'}};\quad \text{d'où}\quad x^{m'}=a^{n'}.$$

On tire de là : $$x=\sqrt[m']{a^{n'}}=a^{\frac{n'}{m'}}=a^{\frac{-n'}{-m'}}=a^{\frac{n}{m}}.$$

En résumé, toutes nos formules pour la multiplication, la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, sont générales : elles s'étendent à toutes les valeurs positives ou négatives, entières ou fractionnaires, des exposants et des indices.

§ IV. Applications.

111. Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction. Lorsque le dénominateur d'une fraction contient un ou plusieurs radicaux, il est souvent utile, principalement au point de vue des approximations numériques, de le débarrasser de ces radicaux, de le *rendre rationnel*. Nous en donnerons quelques exemples.

1° Soit $\frac{m}{\sqrt{a}}$: on multiplie les deux termes par $\sqrt{a}$, et l'on a :

$$\frac{m}{\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{a}}{a}.$$

2° Soit $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; on multiplie les deux termes par $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; le dénominateur devient la différence de deux carrés, et l'on a :

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

3° De même : $$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

4° De même encore :

$$\frac{m}{a\pm\sqrt{b}}=\frac{m(a\mp\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

5° Soit $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; on multiplie les deux termes par

$\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$; alors, en considérant $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ comme une seule quantité, on voit que le dénominateur est encore le produit d'une somme par une différence ; et l'on a :

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-c}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b-c-2\sqrt{ab}};$$

et le dénominateur ne contenant plus qu'un seul radical, on est ramené au quatrième cas.

6° Soit $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c-\sqrt{d}}$; on considère le dénominateur comme composé de deux termes $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ et $(c-\sqrt{d})$, et l'on multiplie par leur différence. On a ainsi :

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c-\sqrt{d}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-c+\sqrt{d})}{a+b-2\sqrt{ab}-c^2-d+2c\sqrt{d}}$$
$$=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{d}-c)}{(a+b-c^2-d)-2\sqrt{ab}+2c\sqrt{d}};$$

et le dénominateur ne contenant plus que trois termes, la solution est ramenée au cinquième cas.

7° Soit maintenant $\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$. On sait que

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3.$$

On multiplie donc les deux termes par $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, et l'on a :

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}.$$

8° De même :

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

EXERCICES.

I. Simplifier l'expression

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}.$$

On trouve $$\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}.$$

II. Vérifier que la valeur

$$x=\left[-q+(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-q-(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

annule l'expression $\qquad x^3+3px+2q,$

quels que soient p et q.

III. Vérifier l'égalité

$$\left[\frac{a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=(a+b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$$

Il suffit d'élever au carré les deux membres, pour obtenir une identite.

IV. Réduire l'expression

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

On trouve $\qquad 4x\sqrt{x^2-1}.$

V. Simplifier l'expression

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^3y}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{y^4}}.$$

On trouve $\qquad \dfrac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{x+y}.$

VI. Simplifier l'expression

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

On trouve $\qquad (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$

VII. Que devient l'expression

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}},$$

quand on y fait $\qquad x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a}{b}-1}$?

Elle devient égale à l'unité.

VIII. Que devient l'expression

$$2\left(uv-\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{v^2-1}\right),$$

quand on y fait $\qquad 2u=x+\dfrac{1}{x},\quad 2v=y+\dfrac{1}{y}$?

Elle devient égale à $\qquad \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}.$

IX. Que devient, dans la même hypothèse, l'expression

$$2\left(uv+\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{v^2-1}\right)?$$

Elle devient égale à $\qquad xy+\dfrac{1}{xy}.$

X. Que devient l'expression

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}},$$

quand on y fait $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$?

Elle devient égale à $a+b$.

XI. Que devient l'expresssion

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}},$$

quand on y fait $x=\frac{2ab}{b^2+1}$?

Elle devient égale à b.

LIVRE II.

DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE I.

PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS CONSIDÉRÉES ISOLÉMENT.

§ I. Définitions.

112. Égalité. Deux quantités séparées par le signe $=$ forment une *égalité*.

113. Identité. On nomme *identité* l'expression d'une égalité qui a lieu entre deux quantités numériques, ou entre deux formules, *indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux lettres qu'elles renferment. Ainsi*

$$5=5,\ 8=7+1,$$
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$
$$a^m\times a^n=a^{m+n},$$

sont des identités.

114. Équation. On distingue plus spécialement, sous le nom d'*équation*, une *égalité qui n'a lieu que pour certaines valeurs particulières des lettres qu'elle renferme*, et qui peut, par suite, servir à la détermination de ces valeurs. Ainsi

$$3x-13=15-x$$

est une équation : elle n'a lieu que pour la valeur particulière $x=7$.

Une équation a deux *membres ;* ce sont les deux expressions séparées par le signe $=$. Le *premier* membre est à gauche, le *second* est à droite du signe.

Les lettres, dont certaines valeurs particulières transforment l'équation en identité, se nomment les *inconnues* de l'équation;

et ces valeurs particulières sont les *solutions* ou les *racines* de l'équation. On représente ordinairement les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet, x, y, z....

Résoudre une équation, c'est déterminer ses racines. On dit que les racines d'une équation *vérifient* cette équation, *satisfont* à cette équation, parce qu'elles la transforment en identité.

La résolution des équations est la partie la plus importante, et, d'après quelques auteurs, le but véritable de l'algèbre.

115. Équations équivalentes. On dit que deux équations, qui renferment les mêmes inconnues, sont *équivalentes, lorsqu'elles admettent les mêmes solutions*. On peut toujours substituer à une équation une équation équivalente.

116. Équation a une ou plusieurs inconnues. On distingue les équations d'après le nombre des inconnues qu'elles renferment : ainsi on a des équations à une inconnue x, à deux inconnues x et y, à trois inconnues x, y, z, et ainsi de suite.

117. Degré d'une équation. Lorsque les deux membres d'une équation sont des expressions rationnelles et entières par rapport aux inconnues qu'elle renferme, *le degré de l'équation est la somme des exposants des inconnues dans le terme où cette somme est la plus grande.*

Exemples. $$3x-7=8-2x$$

est une équation du *premier* degré, à *une* inconnue x.

$$4xy-3x=2-5y$$

est une équation du *second* degré, à *deux* inconnues x, y.

§ II. Principes.

118. Théorème I. *On peut ajouter une même quantité aux deux membres d'une équation, sans altérer les conditions qu'elle impose aux inconnues :* en d'autres termes, *on forme, par cette addition, une équation équivalente à la première.*

En effet, soient A et B les deux membres de cette équation,

$$A=B; \qquad [1]$$

ajoutons aux deux membres la quantité m : nous aurons :

$$A+m=B+m. \qquad [2]$$

Toute solution de l'équation [1] donne, par hypothèse, à A et à B, des valeurs numériques égales : donc si l'on ajoute à ces valeurs la valeur numérique correspondante de m, on obtient des nombres égaux. Or ces nombres sont les valeurs numériques des deux membres de l'équation [2]. Donc toute solution de l'équation [1] vérifie l'équation [2].

Réciproquement, toute solution de l'équation [2] donne à $(A+m)$ et à $(B+m)$ des valeurs numériques égales : donc si l'on retranche de ces valeurs la valeur numérique correspondante de m, les restes sont égaux : or ces restes sont les valeurs numériques de A et de B. Donc toute solution de l'équation [2] vérifie l'équation [1].

Les deux équations sont donc équivalentes.

119. Remarque. m désignant un nombre quelconque qui peut être positif ou négatif, on n'ajoute rien à la généralité de l'énoncé précédent, en disant : *on peut, sans altérer la signification d'une équation, augmenter ou diminuer les deux membres d'un même nombre.*

120. Corollaire I. Transposition des termes. *On peut toujours faire passer un terme quelconque d'une équation d'un membre dans l'autre, pourvu que l'on change son signe.*

En effet, si le nombre m est égal et de signe contraire à l'un des termes de l'équation, il le détruira ; et ce terme disparaîtra du membre où il se trouvait, pour reparaître dans l'autre avec un signe différent. Par exemple, soit l'équation

$$2+x=5-3x\,;$$

en ajoutant $(-x)$ aux deux membres, on obtient :

$$2=5-3x-x\,;$$

et le terme x est passé, comme on voit, d'un membre dans l'autre, en changeant de signe.

121. Corollaire II. *On peut changer simultanément les signes de tous les termes d'une équation.* Car cela revient à transposer tous les termes du premier membre dans le second, et tous les termes du second dans le premier. Par exemple, soit l'équation

$$3-x=15-2x;$$

transposons tous les termes ; nous aurons :

$$2x-15=x-3;$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x-3=2x-15;$$

et tous les termes ont, comme on voit, changé de signe.

122. THÉORÈME II. *On peut multiplier les deux membres d'une équation par une même quantité, sans altérer les conditions qu'elle impose aux inconnues, pourvu que la valeur numérique du multiplicateur ne soit pas nulle. On forme, par cette multiplication, une équation équivalente à la première.*

Pour le prouver, soit l'équation proposée :

$$A=B; \qquad [1]$$

multiplions les deux membres par m; nous aurons :

$$Am=Bm. \qquad [2]$$

Or toute solution de l'équation [1] donne à A et à B des valeurs numériques égales : donc si l'on multiplie ces valeurs par la valeur numérique correspondante de m, *qui n'est pas nulle*, les produits seront égaux. Or, ces produits sont les valeurs correspondantes des deux membres de l'équation [2] : donc toute solution de l'équation [1] est solution de l'équation [2].

Réciproquement, toute solution de l'équation [2] donne des valeurs égales à Am et à Bm; donc, si l'on divise ces deux nombres par la valeur correspondante de m, *qui n'est pas nulle*, les quotients sont égaux; et comme ces quotients sont les valeurs numériques de A et B, toute solution de l'équation [2] est solution de l'équation [1].

Ainsi, les deux équations sont équivalentes.

123. Puisque l'on peut multiplier les deux membres d'une équation par un nombre quelconque, *on peut aussi les diviser par un nombre quelconque;* car diviser par m, revient à multiplier par $\frac{1}{m}$. Il faut seulement que le nombre m par lequel on divise, ne soit jamais nul.

124. REMARQUE IMPORTANTE. Le principe précédent suppose essentiellement, que le multiplicateur m est différent de zéro : les équations [1] et [2] ne sont équivalentes qu'à cette condition.

Et en effet, la seconde peut, si l'on transpose tous les termes dans le premier membre, se mettre sous la forme :

$$(A - B)m = 0. \qquad [2]$$

On voit que toute solution de l'équation [1], rendant A égal à B, ou A—B égal à zéro, vérifie encore l'équation [2]. Mais la réciproque n'est plus vraie, si m peut être nul ; car alors l'équation [2] pourra être vérifiée, sans que A devienne égal à B.

Exemple. Soit l'équation

$$3 - x = 15 - 2x. \qquad [1]$$

Multiplions ses deux membres par $(x - 1)$; nous obtiendrons la nouvelle équation

$$(3 - x)(x - 1) = (15 - 2x)(x - 1). \qquad [2]$$

La solution $x = 12$, qui vérifie la première, vérifie évidemment la seconde. Mais la valeur $x = 1$, qui annule le multiplicateur $(x - 1)$, satisfait à la seconde, puisqu'elle rend nuls ses deux membre ; et cependant elle ne vérifie pas la première.

Ainsi *la multiplication des deux membres de l'équation par un facteur, contenant les inconnues, peut introduire des solutions* ÉTRANGÈRES. *Ces solutions introduites sont celles de l'équation qu'on obtiendrait, en égalant à zéro le multiplicateur*, comme on le voit dans l'exemple précédent. Par conséquent, lorsqu'on aura été obligé de multiplier les deux membres par un pareil facteur, on devra, après avoir résolu l'équation résultante, étudier les solutions obtenues, et rejeter comme étrangères celles qui annuleraient le facteur sans vérifier l'équation proposée.

Il résulte de là, qu'*en divisant les deux membres par une expression contenant les inconnues, on s'expose à supprimer une ou plusieurs solutions :* mais *les solutions ainsi supprimées sont celles de l'équation qu'on obtiendrait en égalant à zéro le diviseur*. Par conséquent, lorsqu'on aura été obligé de diviser les deux membres par une pareille expression, on devra résoudre non-seulement l'équation résultante, mais encore l'équation auxiliaire obtenue en égalant le diviseur à zéro, et étudier les solutions de cette dernière pour les rétablir, si elles ont été réellement supprimées.

Si le multiplicateur ou le diviseur m, sans contenir les inconnues, est une expression littérale, la transformation est permise ; mais il faudra éviter, dans la suite des raisonnements, les hypothèses qui rendraient cette expression égale à zéro.

125. Corollaire. Évanouissement des dénominateurs. *Lorsqu'une équation renferme des termes fractionnaires, on la ramène à la forme entière, en multipliant tous les termes par le produit des dénominateurs, ou même par le plus petit multiple commun à tous ces dénominateurs :* et l'on obtient ainsi, en général, une équation équivalente à la première. Cette règle est la conséquence évidente du Théorème II et des principes sur les fractions.

Exemple I. Soit l'équation

$$2=\frac{1}{x}+x-1+\frac{3}{x+1}; \qquad [1]$$

multiplions les deux membres par le produit $x(x+1)$; nous aurons :

$$2x(x+1)=x+1+(x-1)(x+1)x+3x,$$

ou

$$2x^2+2x=x+1+x^3-x+3x. \qquad [2]$$

Il faut remarquer, toutefois, que le facteur $x(x+1)$, égalé à zéro, donne pour solutions $x=0$, $x=-1$. Ce sont les seules solutions que la multiplication ait pu introduire. Or, elles ne vérifient l'équation [2] ni l'une ni l'autre : donc les deux équations [1] et [2] sont équivalentes.

Exemple II. Soit l'équation

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}. \qquad [1]$$

On voit qu'il suffira de multiplier les deux membres par (x^2-a^2); car ce dénominateur est divisible par les autres dénominateurs $(x+a)$ et $(x-a)$. On a ainsi :

$$x+a+x-a=1. \qquad [2]$$

Comme l'équation $x^2-a^2=0$ n'a pour solutions que $x=+a$ et $x=-a$, lesquelles ne vérifient l'équation [2] ni l'une ni l'autre, les équations [1] et [2] sont équivalentes.

Exemple III. Soit encore l'équation

$$1-\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1-x}-6: \qquad [1]$$

si l'on multiplie les deux membres par $x-1$, on a :

$$x-1-x^2=-1-6x+6. \qquad [2]$$

Cette dernière équation admet pour solutions 6 et 1 : mais le nombre 6 vérifie seul l'équation [1]; et la valeur $x=1$, qui annule le multiplicateur $(x-1)$, doit être rejetée.

126. Théorème III. *Lorsqu'on élève à une même puissance les deux membres d'une équation, on introduit, en général, des solutions étrangères.* En effet, soit l'équation

$$A=B. \qquad [1]$$

Si l'on élève les deux membres au carré, on a :

$$A^2 = B^2. \qquad [2]$$

On voit que toute solution de la première est solution de la seconde. Mais cette dernière, pouvant s'écrire sous la forme

$$A^2 - B^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (A - B)(A + B) = 0,$$

renferme à la fois les solutions des deux équations,

$$A - B = 0, \quad A + B = 0.$$

Elle est donc plus générale que la première.

De même l'équation $A^m = B^m$

peut s'écrire $A^m - B^m = 0$,

ou $(A - B)(A^{m-1} + BA^{m-2} + B^2A^{m-3} + \ldots + B^{m-1}) = 0.$

Elle admet donc, outre les solutions de l'équation [1] qui annulent le premier facteur, celles de l'équation

$$A^{m-1} + BA^{m-2} + B^2A^{m-3} + \ldots + B^{m-1} = 0,$$

qui annulent le second facteur.

Lors donc que l'on est obligé, pour résoudre une équation, d'élever ses deux membres à la même puissance, il faut, après avoir résolu l'équation résultante, étudier les solutions obtenues, et rejeter comme étrangères celles qui ne vérifieraient pas l'équation proposée. Par exemple, soit l'équation

$$\sqrt{9 - x} = x - 9. \qquad [1]$$

Si, pour résoudre, on élève les deux membres au carré, on a :

$$9 - x = x^2 - 18x + 81. \qquad [2]$$

Or, on peut reconnaître que cette dernière équation est vérifiée par $x = 9$ et par $x = 8$. Mais, si la valeur $x = 9$ convient à l'équation proposée, la valeur $x = 8$ ne convient pas, et doit être rejetée.

On se rend compte de ce résultat, en remarquant que l'équation [2] n'est pas seulement le carré de l'équation [1]; elle est aussi le carré de l'équation

$$-\sqrt{9 - x} = x - 9,$$

laquelle admet pour solution $x = 8$.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

§ I. Règle pour résoudre l'équation.

127. Exemples. Les principes, exposés dans le chapitre précédent, suffisent pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue. Donnons-en quelques exemples.

Exemple I. Soit l'équation

$$3x - \frac{4}{3} - \frac{x}{4} = \frac{5x}{21} + 2x + 13. \qquad [1]$$

On chasse d'abord les dénominateurs (125), en multipliant les deux membres par 84, qui est leur plus petit multiple commun. L'équation

$$252x - 112 - 21x = 20x + 168x + 1092 \qquad [2]$$

est équivalente à la première; car le multiplicateur est numérique (122).

On fait ensuite passer dans un membre les termes qui contiennent l'inconnue, et dans l'autre ceux qui ne la contiennent pas (120) : on obtient ainsi

$$252x - 21x - 20x - 168x = 1092 + 112,$$

ou, en réduisant les termes dans chaque membre,

$$43x = 1204, \qquad [3]$$

équation équivalente à l'équation [2], d'après le principe (118).

Enfin on divise les deux membres par 43 (122), et l'on obtient l'équation équivalente

$$x = 28. \qquad [4]$$

Or, cette dernière équation est vérifiée, quand on y remplace x par 28 : et elle n'a pas d'autre solution. Donc l'équation [1] admet la solution 28, et n'en admet pas d'autre.

On vérifie la solution en remplaçant x par 28 dans l'équation [1]; les deux membres deviennent égaux à $75\frac{2}{3}$.

Exemple II. Les coefficients peuvent être algébriques. Soit l'équation

$$\frac{(2a+b)\,b^2}{a\,(a+b)^2}x + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} = 3cx + \frac{b}{a}x - \frac{3\,abc}{a+b}. \qquad [1]$$

On multiplie tous les termes par $a\,(a+b)^3$, plus petit multiple commun des dénominateurs : l'équation nouvelle

$$\begin{aligned}(2a+b)\,b^2\,(a+b)\,x + a^3b^2 \qquad [2]\\ = 3ac\,(a+b)^3x + b\,(a+b)^3x - 3a^2bc\,(a+b)^2\end{aligned}$$

est équivalente à la première, pourvu que l'on ne fasse pas ultérieurement l'hy-

pothèse $a=0$, ou l'hypothèse $b=-a$, dont chacune annule le multiplicateur (124).

On fait passer les termes inconnus dans un membre et les termes connus dans l'autre. L'équation

$$a^3b^2+3a^2bc\,(a+b)^2$$
$$=3\,ac\,(a+b)^3x+b\,(a+b)^3\,x-(2a+b)\,b^2\,(a+b)\,x \qquad [3]$$

est équivalente à la seconde.

Puis on met x en facteur commun dans le second membre, ce qui donne :

$$a^3b^2+3a^2bc\,(a+b)^2=\{3ac\,(a+b)^3+b(a+b)^3-(2a+b)\,b^2\,(a+b)\}\,x,$$

et l'on divise les deux membres par le coefficient de x. On a ainsi une nouvelle équation :

$$x=\frac{a^3b^2+3a^2bc\,(a+b)^2}{3ac\,(a+b)^3+b\,(a+b)^3-(2a+b)\,b^2\,(a+b)}, \qquad [4]$$

qui sera équivalente aux autres, si quelque hypothèse n'annule pas le dénominateur.

Or, le numérateur est égal à $a^2b\,\{ab+3c\,(a+b)^2\}$. Les deux derniers termes du dénominateur peuvent s'écrire

$$b\,(a+b)\,\{(a+b)^2-b\,(2a+b)\},$$

ou, en réduisant, $\qquad b\,(a+b)\,a^2.$

Donc le dénominateur s'écrira :

$$3\,ac\,(a+b)^3+a^2b\,(a+b),$$

ou, en mettant $a\,(a+b)$ en facteur commun,

$$a(a+b)\,\{ab+3c\,(a+b)^2\}.$$

Donc enfin la valeur de x peut s'écrire :

$$x=\frac{a^2b\,\{ab+3c\,(a+b)^2\}}{a(a+b)\,\{ab+3c\,(a+b)^2\}}, \qquad [5]$$

ou, en supprimant les facteurs communs,

$$x=\frac{ab}{a+b}. \qquad [6]$$

Comme le dénominateur de la formule [5] devient nul, soit pour $a=0$, soit pour $b=-a$, soit pour $c=-\frac{ab}{3(a+b)^2}$, il faudra s'abstenir, dans les applications, de ces trois hypothèses.

On vérifie aisément que la solution trouvée satisfait à l'équation [1].

128. Règle générale. On conclut de ces raisonnements la règle suivante : *Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue : 1° on chasse les dénominateurs; 2° on transpose dans un membre les termes qui renferment l'inconnue, et dans l'autre ceux qui ne la contiennent pas; 3° on réduit dans chaque membre les termes semblables; 4° on divise le terme indépendant de l'inconnue*

par le coefficient de cette inconnue. Le quotient est la valeur de l'inconnue, sous la réserve des restrictions que nous avons énoncées. On vérifie d'ailleurs cette valeur, en la substituant dans l'équation proposée, qui doit se transformer en identité.

§ II. Équations qui se ramènent au premier degré.

Une équation, qui n'est pas du premier degré, peut, dans certains cas, y être ramenée, à l'aide de quelques transformations. Nous en donnerons quelques exemples.

129. L'équation est irrationnelle.

EXEMPLE I. Soit l'équation*

$$\sqrt{4+x}=4-\sqrt{x}. \qquad [1]$$

Si l'on élève les deux membres au carré, il vient :

$$4+x=16-8\sqrt{x}+x, \qquad [2]$$

ou, en faisant passer les termes inconnus à gauche, les autres à droite, et supprimant ceux qui se détruisent,

$$8\sqrt{x}=12, \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{x}=3. \qquad [3]$$

Élevant encore au carré, on a :

$$[4] \qquad 4x=9, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{9}{4}. \qquad [5]$$

Comme toute solution de l'équation [1] vérifie toutes les suivantes, qui en sont des conséquences, et que l'équation [5] n'admet que la solution $x=\frac{9}{4}$, il est clair que l'équation [1] n'en saurait admettre d'autre. Mais il n'est pas certain que cette valeur satisfait effectivement à cette équation: car on a, par deux fois, élevé l'équation au carré, opération qui peut introduire des solutions étrangères (126). Il est donc nécessaire de vérifier la solution trouvée par une substitution directe. Or, en remplaçant x par $\frac{9}{4}$, le premier membre de l'équation [1] devient :

$$\sqrt{4+x}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2},$$

et le second

$$4-\sqrt{x}=4-\sqrt{\frac{9}{4}}=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

La vérification réussit donc; mais elle était indispensable.

---

* Dans cette équation, $\sqrt{4+x}$ et $\sqrt{x}$ désignent des nombres *positifs :* nous laissons de côté, pour le moment, la double valeur qu'on peut leur attribuer Il en sera de même dans le reste de ce chapitre.

EXEMPLE II. Soit encore l'équation

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1. \qquad [1]$$

Pour faire disparaître un des radicaux, on l'*isole* dans un membre, en écrivant

$$\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=\sqrt{x}-1, \qquad [2]$$

et l'on élève au carré les deux membres; il vient :

$$x-\sqrt{1-x}=x-2\sqrt{x}+1, \qquad [3]$$

ou, simplifiant et changeant les signes,

$$\sqrt{1-x}=2\sqrt{x}-1. \qquad [4]$$

Élevant de nouveau au carré, on a :

$$1-x=4x-4\sqrt{x}+1, \qquad [5]$$

ou, simplifiant et transposant,

$$4\sqrt{x}=5x. \qquad [6]$$

Élevant au carré pour la troisième fois, nous avons :

$$16x=25x^2, \qquad [7]$$

équation que l'on peut écrire, en mettant tous les termes dans le premier membre,

$$x(16-25x)=0. \qquad [8]$$

Pour qu'un produit de deux facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul. Les solutions de l'équation [8] sont donc :

$$x=0, \quad x=\frac{16}{25}.$$

L'équation [1] n'admet pas d'autres solutions que celles-là. Pour savoir si elle les admet effectivement, faisons la substitution directe. La valeur $x=0$ donne : $-\sqrt{-1}=1$, ce qui ne signifie rien ; et la valeur $x=\frac{16}{25}$ donne :

$$\sqrt{\frac{16}{25}}-\sqrt{\frac{16}{25}-\sqrt{\frac{9}{25}}}=1,$$

ou, réduisant,

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=1,$$

ce qui n'est pas vrai. Ainsi aucune des deux solutions ne convient à l'équation [1].

Il est facile de voir que la valeur $x=0$ vérifie l'équation

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1;$$

que la valeur $x=\frac{16}{25}$ vérifie l'équation

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1;$$

et que ces équations conduisent toutes deux à la même équation [7], en suivant la même marche que pour l'équation proposée.

130. L'équation ne renferme l'inconnue qu'à une certaine puissance; alors elle peut être considérée comme étant du premier degré, si l'on prend cette puissance pour l'inconnue.

Exemple III. Soit l'équation

$$\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b. \quad [1]$$

On multiplie les deux membres par le produit $(1+2x)(1-2x)$, ou par $(1-4x^2)$; il vient :

$$a(1-2x)+a(1+2x)=2b(1-4x^2), \quad [2]$$

ou, effectuant les multiplications, et supprimant les termes qui se détruisent,

$$2a=2b-8bx^2. \quad [3]$$

Si l'on considère x^2 comme l'inconnue, cette équation est du premier degré, et on en tire :

$$x^2=\frac{b-a}{4b}, \quad x=\sqrt{\frac{b-a}{4b}}. \quad [4]$$

131. L'équation ne renferme l'inconnue que sous un radical; elle est du premier degré, si l'on prend ce radical pour inconnue.

Exemple IV. Soit l'équation

$$\frac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b}-\frac{\sqrt{ax}-b}{c}=c. \quad [1]$$

Comme le numérateur de la première fraction est divisible par son dénominateur, l'équation peut s'écrire :

$$\sqrt{ax}-b-\frac{\sqrt{ax}-b}{c}=c, \quad [2]$$

ou, en chassant le dénominateur,

$$c\sqrt{ax}-cb-\sqrt{ax}+b=c^2, \quad [3]$$

équation du premier degré, si l'on prend pour inconnue le radical $\sqrt{ax}$. On a, en transposant les termes :

$$(c-1)\sqrt{ax}=c^2+cb-b; \quad [4]$$

et par suite,

$$\sqrt{ax}=\frac{c^2+cb-b}{c-1}=b+\frac{c^2}{c-1}. \quad [5]$$

Élevant cette équation au carré, et divisant par a, on a:

$$x=\frac{1}{a}\left(b+\frac{c^2}{c-1}\right)^2. \quad [6]$$

§ III. Solution de quelques problèmes.

Nous donnerons, dès à présent, quelques exemples de l'utilité des équations dans la solution des problèmes.

132. Problème I. *Trouver l'escompte en dedans d'un billet de* 1500 *fr. payable dans* 5 *mois, le taux de l'intérêt étant* 6 *pour* 100 *par an.*

L'escompte en dedans d'un billet est l'intérêt de sa valeur actuelle. Désignons cet escompte par x; on remettra au porteur $1500-x$; et il faudra que cette somme, placée à 6 pour 100 pendant 5 mois, rapporte un intérêt x. Or, 100 fr., rapportant 6 fr. en 1 an, rapportent en 1 mois $0^f,50$, et en 5 mois $2^f,50$; 1 fr., dans le même temps, rapporte donc $0^f,025$; et $(1500-x)$ rapportent $0^f,025\times(1500-x)$. On doit donc avoir l'équation

$$(1500-x)\times 0,025=x,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$1500\times 0,025-0,025x=x,$$

équation du premier degré, d'où l'on tire

$$x=\frac{1500\times 0,025}{1,025}=36,585\ldots.$$

On remettra au porteur du billet l'excès de 1500 fr. sur l'escompte, ou $1463^f,41$.

133. Problème II. *On a deux lingots d'argent, dont les titres sont* 0,775 *et* 0,940; *quel poids doit-on prendre de chacun d'eux pour former* 25 *grammes d'alliage, au titre de* 0,900 ?

Soit x le nombre de grammes que l'on doit prendre dans le premier lingot : $(25-x)$ sera le poids que l'on devra prendre dans le second.

Le poids de l'argent contenu dans x grammes du premier lingot est $x\times 0,775$.

Le poids de l'argent contenu dans $(25-x)$ grammes du second lingot est $(25-x)\times 0,940$.

La quantité totale d'argent contenue dans l'alliage est donc

$$x\times 0,775+(25-x)\times 0,940.$$

D'un autre côté, puisque le titre de l'alliage est 0,900, la quantité totale d'argent que les 25 grammes d'alliage contiennent doit être égale à $25\times 0,900$; on doit donc avoir

$$x\times 0,775+(25-x)\times 0,940=25\times 0,900,$$

équation du premier degré, dont on déduira $x=6^{gr},0606$.

Donc on doit prendre :

du premier lingot............... $6^{gr},0606$,

du second lingot............... $18^{gr},9394$

134. Problème III. *Paris et Rouen sont distants de* 137 *kilomètres. Le charbon coûte à Paris* $4^f,25$ *les* 100 *kilogrammes, et à Rouen* $4^f,75$; *les frais de transport étant, par tonne et par kilomètre, de* $0^f.09$, *quel est le point du chemin*

pour lequel il y a avantage égal à faire venir le charbon de l'une ou de l'autre ville ?

Soit x la distance du point cherché à Paris; $(137-x)$ sera sa distance à Rouen.

Une tonne de charbon achetée à Paris coûte $42^{f},50$.

Les frais de transport de cette tonne à la distance x sont $x \times 0,09$.

Le prix de revient d'une tonne achetée à Paris est donc

$$42,50 + x \times 0,09.$$

Une tonne achetée à Rouen, et transportée à la distance $(137-x)$, coûtera de même

$$47,50 + (137-x) \times 0,09.$$

On aura donc

$$42,50 + x \times 0,09 = 47,50 + (137-x) \times 0,09,$$

équation du premier degré, d'où l'on tirera

$$x = 96^{k},2777\ldots;$$

donc, distance de Paris au point cherché....	$96^{k},278$,
distance de Rouen.........................	$40^{k},722$,
prix de la tonne..........................	$51^{f},16^{c}\,\frac{1}{2}$.

135. Remarque sur la mise en équation des problèmes. *Mettre un problème en équation*, c'est exprimer, par une ou plusieurs équations, les conditions imposées par son énoncé aux quantités inconnues. Il est impossible de donner, pour y arriver, une règle complétement générale. Nous nous bornerons, pour le moment, à l'indication suivante.

En examinant avec soin l'énoncé d'un problème, on verra presque toujours qu'il s'agit, pour le résoudre, de rendre certaines quantités égales entre elles. Après avoir reconnu quelles sont ces quantités, on cherchera les formules qui en expriment les valeurs; et, en égalant ces formules, on obtiendra les équations demandées. Reprenons, par exemple, les trois problèmes traités plus haut.

Problème I. Trouver l'escompte de 1500 fr. payables dans cinq mois, c'est trouver une somme qui, placée pendant cinq mois et augmentée de ses intérêts pendant ce temps, devienne *égale* à 1500 fr.

Problème II. Allier de l'argent à 0,775 avec de l'argent à 0,940, de manière à former 25 grammes d'alliage à 0,900; c'est faire en sorte que la quantité totale d'argent contenue dans les 25 grammes d'alliage soit *égale* à $0,900 \times 25$.

Problème III. Il faut faire en sorte que le prix d'une tonne de charbon, transportée de Paris au point cherché, soit *égal* au prix d'une tonne, transportée de Rouen au même point.

Remarque. Dans presque tous les problèmes relatifs à des nombres, la mise en équation n'est, pour ainsi dire, que la traduction, dans la langue algébrique, de l'énoncé proposé en langage ordinaire. Il peut arriver cependant, que l'énoncé ne paraisse pas pouvoir immédiatement se traduire en *formule;* mais, en s'attachant au sens plutôt qu'aux paroles, on ne trouvera presque jamais de difficulté sérieuse. Nous reviendrons sur la mise en équation, quand nous nous occuperons spécialement des problèmes du premier degré.

EXERCICES.

I. Résoudre l'équation

$$\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}.$$

On trouve $x=\frac{7}{8}$.

II. Résoudre l'équation

$$\frac{6-5x}{15}-\frac{7-2x^2}{14(x-1)}=\frac{3x+1}{21}-\frac{10x-11}{30}+\frac{1}{105}.$$

On trouve $x=4$.

III. Résoudre $\frac{x}{2}-\frac{4(2x-3)-3(3x-1)}{6(x-1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2+2}{3x-2}\right)$.

On trouve $x=\frac{13}{3}$, et $x=0$.

IV. Résoudre $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-$

On trouve $x=\frac{5}{4}$ et $x=0$.

Cette dernière valeur ne convient pas.

V. Résoudre $\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$

On trouve $x=-\frac{2a}{3}$,

valeur qui ne convient pas.

VI. Résoudre
$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}.$$

On trouve
$$x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}.$$

VII. Résoudre
$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}.$$

On trouve
$$x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}.$$

VIII. Résoudre
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{x^4}}}.$$

On trouve
$$x=-\frac{4a}{3},$$

valeur qui ne convient pas.

IX. Résoudre
$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

On trouve
$$x=\frac{25}{16},\ \text{et}\ x=0.$$

X. Résoudre
$$2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

On trouve
$$x=\frac{3a}{4}.$$

XI. Résoudre
$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\frac{\sqrt[n]{x}}{c}.$$

On trouve
$$x=\frac{a}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}.$$

XII. Résoudre l'équation
$$\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}}.$$

On trouve $x=-a$, $x=0$ et $x=\frac{64a}{1025}$,

Les deux dernières ne conviennent pas.

XIII. Résoudre l'équation
$$\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt[4]{1-a^2}.$$

On trouve
$$x=a.$$

CHAPITRE III.

PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES.

§ I. Définitions.

136. Systèmes d'équations. On entend par *système d'équations*, l'ensemble de plusieurs équations qui doivent être satisfaites à la fois. Si chaque équation ne contenait qu'une seule inconnue, on la résoudrait isolément d'après la méthode du chapitre précédent; et il y aurait autant de problèmes distincts que d'équations à résoudre. Mais lorsque les inconnues entrent à la fois dans plusieurs équations, la question devient plus difficile.

On nomme *solution* du système tout système de valeurs, qui, mises à la place des inconnues, transforment les équations en identités.

137. Systèmes équivalents. On dit que deux systèmes d'équations, qui renferment les mêmes inconnues, sont *équivalents*, lorsque les valeurs des inconnues qui satisfont à l'un et à l'autre sont absolument les mêmes; ou, en d'autres termes, lorsque les équations de chacun des systèmes entraînent celles de l'autre.

Lorsque deux systèmes sont équivalents, on peut les substituer l'un à l'autre.

§ II. Principes.

138. Théorème I. *Étant donné un système d'équations, on peut substituer à l'une quelconque d'entre elles l'équation obtenue en ajoutant membre à membre les équations proposées.* Ainsi les systèmes

$$[1]\begin{cases} A=A', \\ B=B', \\ C=C', \\ D=D', \end{cases} \qquad [2]\begin{cases} A+B+C+D=A'+B'+C'+D', & [\alpha] \\ B=B', \\ C=C', \\ D=D', \end{cases}$$

sont équivalents.

En effet, toute solution du système [1] donne, par hypothèse, des valeurs numériques égales aux deux membres de chacune

des équations de ce système : donc elle rend égaux aussi les deux membres de l'équation [α] ; donc elle vérifie le système [2]. Réciproquement, toute solution du système [2] rendant égales les valeurs numériques de B et de B′, celles de C et de C′, celles de D et de D′, rend égales celles de $B+C+D$ et de $B'+C'+D'$; et comme elle vérifie, par hypothèse, l'équation [α], il faut qu'elle rende égales les valeurs numériques de A et de A′. Donc elle vérifie le système [1].

139. Remarques. La démonstration précédente est indépendante du nombre des équations.

On peut n'ajouter les unes aux autres qu'une partie des équations qui composent un système : l'équation résultante remplace l'une quelconque de celles qui ont servi à la former.

On a le droit, avant d'ajouter les équations membre à membre, de multiplier chacune d'elles par un nombre quelconque; car cette opération (**122**) n'altère pas les conditions qu'elles imposent aux inconnues.

Il va sans dire que l'on peut, dans l'application du théorème, soustraire membre à membre certaines équations, au lieu de les additionner.

140. Théorème II. *Lorsque l'une des équations d'un système est résolue par rapport à une inconnue, on peut remplacer cette inconnue par sa valeur dans les autres équations : on ramène ainsi le système à un autre, ayant une inconnue et une équation de moins.*

Ainsi le système

$$\begin{cases} x=A, \\ B=B', \\ C=C', \\ D=D', \end{cases} \qquad [1]$$

dans lequel B, B′, C, C′, D, D′ renferment toutes les inconnues d'une manière quelconque, et où A peut renfermer toutes les inconnues à l'exception de x, est équivalent au système

$$\begin{cases} x=A, \\ B_1=B'_1, \\ C_1=C'_1, \\ D_1=D'_1. \end{cases} \qquad [2]$$

dans lequel B_1, B'_1, C_1, C'_1, D_1, D'_1, sont les expressions obtenues en remplaçant x par A dans B, B', C, C', D, D'.

En effet, toute solution du système [1] rendant égales, par hypothèse, les valeurs numériques de x et de A, il est permis de remplacer x par A dans les équations suivantes : or les résultats égaux, que l'on obtient ainsi, sont les valeurs numériques des membres des équations du système [2]. Donc ce dernier système est vérifié par la solution du premier. Réciproquement, toute solution du système [2] rendant x égal à A, il est permis de remplacer A par x dans les équations suivantes, ce qui ramène au système [1].

Les deux systèmes sont donc équivalents.

Cette démonstration est indépendante du nombre des équations.

141. Élimination. Lorsque, dans les équations $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$, on remplace x par A, cette inconnue disparaît des équations. On dit alors qu'elle est *éliminée*. En général, *éliminer* une inconnue entre m équations, c'est remplacer le système proposé par un système équivalent, dans lequel $(m-1)$ équations ne contiennent pas cette inconnue.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ENTRE UN NOMBRE ÉGAL D'INCONNUES.

142. On peut, en général, déterminer les valeurs d'un nombre quelconque d'inconnues, lorsqu'on connaît entre elles un nombre égal d'équations du premier degré. Nous allons, dans ce chapitre, exposer les méthodes qui fournissent les solutions, en commençant par le cas le plus simple, celui de deux équations à deux inconnues.

§ 1. Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

143. Forme générale de l'équation du premier degré a deux inconnues. Si l'on désigne les deux inconnues par x et y, une équation du premier degré ne peut renfermer que trois sortes de termes : 1° des termes du premier degré en x; 2° des termes du premier degré en y; 3° des termes tout connus. Or on peut toujours faire passer dans l'un des membres tous les termes qui contiennent soit x, soit y, et y réunir, par l'addition des coefficients, tous ceux qui renferment la même inconnue. Si l'on fait de même passer dans l'autre membre tous les termes connus, et qu'on les réunisse en un seul, l'équation prendra la forme

$$ax+by=c,$$

a, b, c désignant des nombres connus. C'est sous cette forme que nous mettrons les équations que nous aurons à résoudre.

144. 1er Cas. Il peut arriver que l'une des équations ne renferme que l'une des inconnues. Soit, par exemple, le système

$$\left.\begin{aligned} 3x+7y&=79, \quad [1] \\ 8x&=80. \quad [2] \end{aligned}\right\}$$

L'équation [2], qui ne renferme que x, fournit immédiatement (**128**) sa valeur, $x=10$. Si l'on substitue cette valeur dans l'équation [1], elle devient

$$30+7y=79.$$

Et comme elle ne contient plus alors que l'inconnue y, elle en fournit (**128**) aussi la valeur, $y=7$.

Ces deux valeurs, $x=10$, $y=7$, vérifient évidemment le système. D'ailleurs il ne saurait exister d'autre solution; car l'équation [2] n'admet que la solution $x=10$; et pour cette valeur, l'équation [1] n'est vérifiée que par $y=7$.

Ainsi, pour résoudre le système, dans ce cas particulier, *on résout celle des équations qui ne renferme qu'une des inconnues, on substitue dans l'autre équation la valeur trouvée pour cette inconnue, et l'on résout l'équation résultante qui fournit l'autre inconnue.*

145. 2° Cas. Les deux équations renferment les deux inconnues. On ramène ce cas au précédent, en éliminant l'une des inconnues entre les deux équations (**141**). On peut employer plusieurs procédés pour opérer cette élimination.

Méthode par substitution. Soient les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} 7x+3y&=47, \quad [1] \\ 6x-5y&=10. \quad [2] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On peut (**118, 122**) remplacer l'équation [1] par l'équation

$$y=\frac{47-7x}{3},$$

qu'on obtient en faisant passer $7x$ dans le second membre, et en divisant ensuite les deux membres par 3 : c'est ce qu'on appelle, *résoudre l'équation par rapport à* y. Le système (1) est ainsi remplacé par le système équivalent :

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{47-7x}{3}, \quad [1] \\ 6x-5y&=10. \quad [2] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

On peut maintenant (**140**) remplacer y par $\frac{47-7x}{3}$ dans l'équation [2]; et l'on obtient le système équivalent :

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{47-7x}{3}, \quad [3] \\ 6x-\frac{5(47-7x)}{3}&=10. \quad [4] \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Et l'équation [4] ne renfermant plus que l'inconnue x, on est ramené au premier cas. On résout donc cette équation : elle donne

$$18x-235+35x=30;$$

d'où l'on tire (**128**), $x=5$. Et cette valeur, substituée dans l'équation [3], donne $y=4$. Ces deux valeurs, $x=5, y=4$, formant la solution unique du système (3), fournissent la solution unique du système équivalent (1).

La méthode est générale, et conduit à la règle suivante : *On résout l'une des équations par rapport à l'une des inconnues, et l'on*

SUBSTITUE *sa valeur dans l'autre équation. Comme cette dernière ne renferme plus alors que l'autre inconnue, on la résout, et on obtient la valeur de cette inconnue. Puis on substitue cette valeur dans l'expression de la première inconnue, opération qui fournit la valeur de celle-ci.*

146. MÉTHODE PAR ADDITION ET SOUSTRACTION. Reprenons le système :

$$\left.\begin{aligned} 7x+3y&=47, \quad [1] \\ 6x-5y&=10. \quad [2] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On peut toujours rendre égaux les coefficients d'une même inconnue dans les deux équations; il suffit, pour cela, de multiplier les deux membres de chacune par le coefficient dont cette inconnue est affectée dans l'autre. Ainsi, en multipliant la première équation par 5 et la seconde par 3, on obtient (**122**) le système équivalent :

$$\left.\begin{aligned} 35x+15y&=235, \quad [3] \\ 18x-15y&=30. \quad [4] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les deux coefficients de y étant alors égaux et de signes contraires, on éliminera cette inconnue en ajoutant les deux équations. On obtiendra ainsi une équation

$$53x=265, \qquad [5]$$

qui, combinée avec l'une des équations (2) ou avec l'une des équations (1), formera un système (3) équivalent au premier.

On sera ainsi ramené au premier cas (**144**). On tirera de [5] $x=5$; et substituant cette valeur dans l'une des équations, dans l'équation [1], par exemple, on obtiendra la valeur, $y=4$.

La méthode est générale, et conduit à la règle suivante : *On multiplie chacune des équations par le coefficient dont l'une des inconnues est affectée dans l'autre; on* AJOUTE *alors l'une à l'autre, ou l'on* RETRANCHE *l'une de l'autre les deux équations résultantes, suivant que les coefficients égaux de l'inconnue considérée sont de signes contraires ou de même signe. On obtient ainsi une équation à une inconnue, qui fournit la valeur de cette inconnue. En substituant cette valeur dans l'une des équations proposées, on en tire la valeur de l'autre inconnue.*

147. REMARQUE. Si les coefficients que l'on veut rendre égaux

ne sont pas premiers entre eux, *on peut prendre pour coefficient commun leur plus petit multiple commun :* il suffit, pour cela, de diviser ce plus petit multiple par chacun des coefficients de l'inconnue à éliminer, et de multiplier chaque équation par le quotient correspondant. Soit, par exemple, le système

$$\left.\begin{aligned} 36x+\ 7y&=323,\\ 54x-11y&=377.\end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Le plus petit multiple commun à 36 et à 54 est 108 : les quotients de 108 par 36 et 54 sont 3 et 2. On multiplie donc la première équation par 3, et la seconde par 2; et l'on a le système équivalent :

$$\left.\begin{aligned} 108x+21y&=969,\\ 108x-22y&=754;\end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

comme les coefficients de x ont le même signe, on retranche la seconde équation de la première ; ce qui donne :

$$43y=215;$$

d'où $y=5$; et, par suite, $x=8$.

148. Autre remarque. Lorsque l'on a trouvé, par la méthode précédente, la valeur d'une des inconnues, *on peut chercher directement la valeur de l'autre inconnue par la même méthode*, au lieu de la déduire d'une substitution.

Ainsi, dans l'exemple précédent, pour obtenir x, on multipliera la première équation par 11 et la seconde par 7; ce qui donnera :

$$\left\{\begin{aligned} 396x+77y&=3553,\\ 378x-77y&=2639;\end{aligned}\right.$$

et, en ajoutant les deux résultats, on trouvera,

$$774x=6192;$$

d'où l'on tirera : $\qquad x=8.$

Cette valeur de x ne peut différer de celle qu'a fournie la substitution : car, d'après les raisonnements précédents, le système [1] est équivalent à l'un quelconque des deux systèmes,

$$[3] \quad \left\{\begin{aligned} y&=5,\\ 36x+7y&=323,\end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} x&=8,\\ 36x+7y&=323;\end{aligned}\right\} \quad [4]$$

or chacun de ces derniers ne fournit qu'une solution : il est donc nécessaire que cette solution soit la même pour ces deux systèmes.

149. Corollaire. On voit qu'en général un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admet une solution *unique et déterminée.*

§ II. Résolution d'un système de trois équations à trois inconnues.

150. Règle. *Pour résoudre un système* (1) *de trois équations à trois inconnues* x, y, z, *on élimine l'une des inconnues,* z *par exemple, d'abord entre deux des trois équations, puis entre la dernière et l'une des deux autres :* on emploie, pour cela, soit la méthode par substitution (**145**), soit la méthode par addition et soustraction (**146**). *On obtient ainsi deux équations à deux inconnues* x *et* y, *qui combinées avec l'une des équations proposées, forment un système* (2) *équivalent au premier :* les raisonnements, pour le prouver, sont ceux que nous avons employés dans le paragraphe précédent. *On résout le système des deux équations en* x *et* y ; *et substituant les valeurs trouvées pour ces inconnues dans l'une des équations proposées, on obtient la valeur de* z.

151. Exemple I. Soit d'abord à résoudre le système

$$\left\{\begin{aligned} 3x+2y+4z&=19,\\ 2x+5y+3z&=21,\\ 3x-\ y+\ z&=\ 4.\end{aligned}\right.$$

Pour appliquer la méthode précédente, nous devons, par exemple, déduire de l'une des équations la valeur d'une inconnue, et la substituer dans les deux autres. Comme on peut choisir l'une quelconque des trois inconnues, et la déduire de l'une quelconque des trois équations, il y a neuf manières de commencer le calcul ; on voit que la plus simple, dans l'exemple proposé, consiste à prendre la valeur de y dans la troisième équation, parce que l'on n'introduit pas ainsi de dénominateur. On obtient :

$$y=3x+z-4;$$

et, par *substitution* de cette expression, les deux premières équations deviennent :

$$\left\{\begin{aligned} 3x+2(3x+z-4)+4z&=19,\\ 2x+5(3x+z-4)+3z&=21;\end{aligned}\right.$$

ou, en réduisant,

$$\left\{\begin{aligned} 9x+6z&=27,\\ 17x+8z&=41.\end{aligned}\right.$$

Ces équations, résolues par les méthodes exposées (**145**, **146**), donnent

$$x=1,\ z=3.$$

Puis ces valeurs, substituées dans l'expression de y,

$$y=3x+z-4,$$

donnent $$y=2;$$
et la solution cherchée est, par conséquent,
$$x=1,\ y=2,\ z=3.$$

EXEMPLE II. Soit encore à résoudre le système d'équations :
$$\begin{cases} a^3+a^2x+ay+z=0, \\ b^3+b^2x+by+z=0, \\ c^3+c^2x+cy+z=0; \end{cases}$$
nous appliquerons la seconde méthode (**146**). Comme z n'a pas de coefficient, nous retrancherons successivement la première équation de chacune des deux autres; et nous obtiendrons les deux équations nouvelles, indépendantes de z,
$$\begin{cases} b^3-a^3+(b^2-a^2)x+(b-a)y=0, \\ c^3-a^3+(c^2-a^2)x+(c-a)y=0. \end{cases}$$
Or la première de ces équations est divisible par $(b-a)$, la seconde par $(c-a)$; si l'on supprime ces facteurs, elles deviennent :
$$\begin{cases} b^2+ab+a^2+(b+a)x+y=0, \\ c^2+ac+a^2+(c+a)x+y=0. \end{cases}$$
Pour les résoudre, on peut procéder de la même manière, et soustraire la première de la seconde; on obtient ainsi :
$$c^2-b^2+a(c-b)+(c-b)x=0;$$
ou, en divisant par $(c-b)$,
$$c+b+a+x=0.$$
De là on tire : $$x=-a-b-c,$$
et, par suite,
$$y=-b^2-ab-a^2-(b+a)x=ab+ac+bc.$$
Enfin ces valeurs de x et y, substituées dans l'expression
$$z=-a^3-a^2x-ay,$$
donnent
$$z=-a^3+a^2(a+b+c)-a(ab+ac+bc)=-abc.$$

§ III. Résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré.

152. RÈGLE GÉNÉRALE. *Pour résoudre un nombre quelconque d'équations renfermant un nombre égal d'inconnues, on peut déduire de l'une d'elles la valeur d'une inconnue, et* SUBSTITUER (**140**) *cette valeur dans toutes les autres : celles-ci contiennent alors une inconnue de moins; et, en complétant leur système par l'équation qui fournit l'expression de la première inconnue, on obtient un système équivalent au système proposé.*

On peut aussi éliminer l'inconnue entre l'une des équations et toutes les autres, par la méthode d'addition et de soustraction (**146**):

on obtient encore un système équivalent (138), *en joignant à l'ensemble des équations nouvelles l'équation dont on s'est servi pour faire disparaître cette inconnue.*

Dans tous les cas, la résolution d'un système de n *équations à* n *inconnues est ramenée ainsi à la résolution de* (n — 1) *équations à* (n — 1) *inconnues. La résolution de ces dernières se ramènera de même à celle de* (n — 2) *équations à* (n — 2) *inconnues; et, en continuant ainsi, on sera conduit à une équation ne contenant qu'une inconnue.*

Le système équivalent au système proposé renfermera alors n *équations, ainsi composées : la dernière ne renfermera qu'une inconnue, la* (n — 1)^{me} *renfermera cette inconnue et une autre, la* (n — 2)^{me} *contiendra ces deux inconnues et une troisième....; enfin la première contiendra toutes les inconnues. Et il est évident qu'on pourra résoudre successivement toutes ces équations en commençant par la dernière et en remontant jusqu'à la première, et qu'on obtiendra ainsi les valeurs de toutes les inconnues.*

153. Exemple. Soit le système

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z+4v&=30,\\ 2x-3y+5z-2v&=\ 3,\\ 3x+4y-2z-\ v&=\ 1,\\ 4x-\ y+6z-3v&=\ 8. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

La première équation, résolue par rapport à x, donne:

$$x=30-2y-3z-4v;$$

et, en substituant cette valeur dans les trois autres, on trouve:

$$\left.\begin{aligned} 7y+\ \ z+10v&=\ 57,\\ 2y+11z+13v&=\ 89,\\ 9y+\ 6z+19v&=112. \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

De même, la première des équations [2], résolue par rapport à z, donne:

$$z=57-7y-10v;$$

et, en substituant cette valeur dans les deux autres, on a:

$$\left.\begin{aligned} 75y+97v&=538,\\ 33y+41v&=230. \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

On tire de la dernière $\qquad y=\dfrac{230-41v}{33},$

et substituant cette valeur dans la précédente, on a:

$$126v=504. \qquad [4]$$

Ainsi le système équivalent au système proposé est formé par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} &x=30-2y-3z-4v,\\ &z=57-7y-10v,\\ &y=\frac{230-41v}{33},\\ &126v=504. \end{aligned}\right. \qquad [5]$$

Or la dernière de ces équations donne $v=4$. Cette valeur, substituée dans la précédente, donne $y=2$. Ces deux valeurs, substituées dans la seconde, donnent $z=3$. Et enfin ces trois valeurs, substituées dans la première, donnent $x=1$. Ainsi la solution est $x=1$, $y=2$, $z=3$, $v=4$.

154. Méthode de Bezout. On résout aussi les équations du premier degré par une autre méthode, dite des *coefficients indéterminés*, dont l'emploi est souvent plus commode.

Soient n équations du premier degré à n inconnues,

$$\left.\begin{aligned} &ax+by+cz+\ldots &&=k,\\ &a_1x+b_1y+c_1z+\ldots &&=k_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n-1}x+b_{n-1}y+c_{n-1}z+\ldots &&=k_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Ajoutons ces équations, membre à membre, après les avoir multipliées respectivement, à l'exception de la première, par des nombres indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$; il viendra :

$$[2]\quad x(a+a_1\lambda_1+\ldots+a_{n-1}\lambda_{n-1})+y(b+b_1\lambda_1+\ldots+b_{n-1}\lambda_{n-1})$$
$$+z(c+c_1\lambda_1+\ldots+c_{n-1}\lambda_{n-1})+\ldots=k+k_1\lambda_1+\ldots+k_{n-1}\lambda_{n-1};$$

et cette nouvelle équation peut (139) remplacer une des proposées, *quels que soient les nombres* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$.

Or nous pouvons déterminer ces nombres, de manière que les coefficients des inconnues y, z,... soient nuls, c'est-à-dire que les équations,

$$\left.\begin{aligned} &b+b_1\lambda_1+\ldots+b_{n-1}\lambda_{n-1}=0,\\ &c+c_1\lambda_1+\ldots+c_{n-1}\lambda_{n-1}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

soient satisfaites ; car il suffira, pour cela, de résoudre $(n-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues.

On résoudra donc le système [3].

Si l'on substitue alors dans l'équation [2] les valeurs trouvées

pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$, cette équation ne contiendra plus que la seule inconnue x; car elle se réduira à

$$x(a+a_1\lambda_1+\ldots a_{n-1}\lambda_{n-1})=k+k_1\lambda_1+\ldots+k_{n-1}\lambda_{n-1}:$$

elle permettra donc d'en déterminer la valeur, qui sera :

$$x=\frac{k+k_1\lambda_1+\ldots+k_{n-1}\lambda_{n-1}}{a+a_1\lambda_1+\ldots+a_{n-1}\lambda_{n-1}};$$

x étant connu, le système ne contiendra plus que $(n-1)$ inconnues.

La méthode que nous venons d'indiquer permet, comme on voit, de résoudre n équations à n inconnues, pourvu que l'on sache résoudre un système contenant une inconnue de moins.

Comme nous savons résoudre deux équations à deux inconnues, nous pouvons, d'après cela, résoudre un système de trois équations à trois inconnues; partant, un système de quatre équations à quatre inconnues, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi, quel que soit le nombre des équations proposées, la valeur de chaque inconnue.

155. Modification a la méthode. La méthode des *multiplicateurs* permet, d'ailleurs, d'obtenir directement chaque inconnue, sans calculer aucune des autres. Il suffit, pour cela, de procéder pour chacune, comme on l'a fait pour x. Si l'on veut obtenir y, par exemple, on égalera à zéro les coefficients des $(n-1)$ autres inconnues; on trouvera, en résolvant ces $(n-1)$ équations, de nouvelles valeurs pour les indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$; et, en substituant ces valeurs dans l'équation [2], on obtiendra une équation en y, qui permettra d'en déterminer la valeur.

Les valeurs que l'on obtient par ce procédé pour x, y, z,.. ne peuvent différer de celles qu'a fournies le premier. En effet, l'équation [2] doit être vérifiée, quels que soient les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$; il est donc permis d'y faire les hypothèses qui annulent tous les coefficients moins un. Le second procédé fournit donc la solution demandée : et comme cette solution est unique, il faut qu'elle soit la même que celle qu'on a obtenue par le procédé primitif.

156. Exemple. Appliquons cette méthode à la résolution du système:

$$\left.\begin{aligned} 3x-4y+5z&=9,\\ 7x+2y-10z&=18,\\ 5x-6y-15z&=6. \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

On multiplie la deuxième équation par λ_1, la troisième par λ_2, et l'on ajoute les produits à la première; on a ainsi :

$$(3+7\lambda_1+5\lambda_2)\,x+(-4+2\lambda_1-6\lambda_2)\,y+(5-10\lambda_1-15\lambda_2)\,z$$
$$=9+18\lambda_1+6\lambda_2. \qquad [2]$$

Pour obtenir x, on égale à zéro les coefficients de y et de z; ce qui donne :

$$\begin{cases} -4+\ 2\lambda_1-\ 6\lambda_2=0, \\ \ 5-10\lambda_1-15\lambda_2=0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda_1-3\lambda_2=2, \\ 2\lambda_1+3\lambda_2=1. \end{cases}$$

En résolvant ces deux équations, on trouve $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-\frac{1}{3}$. On substitue ces valeurs dans l'équation [2]; elle devient :

$$\left(3+7-\frac{5}{3}\right)x=9+18-2; \quad \text{d'où} \quad x=3.$$

Pour obtenir y, on annule les coefficients de x et de z; on a ainsi :

$$\begin{cases} 3+\ 7\lambda_1+\ 5\lambda_2=0, \\ 5-10\lambda_1-15\lambda_2=0. \end{cases}$$

En résolvant ces deux équations, on trouve $\lambda_1=-\frac{14}{11}$, $\lambda_2=\frac{13}{11}$. On substitue ces valeurs dans l'équation [2], qui devient :

$$\left(-4-\frac{28}{11}-\frac{78}{11}\right)y=9-\frac{252}{11}+\frac{78}{11}; \quad \text{d'où} \quad y=\frac{1}{2}.$$

Enfin, pour obtenir z, on écrit les deux équations

$$\begin{cases} 3+7\lambda_1+5\lambda_2=0, \\ -4+2\lambda_1-6\lambda_2=0, \end{cases}$$

qui, résolues, donnent $\lambda_1=\frac{1}{26}$, $\lambda_2=-\frac{17}{26}$. L'équation [2] devient, pour ces valeurs :

$$\left(5-\frac{10}{26}+\frac{255}{26}\right)z=9+\frac{18}{26}-\frac{102}{26}; \quad \text{d'où} \quad z=\frac{2}{5}.$$

157. Cas où les coefficients des inconnues sont de grands nombres. Lorsqu'on a à résoudre un système dans lequel les inconnues ont de grands coefficients, il est ordinairement avantageux d'employer la méthode de substitution. Résolvons, comme exemple, le système suivant :

$$\left.\begin{array}{ll} 1{,}2345x+1{,}3579y+8{,}642z-9{,}765744=0, & [1] \\ 7{,}447x+5{,}225y-6{,}336z-0{,}611327=0, & [2] \\ 1{,}5380x+4{,}4444y-5{,}6789z+1{,}20011=0. & [3] \end{array}\right\}$$

La première de ces équations donne, pour valeur de z,

$$z=-\frac{1{,}2345+1{,}3579y-9{,}765744}{8{,}642}.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation [2], donne :

$$7{,}447x+5{,}225y+6{,}336\times\frac{1{,}2345x+1{,}3579y-9{,}765744}{8{,}642}-0{,}611327=0.$$

En multipliant tous les termes par le dénominateur 8,642, on obtient :

$$64{,}356974x+45{,}154450y-61{,}875754+7{,}821792x+8{,}603654y$$
$$-5{,}283088=0,$$

ou
$$72{,}17877x+53{,}75810y-67{,}15884=0. \qquad [4]$$

La même valeur de x, substituée dans l'équation [3], donnera :

$$1{,}5380x+4{,}4444y+5{,}6789\times\frac{1{,}2345x+1{,}3579y-9{,}765744}{8{,}642}+1{,}20011=0;$$

d'où
$$13{,}291396x+38{,}408505y-55{,}458684+7{,}010602x+7{,}711378y$$
$$+10{,}371351=0,$$

c'est-à-dire
$$20{,}30200x+46{,}11988y-45{,}08733=0. \qquad [5]$$

La question est maintenant ramenée à la résolution de deux équations à deux inconnues [4] et [5]. On tire de l'équation [5]

$$y=-\frac{20{,}302x-45{,}08733}{46{,}11988}.$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation [4], on obtient

$$72{,}17877x-53{,}7581\times\frac{20{,}302x-45{,}08733}{46{,}11988}-67{,}15884=0.$$

La multiplication par le dénominateur 46,11988 donne

$$3328{,}877x-1091{,}397x+2423{,}809-3097{,}358=0,$$

ou
$$2237{,}480x-673{,}549=0.$$

Donc
$$x=\frac{673{,}549}{2237{,}480}=0{,}301030$$

Pour trouver la valeur de y, on a d'abord

$$20{,}302x=6{,}11151;$$

donc
$$45{,}08733-20{,}302x=38{,}97582,$$

et
$$y=\frac{38{,}97582}{46{,}11988}=0{,}8450980.$$

Si, maintenant, dans l'équation

$$x=-\frac{1{,}2345x+1{,}3579y-9{,}765744}{8{,}642},$$

nous substituons à x et à y leurs valeurs numériques, nous aurons

$$1,2345x = 0,3716215,$$

$$1,3579y = 1,1475586;$$

donc

$$9,765744 - 1,2345x - 1,3579y = 8,246564,$$

et

$$z = \frac{8,246564}{8,642} = 0,9542425.$$

Les trois inconnues sont donc

$$x = 0,301030, \quad y = 0,8450980, \quad z = 0,9542425.$$

Vérification.

$$\left.\begin{array}{l} 1,2345x = 0,3716215 \\ 1,3579y = 1,1475586 \\ 8,642z \;= \underline{8,2465637} \\ \qquad\qquad 9,765744 - 9,765744 = 0. \end{array}\right\} \quad [1]$$

$$\left.\begin{array}{ll} 7,447x = 2,241770 & 6,336z = 6,046080 \\ 5,225y = \underline{4,415637} & \qquad\;\; \underline{0,611327} \\ \qquad\quad\; 6,657407 & \qquad\;\; 6,657407 \end{array}\right\} \quad [2]$$

$$\left.\begin{array}{l} 1,5380x = 0,46298414 \\ 4,4444y = 3,75595355 \\ \qquad\quad\;\; \underline{1,20011000} \\ \qquad\quad\;\; 5,4190477. \quad 5,6789z = 5,4190477. \end{array}\right\} \quad [3]$$

§ IV. Simplifications et remarques diverses.

158. Cas où toutes les inconnues n'entrent pas a la fois dans toutes les équations. Il peut arriver que chacune des équations ne contienne pas toutes les inconnues. Cette circonstance abrége le calcul; car on peut considérer comme éliminée d'une équation une inconnue que cette équation ne renferme pas. Il faut alors commencer l'opération par l'élimination de l'inconnue qui entre dans le plus petit nombre d'équations.

Considérons, par exemple, le système

$$\left.\begin{array}{rl} 9x - 2z + u = 41, & [1] \\ 7y - 5z - t = 12, & [2] \\ 4y - 3x + 2u = 5, & [3] \\ 3y - 4u + 3t = 7, & [4] \\ 7z - 5u = 11. & [5] \end{array}\right\}$$

On voit que t n'entre que dans deux équations; on tire donc de [2] :

$$t = 7y - 5z - 12; \qquad [2]$$

et l'on substitue cette valeur dans [4], qui devient :

$$24y - 15z - 4u = 43. \qquad [6]$$

En joignant cette équation [6] aux équations [1], [3] et [5], on forme un système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z, u.

Or x n'entre que dans les équations [1] et [3]. On tire donc de [3] :

$$x = \frac{4y + 2u - 5}{3}; \qquad [3]$$

et l'on substitue cette valeur dans [1], qui devient :

$$12y - 2z + 7u = 56. \qquad [7]$$

En joignant cette équation [7] aux équations [5] et [6], on obtient un système de trois équations à trois inconnues y, z, u.

Comme y n'entre que dans les équations [6], [7], on tire de [7] :

$$y = \frac{2z - 7u + 56}{12}; \qquad [7]$$

et l'on substitue cette valeur dans [6], qui devient :

$$11z + 18u = 69. \qquad [8]$$

Cette équation et l'équation [5] forment un système de deux équations à deux inconnues.

On tire de [5] : $u = \dfrac{7z - 11}{5}$;

et, substituant cette valeur dans l'équation [8], on a :

$$11z + \frac{18(7z - 11)}{5} = 69,$$

équation à une inconnue, d'où l'on tire : $z = 3$.

Par suite, l'équation [5] donne : $u = 2$;

ensuite l'équation [7] donne : $y = 4$;

puis l'équation [3] donne : $x = 5$,

et enfin l'équation [2] donne : $t = 1$.

159. Artifices particuliers. Il arrive quelquefois que les équations présentent une certaine symétrie par rapport aux inconnues; on peut alors ordinairement employer des procédés plus expéditifs que les méthodes générales. Nous ne saurions donner de règle à cet égard; mais nous allons indiquer, à l'aide de quelques exemples, les artifices les plus usités.

EXEMPLE I. Soit le système

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z+t=a, & [1] \\ y+z+t+v=b, & [2] \\ z+t+v+x=c, & [3] \\ t+v+x+y=d, & [4] \\ v+x+y+z=e. & [5] \end{array}\right\}$$

Si l'on ajoute ces cinq équations membre à membre, on remarque que chaque inconnue entre quatre fois dans la somme; de sorte que, si l'on désigne par s la somme des seconds membres, $(a+b+c+d+e)$, on a l'équation

$$4(x+y+z+t+v)=s,$$

ou

$$x+y+z+t+v=\frac{s}{4}. \qquad [6]$$

Ainsi la somme des cinq inconnues est déterminée. Et, puisque chacune des équations proposées contient quatre de ces inconnues, il suffira de les retrancher successivement de l'équation [6] pour obtenir chaque inconnue. On aura ainsi :

$$v=\frac{s}{4}-a, \quad x=\frac{s}{4}-b, \quad y=\frac{s}{4}-c, \quad z=\frac{s}{4}-d, \quad t=\frac{s}{4}-e.$$

EXEMPLE II. *Calculer les longueurs des trois côtés d'un triangle, connaissant les longueurs des droites qui joignent chaque sommet au milieu du côté opposé.*

Désignons par a, b, c, les longueurs inconnues des trois côtés, et par α, β, γ les longueurs des *médianes* correspondantes. La géométrie fournit immédiatement les trois équations :

$$\left.\begin{array}{ll} b^2+c^2=2\alpha^2+\dfrac{a^2}{2}, & [1] \\ c^2+a^2=2\beta^2+\dfrac{b^2}{2}, & [2] \\ a^2+b^2=2\gamma^2+\dfrac{c^2}{2}. & [3] \end{array}\right\}$$

Si l'on ajoute ces trois équations membre à membre, on a :

$$2(a+b^2+c^2)=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2};$$

d'où l'on tire aisément :

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \qquad [4]$$

Ainsi l'on connaît la somme des carrés des trois côtés. Si l'on retranche maintenant l'équation [1] de l'équation [4], b^2 et c^2 disparaissent; et l'on a :

$$a^2=\frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2\alpha^2-\frac{a^2}{2};$$

d'où l'on déduit ·

$$a^2=\frac{4}{9}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2).$$

On obtiendrait de même b^2 et c^2, en retranchant successivement les équations [2] et [3] de l'équation [4]. Mais il est plus simple de remarquer qu'on passe de l'équation [1] à l'équation [2], en changeant b^2 en c^2, c^2 en a^2, a^2 en b^2, α^2 en β^2; on obtiendra donc la valeur de b^2, en appliquant cette permutation de lettres à la formule qui donne a^2; et l'on aura :

$$b^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2).$$

On trouvera de même :

$$c^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2).$$

Les carrés a^2, b^2, c^2 étant connus, les côtés eux-mêmes, a, b, c sont, par là même, déterminés.

EXEMPLE III. Résoudre le système

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{v}{d},\\ mx+ny+pz+qv=k.\end{cases}$$

On a démontré (98) que l'on a :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{v}{d}=\frac{mx+ny+pz+qv}{ma+nb+pc+qd};$$

or le numérateur du dernier rapport est k; donc on a:

$$x=\frac{ak}{ma+nb+pc+qd}.$$

On a de même

$$y=\frac{bk}{ma+nb+pc+qd}.$$

$$z=\frac{ck}{ma+nb+pc+qd}.$$

$$v=\frac{dk}{ma+nb+pc+qd}.$$

§ V. Des cas où le nombre des inconnues n'est pas égal au nombre des équations.

160. CAS OÙ LE NOMBRE DES ÉQUATIONS SURPASSE CELUI DES INCONNUES. Soit, par exemple, un système de trois équations entre deux inconnues x et y. En résolvant deux de ces trois équations par l'une des méthodes connues, on obtiendra les valeurs de x et de y, qui seules peuvent vérifier le système. Mais, pour qu'il en soit ainsi, il faudra que ces valeurs satisfassent à la troisième équation. Si cette condition n'est pas remplie, *le système est impossible.*

Par exemple, le système : $\begin{cases} 3x+7y=17, \\ 5x-2y=1, \\ 8x+\ \ y=12, \end{cases}$

est impossible, puisqu'en résolvant les deux premières équations, on trouve $x=1$, $y=2$; et que ces valeurs, substituées dans la dernière, conduisent à l'impossibilité, $10=12$.

En général, si l'on donne $(m+p)$ équations entre m inconnues, on pourra résoudre m de ces équations, et obtenir ainsi les valeurs qui seules peuvent vérifier le système ; mais il faudra que ces valeurs, substituées dans les p équations restantes, les vérifient : sinon, le système sera impossible.

Si les coefficients des inconnues, ou quelques-uns d'entre eux, sont des lettres dont la valeur n'est pas déterminée, les valeurs obtenues pour ces inconnues seront des formules dépendant de ces lettres; et la substitution de ces formules dans les p équations restantes fournira p relations, qui exprimeront les *conditions* nécessaires et suffisantes que devront remplir les coefficients littéraux, pour que le système soit possible. On donne à ces relations le nom d'*équations de condition*.

Ainsi, soit le système : $\begin{cases} x\ +\ y=2a, \\ x\ -\ y=2b, \\ 2x+3y=\ a+2b, \\ 3x+4y=2a+3b-1. \end{cases}$

Les deux premières équations donnent $x=a+b$, $y=a-b$; et ces valeurs, substituées dans les deux dernières, fournissent les équations de condition,

$$\begin{cases} 5a-b=a+2b, \\ 7a-b=2a+3b-1; \end{cases}$$

desquelles on tire : $a=3$, $b=4$.

Si l'on admet ces valeurs de a et de b, le système est possible, et la solution est :

$$x=7,\ y=-1.$$

161. Cas où le nombre des inconnues surpasse celui des équations. Soit, par exemple, un système de deux équations entre trois inconnues x, y, z. Si l'on regarde une des inconnues, z par exemple, comme connue, la résolution du système fournira, comme valeurs de x et de y, deux formules qui contiendront z. On peut donc donner à z des valeurs arbitraires; et pour chacune d'elles, les formules fourniront pour x et pour y des valeurs correspondantes. *Le système admettra donc un nombre infini de solutions*. On voit alors qu'il est *indéterminé*.

En général, si l'on donne m équations entre $(m+p)$ inconnues, on pourra considérer comme connues p de ces inconnues, et résoudre les m équations par rapport aux m autres; on obtiendra, pour valeurs de ces m inconnues, m formules contenant les p premières. On pourra donc donner à ces p inconnues telles valeurs que l'on voudra; et les formules fourniront les valeurs correspondantes des autres. Le système est donc indéterminé.

EXEMPLE. Soit le système : $\begin{cases} 2x+3y-4z-3t=6, \\ x-2y+3z-2t=2. \end{cases}$

On résout par rapport à x et à y, en faisant passer dans les seconds membres les termes en z et en t. On trouve ainsi les deux formules :

$$\begin{cases} x=\dfrac{18-z+12t}{7}, \\ y=\dfrac{2+10z-t}{7}. \end{cases}$$

Si l'on pose *arbitrairement*, $z=2$, $t=1$, on trouve $x=4$, $y=3$.

§ VI. Des cas d'impossibilité et d'indétermination.

162. CAS D'IMPOSSIBILITÉ. Lorsque le nombre des inconnues est égal au nombre des équations, il arrive quelquefois que les méthodes de résolution conduisent à des résultats contradictoires.

1° Soit le système : $\begin{cases} 9x-12y=6, \\ 21x-28y=15. \end{cases}$

Appliquons la méthode d'addition et de soustraction (**146**) : pour éliminer y multiplions la première équation par 7, et la seconde par 3; il vient :

$$\begin{cases} 63x-84y=42, \\ 63x-84y=45; \end{cases}$$

équations évidemment incompatibles, puisque, en les soustrayant l'une de l'autre on aurait :

$$0=3.$$

Le système proposé est donc impossible; et l'impossibilité se manifeste par cette circonstance, que l'élimination d'une inconnue fait disparaître l'autre, de sorte qu'il ne reste plus qu'une égalité entre deux nombres inégaux.

2° Soit le système : $\begin{cases} 2x-3y+4z=7, \\ 3x-2y+\ z=8, \\ 11x-9y+7z=30. \end{cases}$

En éliminant z, d'abord entre les deux premières équations, puis entre les deux dernières, on obtient les deux équations,

$$\begin{cases} 10x-5y=25, \\ 10x-5y=26, \end{cases}$$

qui sont évidemment incompatibles. Le système est donc impossible ; et l'impossibilité se manifeste par cette circonstance, qu'en éliminant z, on obtient deux équations, dont la différence conduit encore à l'égalité absurde : $0=1$.

163. Cas d'indétermination. Il arrive aussi parfois, qu'en résolvant un système d'équations, on rencontre des égalités qui ont lieu, quelles que soient les valeurs des inconnues.

1° Soit le système : $\begin{cases} 91x+63y=217, \\ 65x+45y=155. \end{cases}$

Si l'on cherche à éliminer y, en multipliant la première équation par 5 et la seconde par 7, on trouve :

$$\begin{cases} 455x+315y=1085, \\ 455x+315y=1085, \end{cases}$$

équations identiques. Ainsi *les deux équations proposées rentrent l'une dans l'autre*. On n'a donc, à proprement parler, qu'une seule équation à deux inconnues : et le nombre des solutions est infini (**161**). On voit que l'indétermination se manifeste par cette circonstance, que l'élimination de l'une des inconnues fait disparaître l'autre, et qu'il reste une identité : $0=0$.

2° Soit le système · $\begin{cases} 2x-3y+4z=7, \\ 3x-2y+z=8, \\ 11x-9y+7z=31. \end{cases}$

L'élimination de z entre les deux premières équations, puis entre les deux dernières, conduit aux deux équations,

$$\begin{cases} 10x-5y=25, \\ 10x-5y=25, \end{cases}$$

qui sont encore identiques. Comme ces deux équations, combinées avec l'une des trois premières, forment un système équivalent au système proposé, on voit qu'on n'a, en réalité, que deux équations à trois inconnues. Le système est donc *indéterminé* ; et l'indétermination se manifeste encore par cette circonstance, que l'élimination de deux des trois inconnues conduit à une identité.

EXERCICES.

I. Résoudre le système : $\begin{cases} x+ay=b, \\ ax-by=c. \end{cases}$

On trouve : $x=\dfrac{b^2+ac}{a^2+b}$, $\quad y=\dfrac{ab-c}{a^2+b}$.

II. Résoudre le système : $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=c, \\ (a^2-b^2)(x+y)=d. \end{cases}$

On trouve : $x=\dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{d}{a-b}-c\right),\qquad y=\dfrac{1}{2b}\left(c-\dfrac{d}{a+b}\right).$

III. Résoudre le système : $\begin{cases} \dfrac{p}{x}+\dfrac{q}{y}=a, \\ \dfrac{q}{x}+\dfrac{p}{y}=b. \end{cases}$

On prend $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ pour inconnues auxiliaires, et l'on trouve :

$$x=\frac{p^2-q^2}{ap-bq},\qquad y=\frac{p^2-q^2}{bp-aq}.$$

IV. Résoudre le système :

$$\begin{cases} (a^2-b^2)(5x+3y)=2ab(4a-b), \\ a^2y-\dfrac{ab^2c}{a+b}+(a+b+c)bx=b^2y+ab(a+2b). \end{cases}$$

On trouve : $x=\dfrac{ab}{a+b},\qquad y=\dfrac{ab}{a-b}.$

V. Résoudre le système : $\begin{cases} \sqrt{y}-\sqrt{20-x}=\sqrt{y-x}, \\ 3\sqrt{20-x}=2\sqrt{y-x}. \end{cases}$

On trouve : $x=16,\qquad y=25.$

VI. Résoudre le système : $\begin{cases} x-y+z=0, \\ (a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0, \\ abx-acy+bcz=1. \end{cases}$

On trouve :

$$x=\frac{1}{(a-c)(b-c)},\qquad y=\frac{1}{(a-b)(b-c)},\qquad z=\frac{1}{(a-b)(a-c)}.$$

VII. Résoudre le système : $\begin{cases} a^4+a^3x+a^2y+az+u=0, \\ b^4+b^3x+b^2y+bz+u=0, \\ c^4+c^3x+c^2y+cz+u=0, \\ d^4+d^3x+d^2y+dz+u=0. \end{cases}$

On trouve : $x=-(a+b+c+d),\quad y=ab+ac+ad+bc+bd+cd,$
$z=-(abc+abd+acd+bcd),\quad u=abcd.$

VIII. Résoudre le système : $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^m+\left(\dfrac{y}{b}\right)^m+\left(\dfrac{z}{c}\right)^m=1. \\ a^n+b^n+c^n=d^n, \\ \dfrac{x^m}{a^{m+n}}=\dfrac{y^m}{b^{m+n}}=\dfrac{z^m}{c^{m+n}}; \end{cases}$

et éliminer a, b, c, entre ces équations.

On trouve : $\left(\dfrac{x}{a}\right)^m=\left(\dfrac{a}{d}\right)^n,\quad \left(\dfrac{y}{b}\right)^m=\left(\dfrac{b}{d}\right)^n,\quad \left(\dfrac{z}{c}\right)^m=\left(\dfrac{c}{d}\right)^n,$

et $$x^{\frac{mn}{m+n}}+y^{\frac{mn}{m+n}}+z^{\frac{mn}{m+n}}=d^{\frac{mn}{m+n}}.$$

IX. Résoudre le système : $\begin{cases} ax^3=by^3=cz^3, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{d}; \end{cases}$

et calculer : $ax^2+by^2+cz^2.$

On trouve :
$$x=\frac{d(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{a}},$$
$$y=\frac{d(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{b}},$$
$$z=\frac{d(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{c}};$$

puis : $ax^2+by^2+cz^2=d^2(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3.$

X. Résoudre le système : $\begin{cases} ax+m(y+z+v)=k, \\ by+m(z+v+x)=l, \\ cz+m(v+x+y)=p, \\ dv+m(x+y+z)=q. \end{cases}$

On cherche d'abord la somme s des inconnues :
$$s=\frac{k(b-m)(c-m)(d-m)+l(a-m)(c-m)(d-m)+p(a-m)(b-m)(d-m)+q(a-m)(b-m)(c-m)}{(a-m)(b-m)(c-m)(d-m)+m\{(b-m)(c-m)(d-m)+(a-m)(c-m)(d-m)+(a-m)(b-m)(d-m)+(a-m)(b-m)(c-m)\}}.$$

Puis on a : $x=\dfrac{k-ms}{a-m},\quad y=\dfrac{l-ms}{b-m},\quad z=\dfrac{p-ms}{c-m},\quad v=\dfrac{q-ms}{d-m}.$

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

164. La résolution d'un problème comprend trois parties distinctes : 1° la *mise en équation;* 2° la *résolution des équations;* 3° la *discussion* de la solution.

On dit qu'un *problème est du premier degré*, lorsque l'on est conduit, pour le résoudre, à des équations du premier degré. Nous avons appris à trouver les solutions de ces sortes d'équations : nous n'avons donc à nous occuper maintenant que de la première et de la troisième partie.

§ I. De la mise en équation.

165. Règle pour la mise en équation d'un problème. Nous avons déja dit (**155**), qu'il est impossible de donner, pour obtenir les équations d'un problème, une règle complétement générale : on se borne ordinairement à l'indication suivante.

Après avoir étudié avec soin l'énoncé du problème, on représente par les lettres x, y,... *les nombres dont la connaissance fournirait la solution : on indique sur ces lettres et sur les données la série des opérations que l'on devrait effectuer, si, après avoir trouvé les valeurs des inconnues, on voulait vérifier qu'elles satisfont à toutes les conditions de l'énoncé. Ces calculs de vérification conduisent, en général, à des résultats qui doivent être égaux ; en égalant les formules qui représentent ces résultats, on obtient les équations du problème.*

Montrons par des exemples comment on applique cette règle.

166. Problème I. *Un réservoir plein d'eau peut être vidé par deux robinets* A, B, *d'inégale grandeur. On ouvre le robinet* A, *et l'on fait couler le quart de l'eau. Puis on ouvre le robinet* B, *et on les laisse couler tous les deux. Le réservoir achève de se vider; et il emploie, pour cela, cinq quarts d'heure de plus que le premier* A *n'a mis de temps pour vider le quart de l'eau. Si l'on eût ouvert les deux robinets dès le commencement, le réservoir eût été vidé un quart d'heure plus tôt. On demande combien de temps il faudrait au robinet* A, *s'il était seul ouvert, pour vider le réservoir.*

Soit x le nombre d'heures employées par le robinet A pour vider seul le réservoir.

Pour en vider le quart, le robinet A emploie un temps $\frac{x}{4}$.

Pour vider les trois autres quarts, les deux robinets, ouverts ensemble, emploient un temps $\frac{x}{4}+\frac{5}{4}$.

Par suite, pour vider le réservoir entier, ils emploieraient les $\frac{4}{3}$ de ce temps, ou $\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$.

D'un autre côté, le temps total employé dans l'expérience, pour vider d'abord le premier quart à l'aide de A, puis les trois autres quarts à l'aide de A et B, est

$$\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{4}\right), \quad \text{ou } \frac{x}{2}+\frac{5}{4}.$$

Puisque ce temps est supérieur d'un quart d'heure à celui qu'auraient employé A et B ouverts ensemble dès l'origine, c'est-à-dire à $\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$, on a donc l'équation :

$$\frac{x}{3}+\frac{5}{3}=\frac{x}{2}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4},$$

qui, résolue, donne : $x=4^{h}$.

Vérification. Le temps employé par le robinet A, pour vider le quart du réservoir, est 1 heure : par suite le temps employé par les deux robinets, pour vider les trois autres quarts, est $1^h + \frac{5}{4}^h$, ou $\frac{9}{4}^h$: et le temps qu'ils emploieraient à vider le réservoir entier est les $\frac{4}{3}$ de $\frac{9}{4}$ d'heure ou 3 heures. D'un autre côté, dans l'expérience, le réservoir a été vidé en $1^h + \frac{9}{4}^h$, ou en 3^h 1/4; l'expérience a donc duré $\frac{1}{4}$ d'heure de plus, comme l'exigeait l'énoncé.

167. Problème II. *Un renard, poursuivi par un lévrier, a* 60 *sauts d'avance: il en fait* 9, *pendant que le lévrier n'en fait que* 6; *mais* 3 *sauts de lévrier valent* 7 *sauts de renard. Combien le lévrier fera-t-il de sauts, avant d'atteindre le renard ?*

Soit x le nombre de sauts que fera le lévrier, avant d'atteindre le renard.

Puisque trois sauts de lévrier valent sept sauts de renard, x sauts de lévrier vaudront $\frac{7x}{3}$ sauts de renard : première expression du chemin (évalué en sauts de renard), que doit parcourir le lévrier.

D'un autre côté, pendant que le lévrier fait 6 sauts, le renard en fait 9 : donc, pendant que le lévrier fait x de ses sauts, le renard fait $\frac{9x}{6}$ des siens, et, puisque ce dernier a 60 sauts d'avance, $60 + \frac{9x}{6}$ est une seconde expression du chemin (évalué avec la même unité), que doit faire le lévrier

On a donc l'équation : $\frac{7x}{3} = 60 + \frac{9x}{6}$,

qui, résolue, donne : $x = 72$ sauts.

Vérification. Les 72 sauts de lévrier valent $\frac{7}{3}$ de 72 ou 168 sauts du renard. Or, pendant que le lévrier en fait 72, le renard en fait 108; et ces 108 sauts, ajoutés aux 60 sauts que ce dernier a d'avance, complètent bien les 168 sauts de renard, chemin du lévrier.

168. Problème III. *On demande de trouver un nombre de quatre chiffres, sachant :* 1° *que le chiffre des centaines est égal à la somme du chiffre des unités et de celui des dizaines;* 2° *que le chiffre des dizaines est égal au double de la somme du chiffre des mille et de celui des unités ;* 3° *qu'en divisant le nombre par la somme de ses chiffres, on a pour quotient* 109 *et pour reste* 9; 4° *qu'enfin en retranchant le nombre du nombre formé avec les mêmes chiffres rangés dans l'ordre inverse, on obtient pour reste* 819.

Désignons par x, y, z, v les chiffres des unités, des dizaines, des centaines et des mille. La première condition donne immédiatement l'équation,

$$z = x + y, \qquad [1]$$

et la seconde,

$$y = 2v + 2x. \qquad [2]$$

Le nombre cherché a pour valeur $1000v + 100z + 10y + x$: donc la 3° condition donne l'équation :

$$1000v + 100z + 10y + x = 109\,(x + y + z + v) + 9. \qquad [3]$$

Enfin la quatrième condition fournit l'équation :

$$1000x+100y+10z+v-(1000v+100z+10y+x)=819. \qquad [4]$$

Avant de résoudre ce système de quatre équations, on simplifie les deux dernières, qui se réduisent à

$$99v-x-11y-12z=1, \qquad [3]$$

$$111x+10y-10z-111v=91. \qquad [4]$$

On élimine d'abord x entre [1], [3] et [4], et l'on trouve :

$$99v-12y-13z=1, \qquad [5]$$

$$101z-111v=91. \qquad [6]$$

Puis on élimine y entre [2] et [5], ce qui donne :

$$75v-37z=1. \qquad [7]$$

Enfin on élimine z entre [6] et [7] : et l'on trouve :

$$v=1;$$

et, par suite, $x=2, \quad y=6, \quad z=8.$

Le nombre cherché est donc 1862.

La vérification se fait immédiatement.

169. Il arrive parfois que les conditions d'égalité, données par l'énoncé, paraissent surabondantes.

PROBLÈME IV. *Un père partage son héritage entre ses enfants de la manière suivante : il donne au premier une somme* a *et la* n^{me} *partie du reste : il donne au second une somme* 2a *et la* n^{me} *partie de ce qui reste, après le prélèvement de ces sommes : il donne au troisième une somme* 3a *et la* n^{me} *partie de ce qui reste. Et ainsi de suite. Il arrive que l'héritage est entièrement partagé, et que tous les enfants ont reçu des parts égales. On demande la valeur de l'héritage, le nombre des enfants et la part de chacun d'eux.*

Désignons par x la valeur de l'héritage.

La part du premier enfant est :

$$a+\frac{x-a}{n}, \quad \text{ou} \quad \frac{x+(n-1)a}{n}.$$

Il reste pour les autres :

$$x-\frac{x+(n-1)a}{n}, \quad \text{ou} \quad \frac{(n-1)\ (x-a)}{n}.$$

Le second enfant prend d'abord $2a$.

Il reste alors :

$$\frac{(n-1)\ (x-a)}{n}-2a, \quad \text{ou} \quad \frac{(n-1)\,x-(3n-1)\,a}{n}.$$

La part du second enfant est donc :

$$2\,a+\frac{(n-1)\,x-(3n-1)\,a}{n^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{(n-1)\,x+(2n^2-3n+1)\,a}{n^2}.$$

Puisque, d'après l'énoncé, les parts doivent être égales, on aura l'équation :

$$\frac{x+(n-1)a}{n}=\frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}.$$

En résolvant cette équation, on trouve :

$$x=(n-1)^2 a.$$

Comme nous n'avons employé, pour trouver la formule de l'héritage, que les expressions des deux premières parts, il est *nécessaire* de calculer leurs valeurs, et de constater qu'elles sont égales à celles dont l'expression n'a pas servi, puis de déterminer le nombre des enfants. Or, la part du premier est :

$$\frac{x+(n-1)a}{n},\quad \text{ou}\quad \frac{(n-1)^2a+(n-1)a}{n},\quad \text{ou}\quad (n-1)a.$$

La part du second est :

$$\frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}=\frac{(n-1)^3a+(2n^2-3n+1)a}{n^2}$$

$$=\frac{(n^3-n^2)a}{n^2}=(n-1)a.$$

La part du troisième est, d'après l'énoncé :

$$3a+\frac{x-2(n-1)a-3a}{n}=\frac{x+(n-1)a}{n}=(n-1)a.$$

Et l'on verrait de même, que toutes les parts sont égales à $(n-1)a$.

En divisant la valeur de l'héritage par la part d'un enfant, on aura le nombre des enfants. Ce nombre est donc $(n-1)$.

Et l'on reconnaît que toutes les conditions de l'énoncé sont remplies.

170. Emploi d'inconnues auxiliaires. Lorsque l'énoncé d'un problème ne permet pas d'apercevoir aisément les relations qui doivent exister entre les données et les résultats, on peut quelquefois faire usage d'*inconnues auxiliaires*, que l'on élimine ensuite entre les équations qui les renferment. En voici un exemple, tiré de l'*Arithmétique universelle de Newton.*

Problème V. *Il a fallu* n *bœufs pour manger en* t *jours, l'herbe d'un pré, dont la surface est* a, *ainsi que celle qui y croissait uniformément pendant ce temps. Il a fallu* n' *bœufs pour manger en* t' *jours, l'herbe d'un autre pré, dont la surface est* a', *ainsi que celle qui y croissait uniformément pendant ce temps. On demande combien il faudra de bœufs, pour manger en* θ *jours, l'herbe d'un troisième pré, dont la surface est* α, *ainsi que l'herbe qui y croît uniformément pendant ce temps.*

On suppose que la hauteur de l'herbe était la même dans les trois prés, avant l'introduction des bœufs; et on la désigne par y : on suppose encore que l'allongement de l'herbe, en un jour, est la même pour les trois surfaces ; et on la représente par z : y et z sont des inconnues auxiliaires. Soit, d'ailleurs, x le nombre des bœufs à introduire dans le troisième pré.

Puisque la hauteur de l'herbe, dans le premier pré, croît chaque jour d'une quantité z, son accroissement, pour t jours, sera tz; et la hauteur totale de l'herbe serait $y + tz$, au bout de ce temps. Par suite, le volume total de cette herbe est $a\ (y + tz)$. Or, cette quantité est mangée par n bœufs, en t jours : donc un seul bœuf, en un jour, en mange une quantité représentée par l'expression

$$\frac{a\ (y+tz)}{nt}.$$

Il est évident, que les quantités mangées par un bœuf, en un jour, dans le second et dans le troisième pré, sont respectivement

$$\frac{a'(y+t'z)}{n't'},\quad \frac{\alpha(y+\theta z)}{x\theta}.$$

Comme ces quantités doivent être égales, on a ainsi les équations :

$$\frac{a(y+tz)}{nt}=\frac{a'(y+t'z)}{n't'}=\frac{\alpha(y+\theta z)}{\theta x}.$$

On tire d'abord de la première y *en fonction de* z; et l'on trouve :

$$y=\frac{(an'-a'n)tt'z}{a'nt-an't'}.$$

Puis, on remplace dans la seconde

$$\frac{a(y+tz)}{nt}=\frac{\alpha(y+\theta z)}{\theta x},$$

y par cette valeur : z disparaît de lui-même; et l'on trouve enfin

$$x=\frac{\alpha\,\{\,an't'(\theta-t)+a'nt(t'-\theta)\,\}}{aa'\theta(t'-t)}.$$

Newton donne l'application numérique suivante :

$a = 3\frac{1}{3}$ arpents,	$t = 4$ semaines,	$n = 12$ bœufs,
$a' = 10$	$t' = 9$	$n' = 21$
$\alpha = 24$	$\theta = 18$	$x = 36.$

§ II. De la discussion.

171. Ce que c'est que discuter une solution. Lorsqu'on a mis un problème en équation, et qu'on a résolu le système ainsi obtenu, la solution convient aux équations, à moins qu'elle ne se présente sous une forme illusoire dont nous parlerons plus loin. Mais cette solution ne convient pas toujours au problème posé. Il peut arriver en effet, que certaines conditions, imposées aux inconnues par la nature de la question, mais non reproduites par les équations, rendent le problème impossible. Étudier les causes de cette impossibilité, c'est *discuter* la solution.

Lorsque les données sont représentées par des lettres, et que, par suite, les valeurs des inconnues sont exprimées par des formules, il peut arriver que le problème ne soit possible qu'autant que les valeurs des données sont renfermées entre certaines limites. Déterminer ces limites, en dehors desquelles il y a impossibilité, c'est discuter la solution.

Enfin, étudier toutes les circonstances remarquables que peuvent présenter les formules, entre les limites déterminées par la discussion, c'est encore discuter la solution.

Donnons quelques exemples :

172. PROBLÈME VI. *Dans une société de* 10 *personnes, on a fait une collecte pour les pauvres : chaque homme a donné* 6 *francs, chaque femme a donné* 4 *francs. La somme totale recueillie est de* 45 *francs. On demande combien il y avait d'hommes, combien de femmes?*

Soient x et y les nombres d'hommes et de femmes. On a d'abord :

$$x+y=10.$$

Puisque chaque homme a donné 6 francs, x hommes ont donné $6x$.

Puisque chaque femme a donné 4 francs, y femmes ont donné $4y$. Donc on a :

$$6x+4y=45.$$

En résolvant ces deux équations, on trouve :

$$x=2\frac{1}{2}, \qquad y=7\frac{1}{2}.$$

DISCUSSION. Cette solution *fractionnaire* est la seule qui convienne aux équations : d'ailleurs, ces équations sont la traduction fidèle et complète de l'énoncé. Donc le problème ne saurait avoir d'autre solution. Mais, *la nature de la question exige que la solution soit composée de nombres entiers : puisque les nombres trouvés sont fractionnaires, le problème est impossible.*

173. PROBLÈME VII. *Une personne emploie un ouvrier pendant* 13 *journées d'été, et lui retient sur son salaire* 22 *francs pour quelques dégâts qu'il a causés. Une autre fois, elle emploie le même ouvrier pendant* 17 *journées d'hiver; elle lui donne par jour* 2 *francs de moins que pour une journée d'été; mais elle ajoute à son salaire* 28 *francs pour le récompenser de son zèle. Chaque fois, l'ouvrier a reçu la même somme. On demande le prix d'une journée d'été.*

Soit x ce prix; $(x-2)$ sera le prix d'une journée d'hiver.

La première fois, l'ouvrier a reçu $(13x-22)$.

La seconde fois, il a reçu $17(x-2)+28$.

On a donc l'équation :

$$17(x-2)+28=13x-22.$$

En la résolvant, on trouve : $x=-4$.

DISCUSSION. Cette solution *négative* vérifie l'équation, et la vérifie seule. Le problème, dont cette équation traduit l'énoncé, ne saurait donc en avoir d'autre.

OR *la nature de la question exige que la solution soit un nombre positif; puisque ce nombre est négatif, le problème est impossible.*

174. PROBLÈME VIII. *Trouver un nombre de deux chiffres, tel que le quadruple du chiffre des unités surpasse d'une unité le triple du chiffre des dizaines; et qu'en retranchant de ce nombre le nombre renversé, on ait 36 pour reste.*

Soient x le chiffre des dizaines et y le chiffre des unités : on a évidemment les équations:

$$\left.\begin{aligned} 4y-3x&=1,\\ 10x+y-10y-x&=36.\end{aligned}\right\}$$

En résolvant ce système, on trouve:

$$x=17, \qquad y=13.$$

DISCUSSION. Cette solution *entière et positive* est la seule qui vérifie les équations. Le problème n'en peut donc pas admettre d'autre. Mais, *la nature de la question exige que les deux nombres cherchés soient plus petits que* 10 : *puisqu'ils dépassent cette limite, le problème est impossible.*

Ces exemples suffisent pour montrer que la solution d'un système d'équations peut ne pas convenir au problème qui l'a fourni, parce qu'elle ne remplit pas certaines conditions imposées aux inconnues, conditions qui ne sont pas formellement écrites dans les équations. Mais ce n'est là qu'un des points de vue sous lesquels on peut envisager la discussion des problèmes. Il en est un autre beaucoup plus important: nous voulons parler des *solutions négatives* et de leur *interprétation*.

§ III. Des solutions négatives des problèmes du premier degré à une inconnue.

175. SOLUTIONS NÉGATIVES DES ÉQUATIONS. Il n'y a aucune remarque à faire sur les nombres négatifs que l'on rencontre comme solution d'une ou de plusieurs équations. Ces nombres, substitués aux inconnues et traités conformément aux conventions, rendent le premier membre de chaque équation égal au second. Mais lorsque les inconnues représentent des grandeurs à déterminer, il semble que les solutions négatives, n'exprimant aucune grandeur, doivent être considérées comme un symptôme d'impossibilité, et, par suite, rejetées comme inadmissibles. C'est en effet ce qui aurait lieu, si, dans la mise en équation, on pouvait toujours exprimer, d'une manière générale et pour tous les cas, les conditions du problème proposé. Mais bien

souvent il n'en est pas ainsi; et les solutions négatives peuvent trouver alors une interprétation qu'il est important d'étudier.

176. Considérons d'abord une équation à une inconnue :

$$ax + b = a'x + b'. \qquad [1]$$

Supposons qu'en la résolvant, on ait trouvé, pour x, une valeur négative $-\alpha$; cela signifie que l'on a l'égalité :

$$a(-\alpha) + b = a'(-\alpha) + b',$$

c'est-à-dire, $\quad b - a\alpha = b' - a'\alpha;$

par conséquent, $x = +\alpha$ est solution de l'équation :

$$b - ax = b' - a'x. \qquad [2]$$

Si l'on compare les équations [1] et [2], on voit qu'elles ne diffèrent que par le signe des termes qui contiennent l'inconnue.

Théorème. *Toute solution négative d'une équation du premier degré à une inconnue, étant prise positivement, satisfait donc à une équation que l'on obtient, en changeant, dans la première, le signe des termes où figure l'inconnue.*

177. Remarque. Il arrive souvent, comme nous allons le montrer, que cette nouvelle équation correspond à un problème peu différent du proposé, et quelquefois à ce problème lui-même, entendu dans un sens plus général; *on obtient alors la solution du problème modifié ou généralisé, en prenant, avec le signe +, la valeur négative trouvée pour l'inconnue.*

Une pareille remarque ne peut être développée d'une manière générale; il est essentiel d'étudier, à part, son application dans chaque question particulière. C'est ce que nous allons faire dans les problèmes suivants.

178. Problème IX. *Deux mobiles* M *et* N, *qui suivent une ligne droite, partent de deux points* A *et* B, *situés à une distance* d *l'un de l'autre* (A *à gauche*, B *à droite*); *ils marchent, dans le même sens, de gauche à droite, avec des vitesses* v *et* v'. *Après combien de temps se rencontreront-ils ?*

Soit x le temps cherché; le premier mobile, dont la vitesse est v, parcourt un espace v dans l'unité de temps, et par suite, dans le temps x, il parcourt vx; le second, pendant le même temps, parcourt l'espace $v'x$. Puisqu'ils partent en même temps, il faut, pour qu'ils se rencontrent, que le premier ait parcouru un espace d de plus que le second; on doit donc avoir l'équation :

$$vx - v'x = d; \qquad [1]$$

d'où l'on déduit : $\quad x = \dfrac{d}{v - v'}.$

Discussion. Si v est plus grand que v', cette valeur de x est positive et fournit la solution demandée. Mais si v est moindre que v', cette solution est négative. Pour l'interpréter, remarquons que, prise positivement, elle satisfait, en vertu du théorème (176), à l'équation :

$$v'x - vx = d. \qquad [2]$$

Or cette équation exprime évidemment, que le chemin parcouru par le mobile N surpasse de d le chemin parcouru par le mobile M ; et cette condition répond à la question suivante :

En supposant que les deux mobiles soient en marche depuis un temps indéfini, combien y a-t-il de temps qu'ils se sont rencontrés ? Car, dans cette hypothèse, la rencontre a eu lieu à gauche de A.

Si donc on veut donner cette extension au problème, *la valeur négative de* x *exprime un temps déjà écoulé.*

On comprend d'ailleurs que, si l'on a $v < v'$, le mobile M, qui est en arrière du mobile N, et qui va moins vite que lui, ne pourra pas le rencontrer ultérieurement, mais qu'il a dû le rencontrer avant l'époque actuelle.

179. Problème X. *Les âges de deux individus sont* a *et* b ; *après combien de temps l'âge du premier sera-t-il double de celui du second ?*

Soit x le temps cherché ; l'équation du problème est évidemment :

$$a + x = 2(b + x) ; \qquad [1]$$

et l'on en déduit : $x = a - 2b.$

Discussion. Si a est plus grand que $2b$, cette valeur de x est positive, et fait connaître la solution. Mais, si a est moindre que $2b$, cette solution est négative ; prise positivement, elle satisfait alors (**176**) à l'équation,

$$a - x = 2(b - x) ; \qquad [2]$$

qui correspond évidemment à la question suivante :

Combien y a-t-il de temps que l'âge du premier individu était double de celui du second ?

Si l'on accepte cette extension, *la valeur négative de* x *exprime encore un temps écoulé.*

Remarquons que le rapport actuel des deux âges est $\frac{a}{b}$; si donc il est plus grand que 2 (si $a > 2b$), comme il va en diminuant à mesure que le temps s'écoule, il arrivera une époque où il deviendra égal à 2 : c'est le cas de la solution positive. Au contraire, s'il est actuellement plus petit que 2 (si $a < 2b$), comme il se rapproche toujours de l'unité, il ne sera jamais égal à 2 dans l'avenir : il n'y a donc pas de solution dans ce sens. Mais si, en même temps, a est supérieur à b, il y a eu une époque où le rapport des âges a été égal à 2 ; c'est cette époque qu'indique la solution négative.

Ajoutons que, si a est inférieur à b, le problème n'a évidemment pas de solution ; et l'on voit qu'en effet la formule $x = 2b - a$, applicable à ce cas, donne à x une valeur plus grande que b, qui n'est pas acceptable.

180. Problème XI. *On donne sur une droite, deux points* A *et* B : *le premier est situé à gauche d'un point* O, *à une distance* a, *et le second est situé à*

droite, à une distance b. *Déterminer, sur cette ligne, un troisième point* X, *tel qu'en prenant le milieu* M *de* BX, *puis le tiers de* AM, *à partir de* A, *le point déterminé coïncide avec le point* O.

Supposons que le point cherché X soit placé à droite du point O.

Soit x la distance OX, que nous prenons pour inconnue. Comme on a évidemment, d'après la figure :

$$\begin{cases} b = \mathrm{OM} + \mathrm{MB} \\ x = \mathrm{OM} - \mathrm{MX} \end{cases}$$

et que $\mathrm{MB} = \mathrm{MX}$, il en résulte :

$$\mathrm{OM} = \frac{b+x}{2};$$

donc

$$\mathrm{AM} = a + \frac{b+x}{2}.$$

Mais d'après l'énoncé, $\mathrm{AM} = 3\mathrm{AO} = 3a$.

Il en résulte l'équation :

$$3a = a + \frac{b+x}{2}: \qquad [1]$$

d'où l'on déduit : $x = 4a - b$.

Discussion. Si b est plus petit que $4a$, cette valeur de x est positive, et donne la solution. Mais, si $4a$ est moindre que b, la solution est négative ; prise positivement, elle satisfait donc (**178**) à l'équation :

$$3a = a + \frac{b-x}{2}. \qquad [2]$$

Or cette équation est celle à laquelle on est conduit, en supposant le point X placé à une distance x, à gauche du point O. Car, en faisant la figure pour cette hypothèse, on trouve aisément :

$$\begin{cases} b = \mathrm{OM} + \mathrm{MB}, \\ x = \mathrm{MX} - \mathrm{OM}; \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{OM} = \frac{b-x}{2}, \quad \text{et} \quad \mathrm{AM} = a + \frac{b-x}{2};$$

donc

$$3a = a + \frac{b-x}{2}. \qquad [2]$$

Il résulte de là, que *la valeur négative de* x, *fournie par l'équation* [1], *doit, dans ce cas, être portée dans un sens opposé à celui que l'on avait supposé dans la mise en équation.*

181. Remarque. Il ne faut pas croire que les solutions négatives s'interprètent toutes aussi naturellement que les précédentes. On ne doit pas même affirmer, d'une manière générale, qu'*une valeur négative, trouvée pour un temps à venir, exprime un temps passé*; ni que *les longueurs négatives, à porter sur une ligne, à partir d'une origine fixe, doivent toujours être comptées en sens op-*

posé à celui qui correspond aux valeurs positives. Il en est cependant ainsi dans la plupart des cas ; et nous allons en donner la raison.

182. Pourquoi l'on doit compter dans le passé les valeurs négatives du temps. Supposons que, x désignant le temps qui doit s'écouler depuis l'époque actuelle jusqu'à un certain événement, on ait trouvé, pour l'équation d'un problème :

$$B + Ax = B' + A'x. \qquad [1]$$

Si, au lieu de chercher le temps qui doit s'écouler à partir de l'époque actuelle, on avait cherché le temps qui doit s'écouler à partir d'une époque antérieure de t années ; si, par exemple, on avait pris pour inconnue la date de l'événement, en nommant x_1 ce temps, on aurait évidemment :

$$x_1 = t + x; \quad \text{d'où} \quad x = x_1 - t;$$

et, par suite, au lieu de l'équation [1], on aurait eu :

$$B + A(x_1 - t) = B' + A'(x_1 - t); \qquad [2]$$

et ce serait là l'équation du problème, si l'on prenait x_1 pour inconnue.

Supposons que la valeur de x_1, que l'on en déduit, soit positive, mais moindre que t, et égale, par exemple, à $(t - \alpha)$; on aura, en la substituant dans l'équation [2], l'égalité :

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha;$$

par où l'on voit, que l'équation [1] a pour solution : $x = -\alpha$.

Une solution négative, $x = -\alpha$, *trouvée pour l'équation* [1], *signifie donc, que l'événement est postérieur de* $(t - \alpha)$ *années à une époque antérieure de* t *années à l'époque actuelle, c'est-à-dire qu'il précède de* α *années l'époque actuelle.*

183. Remarque. L'équation [1] est construite, par hypothèse, pour des valeurs positives de x : par conséquent, l'équation [2] est construite pour des valeurs de x_1 plus grandes que t, c'est-à-dire pour des époques postérieures à l'époque actuelle. En appliquant cette dernière, comme nous l'avons fait, à une époque antérieure, nous avons fait une hypothèse qui pourrait n'être pas admissible. Le raisonnement précédent n'est donc pas tout à fait général.

184. Pourquoi l'on doit compter, en sens contraire du sens convenu, les valeurs négatives des distances. Supposons

maintenant que, x désignant la distance à porter sur une ligne, à partir d'un point donné O, et dans une certaine direction, à droite par exemple, on ait trouvé, pour équation d'un problème,

$$B+Ax=B'+A'x. \qquad [1]$$

Si, au lieu de chercher la distance du point inconnu à l'origine donnée O, on avait cherché sa distance x_1 à une origine O', située à gauche de la première, à une distance d, on aurait eu :

$$x_1=d+x, \quad \text{ou} \quad x=x_1-d;$$

et, par suite, au lieu de l'équation [1], on aurait eu, pour équation du problème :

$$B+A(x_1-d)=B'+A'(x_1-d). \qquad [2]$$

Supposons que cette équation fournisse pour x_1 une valeur positive, mais moindre que d, que je représente par $(d-\alpha)$; pour avoir la position X du point cherché, il faudra d'abord porter la distance d de O' en O, puis porter en sens contraire la distance α de O en X. Le point cherché sera donc à gauche du point O, et à une distance α de cette origine. Or, en substituant à x_1, dans l'équation [2], sa valeur $(d-\alpha)$, on a :

$$B-A\alpha=B'-A'\alpha;$$

d'où il résulte, que l'équation [1] a pour solution : $x=-\alpha$.

Une solution négative $x=-\alpha$, *trouvée pour l'équation* [1], *signifie donc, que le point cherché est situé à gauche du point* O, *et à une distance* α *de cette origine.*

185. Remarque. Nous remarquerons, comme au n° **183**, que le raisonnement précédent n'est pas tout à fait général ; il suppose que l'équation [2], qui est construite pour les points situés à droite du point O, puisqu'on l'a déduite de l'équation [1], s'applique aussi aux points situés à gauche. Or cela n'a pas toujours lieu ; et nous en donnerons un exemple.

186. Problème XII. *Un chemin de fer prend* 0f,10, *par tonne et par kilomètre, pour le transport des marchandises ; on paye, en outre, un droit fixe de* 3f,75 *par wagon de* 2000 *kilogrammes. A quelle distance peut-on transporter* 50 *tonnes pour* 3 *fr.?*

Soit x la distance cherchée.

50 tonnes correspondent à 25 wagons ; le droit fixe à payer est donc de

$$3,75\times 25.$$

En outre, pour le transport à la distance x, le droit proportionnel est

$$0,10\times50\times x.$$

L'équation du problème est donc :

$$3,75\times25+(0,10\times50\times x)=3; \qquad [1]$$

et, en la résolvant, on trouve : $x=-18,15$.

Discussion. Cette valeur négative ne signifie ici absolument rien. Car les prix du transport de 50 tonnes, à $18^k,15$, *à droite ou à gauche* du point de départ, sont exactement les mêmes; par suite, si le point cherché se trouvait à gauche, à $18^k,15$, comme semble l'indiquer la solution négative, il y en aurait un autre, situé à droite, à la même distance; et l'équation, qui est construite pour ce cas, fournirait la solution $x=+18,15$. On reconnaît, d'ailleurs, *à priori*, que le problème est impossible; car le droit fixe, étant $3^f,75\times25$, est supérieur au prix total que l'on devrait payer, pour ce droit et pour le transport.

On peut s'assurer que, dans ce cas, le raisonnement du n° **184** est en défaut. En effet, supposons que, les 50 tonnes devant être portées vers la droite, on prenne pour origine un point O situé à une distance d, à gauche du point de départ; la distance x_1 du point cherché à cette origine sera $(x+d)$; et l'on aura $x=x_1-d$. L'équation du problème deviendra donc :

$$3,75\times25+0,10\times50\times(x_1-d)=3. \qquad [2]$$

Si cette équation (qui est construite pour les points situés à droite du point de départ, puisqu'on l'a déduite de l'équation [1]) était applicable aux points situés à gauche, le raisonnement (**184**) pourrait être continué, et une valeur de x_1, positive, mais moindre que d, correspondrait effectivement à un point situé à gauche. Mais l'équation [2] ne convient nullement au cas du transport effectué vers la gauche. Dans ce cas, en effet, le chemin parcouru doit être représenté par $d-x_1$; et il faut prendre, pour équation du problème, l'équation

$$3,75\times25+0,10\times50\times(d-x_1)=3, \qquad [3]$$

qui diffère de l'équation [2].

§ IV. Introduction des nombres négatifs dans l'énoncé d'un problème.

187. Avantages de cette introduction. Il est quelquefois avantageux d'introduire des nombres négatifs dans les données mêmes d'une question. Pour montrer comment on peut y être conduit, et de quelle nature est l'avantage qu'on y trouve, nous reprendrons le problème du n° **178**.

Deux mobiles M *et* M', *suivent la droite* AA', *en marchant dans le même sens* AA' : M *part de* A *avec la vitesse* v, *en même temps que* M' *part de* A' *avec la vitesse* v'. *Après combien de temps se rencontrent-ils?*

En nommant x le temps inconnu, et d la distance AA', on a trouvé l'équation (**178**):

$$vx-v'x=d.$$

On a vu, que cette équation fournit la solution du problème, lors même que v est moindre que v', pourvu que l'on regarde la valeur négative de x comme représentant un temps déjà écoulé.

Pour généraliser encore davantage, supposons que les deux mobiles ne marchent pas tous deux dans la direction AA' : on peut considérer trois cas distincts.

1° Le mobile M marche vers la droite, et le mobile M' vers la gauche;

ils se rencontrent entre A et A', après avoir parcouru, l'un vx et l'autre $v'x$; et par conséquent l'équation du problème est :

$$vx+v'x=d.$$

2° M marche vers la gauche, M' vers la droite;

Les mobiles ne se rencontreront jamais; mais en nommant x le temps écoulé depuis leur rencontre entre A et A', ils auront parcouru, l'un vx et l'autre $v'x$, quand ils seront arrivés, l'un en A et l'autre en A'. On aura donc :

$$vx+v'x=d.$$

3° Enfin, si l'on suppose que les mobiles marchent tous deux vers la gauche,

la rencontre aura lieu à gauche de A; et l'équation du problème sera, dans ce cas:

$$v'x-vx=d.$$

Les équations relatives aux quatre cas sont donc, en résumé :

$vx-v'x=d$, quand M et M' marchent vers la droite;

$vx+v'x=d$, quand M marche vers la droite, M' vers la gauche;

$vx+v'x=d$, quand M marche vers la gauche, M' vers la droite; x désigne alors un temps déjà écoulé;

$v'x-vx=d$, quand M et M' marchent vers la gauche.

Or, ces quatre équations peuvent se réduire à une seule, ce qui est évidemment un avantage, si l'on convient de représenter par des nombres négatifs $(-v)$, $(-v')$ les vitesses dirigées vers la gauche. D'après cette convention, il faut, en effet, remplacer dans la seconde des équations ci-dessus, v' par $(-v')$; dans la troisième, v par $(-v)$; dans la quatrième, v par $(-v)$, v' par $(-v')$. De plus, dans la troisième, où l'inconnue désigne un temps écoulé, il faut remplacer x par $(-x)$.

Les équations deviennent toutes, par ces substitutions :

$$vx-v'x=d;$$

en sorte que la formule, $x=\frac{d}{v-v'}$,

que l'on en déduit, convient à tous les cas.

Ainsi, *l'avantage que l'on retire de l'introduction des nombres négatifs dans les données d'une question, est de réduire à une seule les équations qui correspondent aux différents cas du problème, et, par suite, de n'avoir à considérer qu'une seule formule pour les résoudre.*

§ V. Des solutions négatives des problèmes du premier degré à deux inconnues.

188. Nous n'avons considéré, jusqu'à présent, que les solutions négatives fournies par une équation à une inconnue. Le cas de plusieurs équations donne lieu à des remarques entièrement semblables. Supposons qu'en résolvant le système :

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c,\\ a'x+b'y&=c',\end{aligned}\right\} \quad [1]$$

on ait trouvé, pour l'une des inconnues, ou pour toutes les deux, des valeurs négatives. Soient, par exemple, $x=\alpha$, $y=-\beta$. Ces valeurs satisfaisant aux équations [1], on aura les égalités :

$$\left.\begin{aligned} a\alpha-b\beta&=c,\\ a'\alpha-b'\beta&=c';\end{aligned}\right\} \quad [2]$$

et par conséquent, les valeurs $x=\alpha$, $y=\beta$, satisfont au système :

$$\left.\begin{aligned} ax-by&=c,\\ a'x-b'y&=c'.\end{aligned}\right\} \quad [3]$$

Ainsi, en prenant positivement la solution négative $y=-\beta$, on satisfait à un système qui diffère du proposé par le changement de signe des termes en y. On verrait de même que, si la valeur de x était négative, on pourrait la prendre avec le signe +, pourvu qu'on changeât, dans les équations proposées, les signes de tous les termes en x.

THÉORÈME. *En général, lorsqu'en résolvant un système d'équations, on trouve pour quelques-unes des inconnues des valeurs négatives, on peut prendre toutes les valeurs des inconnues avec le*

signe +; elles sont alors les solutions d'un nouveau système, lequel ne diffère du système proposé, que par le changement de signe des termes qui contiennent les inconnues dont les valeurs sont négatives.

189. REMARQUE. Les équations nouvelles, auxquelles satisfont les valeurs négatives des inconnues prises positivement, correspondent quelquefois à un problème peu différent du proposé, ou à ce problème lui-même, entendu dans un sens plus général. On obtient alors la solution du problème modifié ou généralisé, en prenant, avec le signe +, les valeurs négatives trouvées pour les inconnues. Mais cette remarque, comme dans le cas des équations à une inconnue, ne peut être développée que sur des questions particulières.

Considérons, par exemple, le problème suivant.

190. PROBLÈME XIII. *Un réservoir, de capacité* v, *est rempli, dans un temps* t, *par* n *robinets, versant chacun la même quantité d'eau, et par la pluie tombée uniformément sur un toit dont la surface est* s. *Un autre réservoir, de capacité* v', *est rempli, dans le temps* t', *par* n' *robinets semblables aux précédents, et par la pluie tombant uniformément sur un toit* s' *avec la même intensité que sur le toit* s. *Déduire de ces données la quantité d'eau,* x, *versée par chaque robinet dans l'unité de temps, et la quantité* y *versée par la pluie, pendant chaque unité de temps, sur chaque unité de surface de toit.*

Puisqu'un robinet verse, dans l'unité de temps, une quantité d'eau égale à x, n robinets, dans le temps t, verseront nxt.

La pluie versant, dans l'unité de temps, une quantité d'eau égale à y, sur l'unité de surface, versera, dans le temps t, sur la surface s, une quantité d'eau syt; on aura donc l'équation :

$$nxt + syt = v. \qquad [1]$$

En exprimant que le second réservoir est rempli dans le temps t', on aura de même l'équation :

$$n'xt' + s'yt' = v'; \qquad [2]$$

et les équations [1] et [2] permettront de calculer x et y.

Supposons maintenant, qu'en les résolvant, on trouve pour x une valeur positive α, et pour y une valeur négative $-\beta$. Il faudra en conclure (**188**), que les valeurs $x = \alpha, y = \beta$ satisfont aux équations :

$$\begin{cases} nxt - syt = v, \\ n'xt' - s'yt' = v'. \end{cases}$$

Ces équations correspondent à un problème qui diffère du proposé, en ce que la pluie, qui remplit les réservoirs, doit être remplacée par une cause qui leur enlève une quantité d'eau proportionnelle au temps et à la surface; par exemple, par l'évaporation du liquide.

Si, au contraire, on trouvait pour x une valeur négative, cette valeur, prise positivement, satisferait aux équations :

$$\begin{cases} syt - nxt = v, \\ s'yt' - n'xt' = v'. \end{cases}$$

Ces équations correspondent à un problème qui diffère du proposé, en ce que les robinets qui versent de l'eau dans les réservoirs, doivent être remplacés par un nombre égal de causes qui en enlèvent ; par exemple, par des orifices ou par des pompes, enlevant une quantité x d'eau par unité de temps.

191. Remarques. Les remarques faites (**182**, **184**), au sujet des valeurs négatives trouvées pour un temps ou pour une longueur, s'appliquent sans modification au cas où les équations contiennent plus d'une inconnue.

Ajoutons qu'il y a d'autres grandeurs que les longueurs et les temps, qui peuvent être aussi comptées en deux sens opposés. Ainsi, les températures au-dessus ou au-dessous de zéro, les latitudes (géographiques ou célestes) boréales ou australes, les forces attractives ou répulsives, l'actif ou le passif d'un négociant, sont des grandeurs susceptibles d'être représentées par des nombres positifs ou négatifs.

Remarquons enfin, en terminant, qu'il n'est pas nécessaire d'introduire les nombres négatifs dans l'énoncé des problèmes ; on est libre de faire ou de ne pas faire ces conventions. Mais *si l'on veut généraliser les formules, c'est-à-dire si l'on veut qu'une seule et unique formule représente la solution d'un problème dans tous les cas, ces conventions sont obligatoires ; il faut représenter un changement de sens par un changement de signe.*

§ VI. Des solutions infinies ou indéterminées.

192. Des solutions dites infinies. Lorsque la formule, qui fournit la solution générale d'un problème, se présente sous la forme fractionnaire, il peut arriver que certaines hypothèses, faites sur les lettres qu'elle renferme, annulent son dénominateur, sans annuler son numérateur. Cette formule prend alors la forme $x = \frac{k}{0}$. Nous verrons, dans la discussion générale des formules (chap. VII), que l'équation qui l'a fournie est alors impossible. Mais il n'en est pas toujours ainsi du problème qui y a conduit ; on peut seulement affirmer que la quantité, prise pour inconnue, cesse alors d'exister.

Prenons pour exemple la question suivante :

193. Problème XIV. *Deux cercles, de rayons* R *et* r, *non intérieurs l'un à l'autre, sont situés dans un même plan; la distance de leurs centres est* d. *On demande le point où la tangente commune extérieure rencontre la droite qui joint les centres.*

Désignons par x la distance qui sépare le point cherché du centre du plus petit cercle. Si l'on joint chaque centre au point de contact correspondant, on forme deux triangles semblables, qui donnent immédiatement la proportion :

$$[1] \qquad \frac{d+x}{x}=\frac{R}{r}; \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{dr}{R-r}. \qquad [2]$$

Discussion. Tant que r reste plus petit que R, la valeur de x est positive, et la formule permet de construire le point cherché. Si la valeur de r se rapproche de celle de R, celle de x augmente, puisque son numérateur croît, et que son dénominateur diminue; le point s'éloigne donc sur la ligne des centres. Comme on peut rendre la différence $(R-r)$ assez petite, pour que la fraction [2] soit aussi grande que l'on voudra, les rayons des cercles peuvent différer assez peu, pour que le point soit aussi éloigné que l'on voudra. Enfin lorsque, à la limite, $r=R$, la fraction est devenue plus grande que toute grandeur assignable. *Le point de rencontre s'éloigne donc indéfiniment, et les deux droites, ne se rencontrant plus, sont parallèles.* On voit que, dans ce cas, l'équation [1] prend la forme impossible : $\frac{d+x}{x}=1$, et que la formule prend la forme singulière : $x=\frac{dr}{0}$; il n'y a plus alors ni équation ni formule, et le point de rencontre n'existe plus; mais c'est précisément dans ce résultat que consiste la solution du problème.

194. Remarque. Lorsque le dénominateur d'une fraction diminue, la fraction augmente; et elle peut augmenter indéfiniment, si le dénominateur diminue indéfiniment. D'après cela, on dit quelquefois que, le dénominateur devenant nul, la fraction devient *infinie;* et l'on écrit qu'elle a pour solution $x=\infty$. C'est là une locution incorrecte; *la fraction dont le dénominateur est nul ne représente rien.* Si les données d'un problème varient de telle manière, que le dénominateur de la valeur de l'inconnue tende vers zéro, l'inconnue elle-même augmente sans limites; mais, lorsque le dénominateur est actuellement nul, la solution n'existe pas, et l'équation est impossible.

195. Des solutions indéterminées. Lorsque la formule, qui donne la solution d'un problème, se présente sous la forme fractionnaire, il arrive parfois encore, que certaines hypothèses particulières, faites sur les lettres qu'elle renferme, annulent à la fois son numérateur et son dénominateur. Cette formule prend

alors la forme $x=\frac{0}{0}$. Nous verrons plus loin (chap. VII), que le système qui l'a fournie est alors, en général, *indéterminé*; cependant cette indétermination peut n'être qu'apparente.

Donnons des exemples de ces deux cas.

1[illegible]. Problème XV. *On a deux lingots; le premier contient* a *grammes d'or et* b *grammes d'argent; le second contient* a' *grammes d'or et* b' *grammes d'argent. Quel poids de chacun de ces lingots faut-il prendre pour en former un troisième, contenant* α *grammes d'or et* β *grammes d'argent?*

Soient x et y les poids à prendre dans le premier et dans le second lingot. Puisque le poids $a+b$ contient a grammes d'or et b grammes d'argent, le poids x, extrait du même lingot, contiendra $\frac{ax}{a+b}$ en or, $\frac{bx}{a+b}$ en argent.

De même, le poids y, extrait du second lingot qui pèse $a'+b'$, contiendra $\frac{a'y}{a'+b'}$ en or, et $\frac{b'y}{a'+b'}$ en argent.

On aura donc les deux équations:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ax}{a+b}+\frac{a'y}{a'+b'}&=\alpha, \\ \frac{bx}{a+b}+\frac{b'y}{a'+b'}&=\beta. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Si l'on résout ce système, on trouve :

$$x=\frac{(a+b)(ab'-\beta a')}{ab'-ba'}, \qquad y=\frac{(a'+b')(a\beta-b\alpha)}{ab'-ba'}.$$

Discussion. Si l'on fait l'hypothèse, $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{\alpha}{\beta}$, les numérateurs et les dénominateurs des deux formules sont nuls; de sorte qu'on a :

$$x=\frac{0}{0}, \qquad y=\frac{0}{0}.$$

Pour interpréter ce résultat, remarquons que l'hypothèse admise a pour conséquences :

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{a+b}&=\frac{a'}{a'+b'}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \\ \frac{b}{a+b}&=\frac{b'}{a'+b'}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}; \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

et que, si l'on remplace dans les équations [1] les coefficients des inconnues par leurs valeurs $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, tirées des relations [2], les équations se réduisent toutes deux à l'équation unique :

$$x+y=\alpha+\beta. \qquad [3]$$

Il en résulte (1[illegible]), que le système [1] est indéterminé. Mais *le problème lui-même est indéterminé*, et admet une infinité de solutions. En effet, l'hypothèse admise exprime, que le rapport de l'or à l'argent est le même dans les trois

lingots; donc, quelles que soient les quantités que l'on prenne dans chacun des deux premiers, elles formeront évidemment un alliage au même titre. Ces quantités ne seront astreintes qu'à vérifier l'équation [3].

197. Problème XVI. *Calculer la surface d'un trapèze dont on donne les bases* B *et* b, *et la hauteur* h, *en la considérant comme la différence des surfaces des deux triangles que l'on obtient, en prolongeant les deux côtés non parallèles jusqu'à leur rencontre.*

Désignons par x l'aire cherchée; et prenons pour inconnues auxiliaires les hauteurs y et z des deux triangles. Les surfaces de ces triangles ayant pour expressions $\frac{1}{2}$ By et $\frac{1}{2}$ bz, on a d'abord l'équation :

$$x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{B}y - bz). \qquad [1]$$

Comme les deux triangles sont semblables, les bases sont proportionnelles aux hauteurs; donc

$$\frac{y}{z} = \frac{\mathrm{B}}{b}. \qquad [2]$$

Enfin, la hauteur h étant la différence des hauteurs y et z, on a :

$$y - z = h. \qquad [3]$$

Pour éliminer les inconnues auxiliaires, on remarque que l'équation [2] donne :

$$\frac{y-z}{y} = \frac{\mathrm{B}-b}{\mathrm{B}}, \qquad \frac{y-z}{z} = \frac{\mathrm{B}-b}{b};$$

d'où, en vertu de l'équation [3] :

$$y = \frac{\mathrm{B}h}{\mathrm{B}-b}, \qquad z = \frac{bh}{\mathrm{B}-b}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation [1], on obtient enfin :

$$x = \frac{h}{2} \cdot \frac{\mathrm{B}^2 - b^2}{\mathrm{B}-b}. \qquad [4]$$

Discussion. Tant que b n'est pas égal à B, cette formule donne, pour la surface du trapèze, une valeur parfaitement déterminée. Mais si l'on suppose $b = \mathrm{B}$, la formule se présente sous la forme $x = \frac{0}{0}$; et le problème paraît indéterminé. Cependant *cette indétermination n'est qu'apparente;* car, dans ce cas, le trapèze devient un parallélogramme, dont la surface est égale à Bh. On peut, d'ailleurs, tirer de la fraction cette expression de la surface, si l'on remarque que le facteur $(\mathrm{B}-b)$ divise $(\mathrm{B}^2 - b^2)$, et qu'en supprimant ce facteur commun, il vient :

$$x = \frac{h}{2}(\mathrm{B}+b),$$

formule connue de l'aire du trapèze, laquelle devient effectivement, $x = \mathrm{B}h$, dans le cas où $b = \mathrm{B}$.

198. Remarque. On voit que, lorsqu'on rencontre une formule, qui, par suite d'hypothèses particulières, prend la forme

$\frac{0}{0}$, il ne faut pas se hâter d'affirmer que le problème, dont elle donne la solution, est alors indéterminé. Il peut arriver que l'indétermination ne soit qu'apparente, et qu'elle tienne, comme dans l'exemple précédent, à la présence d'un facteur commun aux deux termes, facteur qui devient nul en vertu des hypothèses admises. *On doit alors, avant toute hypothèse, supprimer ce facteur commun, et faire ensuite, dans la formule ainsi simplifiée, les hypothèses convenues : on obtiendra la* VRAIE VALEUR *de la fraction, pour ce cas particulier.*

Supposons, par exemple, qu'on ait trouvé comme solution d'un problème :

$$x = \frac{a^3 - 3a^2 + 4a - 2}{a^2 + 3a - 4},$$

et que la discussion amène à faire l'hypothèse, $a = 1$. Les deux termes s'annulent, et la fraction prend la forme $\frac{0}{0}$. Or, les deux termes étant des polynomes entiers en a, on sait (**76**) qu'ils sont divisibles par $(a-1)$. On effectuera donc cette division, et l'on trouvera la formule simplifiée :

$$x = \frac{a^2 - 2a + 2}{a + 4},$$

formule qui, pour $a = 1$, prend la valeur $x = \frac{1}{5}$.

EXERCICES.

I. Deux vases, de capacités v et v', contiennent chacun un mélange d'eau et de vin, dans le rapport de m à n pour le premier, et dans le rapport de m' à n' pour le second. Quelle capacité x doit-on donner à deux autres vases égaux entre eux, pour que, les remplissant à la fois, l'un dans le premier, l'autre dans le second, et versant dans chacun d'eux ce qui a été pris dans l'autre, la proportion de l'eau au vin devienne la même dans les deux vases? Montrer, *à priori*, que le résultat doit être indépendant de m, n, m', n'.

On trouve l'équation :

$$\frac{\dfrac{m(v-x)}{m+n} + \dfrac{m'x}{m'+n'}}{\dfrac{m'(v'-x)}{m'+n'} + \dfrac{mx}{m+n}} = \frac{\dfrac{n(v-x)}{m+n} + \dfrac{n'x}{m'+n'}}{\dfrac{n'(v'-x)}{m'+n'} + \dfrac{nx}{m+n}},$$

et la formule :

$$x = \frac{vv'}{v + v'}.$$

II. Les aiguilles des heures, des minutes et des secondes sont toutes trois sur le chiffre XII du cadran. On demande après combien de temps l'aiguille des secondes divisera en deux parties égales l'angle formé par les deux autres.

En désignant par x le nombre de secondes écoulées, on trouve :

$$x = 60^s + \frac{780^s}{1427}.$$

III. Trois mobiles parcourent une même ligne droite, d'un mouvement uniforme, avec des vitesses v, v', v''. Ils sont actuellement à des distances a, a', a'' d'un point O de cette droite, dont ils s'éloignent tous les trois. On demande après combien de temps le premier sera aux $\frac{2}{5}$ de la distance qui sépare les deux autres.

En désignant par x le temps écoulé, on trouve :

$$x = \frac{2a' + 3a'' - 5a}{5v - 2v' - 3v''},$$

si, après ce temps, le troisième mobile est en avant du second;

et, au contraire, $$x = \frac{3a' + 2a'' - 5a}{5v - 3v' - 2v''},$$

si, après ce temps, le second mobile est en avant du troisième.

Il peut y avoir deux solutions, ou une seule; il peut ne pas y en avoir du tout : on examinera les conditions de ces différents cas.

On généralisera la solution, en supposant que les mobiles ne marchent pas tous dans le même sens.

IV. Un parallélipipède rectangle, dont les arêtes sont a, b, c, étant donné, trouver le côté x d'un cube, tel que les surfaces des deux solides soient dans le même rapport que leurs volumes.

On trouve : $$x = \frac{3abc}{ab + ac + bc}.$$

V. Trouver une proportion, dont les quatre termes surpassent également les quatre nombres a, b, c, d.

En désignant par x le nombre qu'il faut ajouter à chacun de ceux-ci, on trouve :

$$x = \frac{bc - ad}{a + d - b - c}.$$

Discuter la solution, 1° lorsque $bc = ad$, 2° lorsque $a + d = b + c$.

VI. n pierres sont rangées en ligne droite à d mètres de distance les unes des autres. On propose de déterminer, sur cette droite, la position d'un point X, tel qu'il y ait deux fois plus de chemin à faire pour transporter successivement chaque pierre au point X, que pour les transporter à la place occupée par la première d'entre elles. On supposera, dans les deux cas, que l'on parte de cette première pierre.

Si l'on désigne par x la distance du point X à la première pierre, en supposant ce point au delà de la dernière, on trouve :

$$x = \frac{3n(n-1)}{2n-1} d.$$

On généralisera, en supposant que le rapport des chemins à parcourir est m au lieu de 2; on trouvera :

$$x = \frac{(m+1)n(n-1)}{2n-1}d;$$

et l'on discutera les conditions de possibilité du problème. Si la solution est négative, est-il possible de l'interpréter?

VII. Il faut un nombre d'hommes égal à a, ou un nombre de femmes égal à b, pour faire, en n jours, un ouvrage représenté par m. Combien faut-il adjoindre de femmes à $(a-p)$ hommes, pour faire, en $(n-p)$ jours, un ouvrage représenté par $(m+p)$?

On trouve :
$$x = \frac{bp}{a}\left\{1 + \frac{(m+n)a}{m(n-p)}\right\}.$$

VIII. Deux horloges A et B sonnent l'heure en même temps, et l'on entend en tout dix-neuf coups. Déduire de là l'heure qu'elles marquaient, sachant que l'horloge A retarde sur l'horloge B de deux secondes, et que les coups de A se succèdent à trois secondes d'intervalle, tandis que ceux de B se suivent à quatre secondes d'intervalle. On admet enfin, que l'oreille ne perçoit qu'un seul son, lorsque les horloges sonnent dans la même seconde.

En désignant par x l'heure ou le nombre de coups sonnés par chaque horloge, on remarque que le nombre des coups perdus pour l'oreille est 1, augmenté du plus grand nombre entier contenu dans $\frac{2x-6}{7}$; et l'on en conclut que $x=11$.

IX. Trouver trois nombres x, y, z, en progression arithmétique, tels que le premier soit au troisième comme 5 est à 9, et que la somme des trois nombres soit égale à 63.

On trouve : $x=15,\quad y=21,\quad z=27.$

X. On donne la suite :

$$a+b,\ ap+bq,\ ap^2+bq^2,\ ap^3+bq^3,\ ap^4+bq^4,\ldots;$$

et l'on propose de trouver deux nombres x et y, tels que chaque terme de cette suite puisse s'obtenir en multipliant le précédent par x, et l'antéprécédent par y, et en ajoutant les résultats.

On forme le troisième et le quatrième terme d'après cette loi, et l'on trouve.

$$x=p+q,\quad y=-pq;$$

puis l'on prouve qu'en effet ces multiplicateurs donnent tous les termes de la série.

XI On donne la suite :

$$a+b+c,\ ap+bq+cr,\ ap^2+bq^2+cr^2,\ ap^3+bq^3+cr^3\ldots;$$

et l'on demande de trouver trois nombres x, y, z, tels que chaque terme de cette suite s'obtienne en multipliant le précédent par x, l'antéprécédent par y, et celui qui précède de trois rangs par z, et en ajoutant les résultats.

On trouve : $x=p+q+r,\quad y=-pq-pr-qr,\quad z=pqr.$

XII. Un train T, dont la vitesse est v, part après un autre train T', dont la vitesse est v'; et le retard est calculé de manière qu'ils arrivent en même temps à la destination. Le train T' est obligé de ralentir de moitié sa vitesse, après avoir fait les deux tiers de la course: et il y a rencontre des trains, a lieues avant la fin du voyage. Trouver la longueur totale x du trajet.

On trouve :
$$x = 6a - 3a\frac{v'}{v}$$

XIII. Pour faire un certain ouvrage, A emploie m fois autant de temps que B et C réunis; B emploie n fois autant de temps que A et C; C emploie p fois autant de temps que A et B. Trouver une relation entre m, n et p.

On trouve :
$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1} = 1.$$

XIV. On donne des points A, B, C, D,... situés sur une ligne droite, à des distances a, b, c, d.... d'un point O de cette droite. Trouver, sur cette droite, un point X tel, que sa distance x à un point quelconque M de la droite donnée soit la moyenne des distances des points A, B, C, D,.... au point M. Montrer, qu'à l'aide de conventions convenables, on peut résoudre le problème par une seule formule, quelles que soient les positions des points A, B, C, D,.... à droite ou à gauche de O.

La formule est :
$$x = \frac{a + b + c + d + \dots}{n},$$

n étant le nombre des points considérés : elle est indépendante de la position du point M.

XV. Deux triangles rectangles ont les côtés de l'angle droit dirigés suivant les mêmes droites, et représentés par a, b pour le premier, et par a', b' pour le second. On propose d'abaisser du point de rencontre des hypoténuses des perpendiculaires sur les côtés, de calculer leurs longueurs, et de discuter les différents cas qui peuvent se présenter.

Les formules sont, en désignant par x la parallèle aux côtés a, a', et par y la parallèle aux côtés b, b' :

$$x = \frac{aa'(b'-b)}{ab'-ba'}, \qquad y = \frac{bb'(a-a')}{ab'-ba'}.$$

CHAPITRE VI.

DES INÉGALITÉS.

§ I. Principes sur les inégalités considérées isolément.

199. Définition. On dit qu'un nombre a est plus grand qu'un nombre b, quels que soient leurs signes, lorsque la différence $(a - b)$ est positive.

200. Corollaire : 1° *Un nombre positif quelconque est plus grand qu'un nombre négatif quelconque.* Ainsi :

$$1 > -8; \qquad [1]$$

car la différence $1 - (-8)$ est (20) égale à $1 + 8$: elle est positive.

2° *Un nombre négatif est d'autant plus grand que sa valeur absolue est plus petite.* Ainsi :

$$-7 > -20; \qquad [2]$$

car la différence $-7 - (-20)$ est (20) égale à $+20 - 7$: elle est positive.

3° *On doit regarder zéro comme plus grand que tout nombre négatif.* Ainsi :

$$0 > -4; \qquad [3]$$

car la différence $0 - (-4)$ est (20) égale à $0 + 4$; elle est positive.

De là résulte que, si l'on écrit les nombres tant positifs que négatifs de la manière suivante :

$$-\infty, \ldots\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots \infty,$$

un nombre quelconque, pris dans cette suite, est plus grand que tout nombre placé à sa gauche, et plus petit que tout nombre placé à sa droite.

On exprime ordinairement qu'un nombre a est positif, et qu'un nombre b est négatif, par les formules : $a > 0$, $b < 0$.

201. Inégalités renfermant une inconnue. Lorsqu'une expression, qui dépend d'un nombre inconnu, doit être plus grande ou plus petite qu'une autre, cette condition, que l'on nomme

inégalité, permet, en général, d'assigner des limites, entre lesquelles l'inconnue doit être ou n'être pas comprise. Nous en donnerons dans ce chapitre quelques exemples.

202. Principe I. *On peut, sans altérer les conditions qu'exprime une inégalité, augmenter ou diminuer ses deux membres d'un même nombre.* En effet, l'inégalité $a > b$, est équivalente, par définition, à $a - b > 0$. Or quel que soit m, on a :

$$a - b = a + m - b - m = (a + m) - (b + m);$$

donc :

$$(a + m) - (b + m) > 0,$$

ou, d'après la définition :

$$a + m > b + m. \qquad [4]$$

Il résulte de là, qu'*on peut faire passer un terme d'un membre d'une inégalité dans l'autre, en changeant son signe*, comme s'il s'agissait d'une équation.

203. Principe II. *On peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre, pourvu qu'il soit positif.*

En effet, l'inégalité $a > b$ équivaut à $a - b > 0$. Or, si l'on multiplie $(a - b)$ par un facteur positif m, le produit est positif. Donc on a : $(a - b)m > 0$, ou $am - bm > 0$,

ou, d'après la définition :

$$am > bm. \qquad [5]$$

On peut aussi multiplier les deux membres de l'inégalité par un facteur négatif, mais il faut changer le sens de l'inégalité. Car si l'on a :

$$a > b, \quad \text{ou} \quad a - b > 0,$$

le produit de $(a - b)$ par un facteur négatif m sera négatif. On aura donc :

$$(a - b)m < 0, \quad \text{ou} \quad am - bm < 0,$$

ou, enfin :

$$am < bm. \qquad [6]$$

Ces principes permettent de *chasser les dénominateurs d'une inégalité*, comme s'il s'agissait d'une équation, quand on connaît

le signe du multiplicateur. Les mêmes principes s'appliquent à la division des deux membres d'une inégalité par m; car la division par m revient à la multiplication par $\frac{1}{m}$, et les deux nombres m et $\frac{1}{m}$ sont toujours de même signe.

204. PRINCIPE III. *Lorsque les deux membres d'une inégalité sont positifs, on peut les élever à une même puissance* m^{me}, *quel que soit* m. En effet, plus un nombre est grand, plus sa puissance m^{me} est grande. Ainsi, $7 > 3$ donne $7^4 > 3^4$.

Lorsque les membres ne sont pas tous deux positifs, il faut distinguer plusieurs cas.

1° *Quels que soient les signes des deux membres, on peut les élever à une même puissance* m^{me}, *lorsque* m *est impair*. Car les deux membres, après l'opération, conservent leurs signes, et par suite, le sens de leur inégalité. Par exemple,

$$\left.\begin{array}{llll} \text{si} & 7 > -13, & \text{on en conclut} & 7^3 > (-13)^3; \\ \text{si} & -7 > -13, & \text{»} & (-7)^3 > (-13)^3. \end{array}\right\} \quad [7]$$

2° Mais si l'on a à élever les deux membres d'une inégalité à une même puissance *de degré pair*, il faut distinguer encore.

Quand les deux membres sont négatifs, l'inégalité change de sens; car les deux membres deviennent positifs, après l'opération Ainsi, de l'inégalité

$$-7 > -13$$

on conclut successivement :

$$13 > 7, \quad 13^4 > 7^4, \quad (-13)^4 > (-7)^4,$$

et, par suite, $$(-7)^4 < (-13)^4. \quad [8]$$

Si les deux membres sont de signes différents, on ne peut plus donner de règle. L'inégalité peut changer ou ne pas changer de sens, ou même se transformer en égalité. Ainsi l'on a :

$$\left.\begin{array}{lll} 7 > -3 & \text{et} & 7^4 > (-3)^4, \\ 7 > -13 & \text{et} & 7^4 < (-13)^4, \\ 7 > -7 & \text{et} & 7^4 = (-7)^4. \end{array}\right\} \quad [9]$$

205. PRINCIPE IV. 1° *Quels que soient les signes des deux membres*

d'une inégalité, on peut en extraire une racine d'indice impair; car les deux racines ont le même signe que les deux nombres. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{llll} 27 > 8 \text{ donne} & \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{8}, & \text{ou} & 3 > 2, \\ 27 > -8 \quad \text{»} & \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{-8}, & \text{ou} & 3 > -2, \\ -8 > -27 \quad \text{»} & \sqrt[3]{-8} > \sqrt[3]{-27}, & \text{ou} & -2 > -3. \end{array}\right\} \quad [10]$$

2° *Si l'indice est pair, il faut, pour que les racines existent, que les deux membres soient positifs* (96). Et alors, *chaque racine a deux valeurs égales et de signes contraires.* Dans ce cas, *l'inégalité conservera son sens ou en changera, selon que l'on considérera les valeurs positives ou les valeurs négatives des racines.* Ainsi :

l'inégalité $36 > 25,$

$$\text{donne :} \left\{\begin{array}{lll} \sqrt{36} > \sqrt{25} & \text{ou} & 6 > 5, \\ -\sqrt{36} < -\sqrt{25} & \text{ou} & -6 < -5. \end{array}\right\} \quad [11]$$

Mais, *si l'on prend des signes différents pour les deux racines, le terme négatif est toujours le plus petit.* Ainsi

l'inégalité, $36 > 25,$

$$\text{donne :} \left\{\begin{array}{lll} \sqrt{36} > -\sqrt{25}, & \text{ou} & 6 > -5, \\ \sqrt{25} > -\sqrt{36}, & \text{ou} & 5 > -6. \end{array}\right\} \quad [12]$$

§ II. Principes sur les inégalités simultanées.

206. Principe V. *On peut additionner membre à membre deux inégalités de même sens : la nouvelle inégalité a le même sens que chacune d'elles.*

Soient, en effet, les deux inégalités :

$$a > b, \qquad c > d;$$

elles équivalent aux suivantes :

$$a - b > 0, \qquad c - d > 0;$$

or la somme de deux quantités positives est positive; donc on a :

$$a - b + c - d > 0,$$

ou

$$a + c > b + d. \quad [13]$$

Mais cette nouvelle inégalité ne peut pas, comme lorsqu'il

s'agit d'équations, remplacer l'une des deux proposées. En d'autres termes, les deux systèmes,

$$\begin{cases} a > b, \\ c > d, \end{cases} \qquad \begin{cases} a > b, \\ a + c > b + d, \end{cases}$$

ne sont pas équivalents. Le second est une conséquence du premier, mais le premier n'est pas une conséquence du second.

Si les deux inégalités sont de sens contraires, il n'y a pas de règle à donner. On a, en effet :

$$\left.\begin{array}{l} 7 > 3, \\ 8 < 13, \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad 7 + 8 < 3 + 13;$$

$$\left.\begin{array}{l} 7 > 3, \\ 8 < 12, \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad 7 + 8 = 3 + 12;$$

$$\left.\begin{array}{l} 7 > 3, \\ 8 < 10, \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad 7 + 8 > 3 + 10.$$

207. PRINCIPE VI. *On peut soustraire membre à membre d'une inégalité une autre inégalité de sens contraire : la nouvelle inégalité subsiste dans le sens de la première.*

Soient, en effet, les deux inégalités :

$$a > b, \qquad c < d;$$

elles équivalent aux suivantes :

$$a > b, \qquad d > c;$$

et, par suite (**206**), elles donnent

$$a + d > b + c,$$

ou (**202**)

$$a - c > b - d. \qquad [14]$$

Cette nouvelle inégalité ne peut pas remplacer l'une des deux proposées.

On ne peut pas soustraire une inégalité d'une autre, quand elles sont de même sens (**206**).

208. PRINCIPE VII. *On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens, quand tous les termes sont positifs : l'inégalité nouvelle est de même sens que chacune d'elles.*

En effet, soient : $a > b, \quad c > d;$

puisque c et b sont positifs, on a, en multipliant la première par c, et la seconde par b (**203**) :

$$ac > bc, \qquad bc > bd,$$

et, par suite, $$ac > bd. \qquad [15]$$

Si les quatre termes sont négatifs, l'inégalité nouvelle est de sens contraire à celui des deux proposées. Car en multipliant la première par c et la seconde par b, on a, puisque ces facteurs sont négatifs :

$$ac < bc, \qquad bc < bd,$$

et, par suite, $$ac < bd. \qquad [16]$$

La nouvelle inégalité [15] ou [16] ne peut pas remplacer une des proposées.

On ne saurait donner de règle générale, quand les termes ne sont pas tous positifs ou tous négatifs. On ne peut rien dire non plus, quand les inégalités sont de sens contraires.

209. Principe VIII. *On peut diviser membre à membre une inégalité par une autre de sens contraire, quand tous les termes sont positifs : La nouvelle inégalité a le même sens que la première.*

Soient, en effet : $a > b, \quad c < d;$

on peut écrire : $a > b, \quad d > c.$

et, par suite (**208**), $ad > bc;$

d'où l'on tire, en divisant les deux membres par cd (**203**) :

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \qquad [17]$$

Si les quatre termes sont négatifs, l'inégalité nouvelle a le sens de la seconde : car, en faisant la multiplication, on a (**208**) :

$$ad < bc;$$

et, en divisant par cd, qui est positif, il vient :

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

On ne peut pas donner de règle générale dans les autres cas.

§ III. Des inégalités du premier degré à une inconnue.

210. Résolution de l'inégalité. Une inégalité à une inconnue est dite du *premier degré*, lorsqu'elle peut se ramener à la forme

$$ax+b>a'x+b',$$

a, b, a', b', désignant des nombres donnés qui peuvent être positifs ou négatifs.

Pour *résoudre* cette inégalité, on fait passer des termes contenant l'inconnue d'un côté, les termes connus de l'autre (**202**); et l'on a :

$$(a-a')x>b'-b.$$

Puis on distingue deux cas :

1° Si $(a-a')$ est positif, on a, en divisant (**203**) par $(a-a')$:

$$x>\frac{b'-b}{a-a'}.$$

2° Si $(a-a')$ est négatif, on a, au contraire (**203**) :

$$x<\frac{b'-b}{a-a'}.$$

Ainsi, *pour satisfaire à l'inégalité, il suffit de prendre* x *supérieur ou inférieur à une certaine limite.* On peut remarquer que cette limite est précisément la valeur de x, qui rendrait les deux membres égaux.

211. Problème. Nous résoudrons, comme application, le problème suivant : *Deux points* A *et* B *sont situés à une distance* 2c ; *on sait qu'un point* M *est tel que* MA + MB = 2a, a *étant une longueur donnée, plus grande que* c. *On demande entre quelles limites peuvent varier* AM *et* BM.

Supposons AM > BM. Posons : AM $= x$, BM $= y$. On a d'abord, d'après l'énoncé :

$$x+y=2a. \qquad [1]$$

De plus, pour que le triangle AMB soit possible, il faut que chaque côté soit plus petit que la somme des deux autres, c'est-à-dire que l'on ait :

$$2c<x+y,\quad y<2c+x,\quad x<2c+y.$$

Or la première de ces inégalités est évidente, d'après l'équation [1] ; la seconde est évidente, puisque y est plus petit que x. Reste donc la troisième,

$$x<2c+y. \qquad [2]$$

Si l'on remplace y par sa valeur $(2a - x)$, cette inégalité devient :

$$x < 2c + 2a - x\,;$$

d'où $$x < a + c. \qquad [3]$$

Mais y, qui est égal à $(2a - x)$, est d'autant plus grand que x est plus petit. Donc y doit être plus grand que $[2a - (a + c)]$, c'est-à-dire que $(a - c)$. Ainsi :

$$y > a - c. \qquad [4]$$

Telles sont les limites cherchées.

EXERCICES.

I. Démontrer que la moyenne arithmétique entre deux nombres positifs inégaux est plus grande que leur moyenne proportionnelle.

On s'appuie sur l'inégalité, $(a - b)^2 > 0$.

II. Étant donnés deux nombres a, b, positifs, $a > b$, déduire de l'inégalité,

$$\frac{x + a}{\sqrt{a^2 + x^2}} > \frac{x + b}{\sqrt{b^2 + x^2}},$$

les limites entre lesquelles la valeur de x doit être comprise. Les radicaux sont pris avec le signe $+$.

On trouve que x doit être négatif, ou plus grand que $\sqrt{ab}$.

III. Démontrer que $\sqrt[m+n+p+q]{abcd}$ est comprise entre la plus grande et la plus petite des quatre expressions $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$.

On démontre cette propriété pour les logarithmes de ces expressions ; et l'on en tire la conséquence pour les expressions elles-mêmes.

IV. Démontrer que l'on a toujours :

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots. < \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots.}\ \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots},$$

à moins que l'on n'ait : $$\frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'} = \frac{a''}{\alpha''} = \ldots.$$

On suppose d'abord a, a', a'', ..., α, α' α'', ... positifs ; et l'on vérifie l'inégalité, en élevant les deux membres au carré : puis on généralise.

V. Prouver que $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$ est toujours positif, quelles que soient les valeurs positives de x et de y.

On le démontre en décomposant l'expression en facteurs.

VI. Prouver que l'on a : $3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2$, quelles que soient les valeurs, positives ou négatives, de a.

Même mode de démonstration.

VII. Démontrer que l'on a : $abc > (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$, quels que soient les nombres positifs inégaux a, b, c.

On s'appuie sur des inégalités évidentes, de la forme, $a^2 > a^2 - (b - c)^2$.

CHAPITRE VII.

DISCUSSION DES FORMULES GÉNÉRALES.

§ I. Discussion de la formule générale de résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

212. Formule générale. Une équation du premier degré à une inconnue ne peut renfermer que deux sortes de termes, savoir : des termes qui contiennent l'inconnue et des termes qui ne la contiennent pas. Si donc on réduit, dans chaque membre, les termes semblables, la forme la plus générale de l'équation sera :

$$ax+b=a'x+b'. \qquad [1]$$

On en tire : $(a-a')x=b'-b$;

et divisant par $(a-a')$, on a la formule :

$$x=\frac{b'-b}{a-a'}. \qquad [2]$$

Mais cette formule n'est équivalente à l'équation [1], que dans le cas où $(a-a')$ n'est pas nul (**124**).

213. Discussion de la formule. Lorsque a' n'est pas égal à a, la formule [2] représente un nombre positif, nul ou négatif, qui, substitué dans l'équation [1], et traité d'après les règles convenues, rendra le premier membre égal au second. Le seul cas que l'on doive examiner à part est donc celui où $(a-a')=0$. Mais alors deux hypothèses se présentent :

1° $(a-a')$ *est nul, sans que* $(b'-b)$ *le soit.* La formule [2] donne :

$$x=\frac{b'-b}{0};$$

ce qui ne signifie rien. Si l'on remonte à l'équation pour interpréter ce résultat, on voit que, a' étant égal à a, il vient :

$$ax+b=ax+b',$$

ce qui ne peut avoir lieu, puisque b' n'est pas égal à b.

Donc *l'équation est impossible ; et l'impossibilité se manifeste, dans la formule, par la forme*, $x = \frac{m}{0}$.

2° $(a - a')$ *est nul, en même temps que* $(b' - b)$. La formule devient, dans ce cas : $$x = \frac{0}{0};$$

ce qui ne signifie rien. Si l'on remonte à l'équation, on voit qu'elle devient : $$ax + b = ax + b.$$

Donc *l'équation est satisfaite, quel que soit* x ; *et l'indétermination se manifeste par la forme*, $x = \frac{0}{0}$.

Ainsi, une équation du premier degré à une inconnue admet une solution unique et déterminée, ou elle n'en admet aucune, ou elle en admet une infinité.

§ II. Discussion complète des formules générales de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

214. Formules générales. On sait (143) qu'un système de deux équations à deux inconnues x, y, peut toujours se ramener à la forme :

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c'. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Appliquons à ce système l'une des méthodes connues ; par exemple, la méthode par addition et soustraction. Pour cela, multiplions la première équation par b', et la seconde par b, et retranchons le second résultat du premier ; nous aurons :

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Multiplions, au contraire, la première équation par a' et la seconde par b', et retranchons le premier résultat du second ; nous aurons :

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'; \quad \text{d'où} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Ainsi, le système [1] a pour solution le système :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \qquad [2]$$

Les formules [2] sont les formules générales de la solution. Elles ne sont légitimes qu'autant que $(ab' - ba')$ n'est pas égal à zéro On vérifie aisément qu'elles satisfont aux équations dans ce cas.

215. RÈGLE POUR COMPOSER LES FORMULES. On obtient facilement ces formules à l'aide des remarques suivantes :

1° Pour former le dénominateur commun $(ab' - ba')$, on écrit, l'une à la suite de l'autre, les deux *permutations* ab et ba des deux lettres a et b, en les séparant par le signe —, et en accentuant la dernière lettre de chaque terme.

2° Pour former le numérateur de la valeur de chaque inconnue, on remplace, dans l'expression $(ab' - ba')$, les coefficients qui, dans les équations, multiplient cette inconnue, par le terme tout connu de l'équation correspondante. Ainsi, pour la valeur de x, on remplace a et a' par c et c' : et, pour la valeur de y, on remplace b et b' par c et c'.

216. MARCHE A SUIVRE POUR LA DISCUSSION DES FORMULES. Lorsque le binome $(ab' - ba')$ n'est pas nul, les formules [2] ne donnent lieu à aucune difficulté ; elles fournissent pour x et pour y des valeurs déterminées. Le système [1] a une solution et une seule. Il n'y a donc à examiner que le cas où $ab' - ba' = 0$.

Nous supposerons d'abord que cette égalité ait lieu, sans qu'aucun des coefficients a, b, a', b', soit nul ; elle est alors équivalente à la suivante :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

laquelle exprime que *les coefficients des deux inconnues, dans les deux équations, sont respectivement proportionnels.*

Nous examinerons ce que deviennent, dans cette hypothèse, les formules [2] ; et nous chercherons à interpréter les résultats en remontant aux équations [1].

217. THÉORÈME I. *Dans le cas où* $ab' - ba' = 0$, *les numérateurs des valeurs* [2] *de* x *et de* y *sont nuls tous deux à la fois, ou ne sont nuls ni l'un ni l'autre.*

Pour le prouver, remarquons que la condition $ab'-ba'=0$, donne :

$$b'=\frac{ba'}{a};$$

donc, si l'on désigne par N_x et N_y les numérateurs de x et de y, on a, en remplaçant, dans N_x, b' par sa valeur :

$$N_x=cb'-bc'=\frac{cba'}{a}-bc'=\frac{cba'-abc'}{a}=\frac{b(ca'-ac')}{a}.$$

Or, $(ca'-ac')$ est égal au numérateur de y, changé de signe; donc :

$$N_x=-\frac{b}{a}N_y.$$

Comme b et a ne sont nuls ni l'un ni l'autre, on conclut de là que si N_y est nul, N_x l'est aussi ; mais que, si N_y n'est pas nul, N_x ne peut l'être non plus. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de là, que *les valeurs de* x *et de* y *se présentent à la fois sous la forme* $\frac{0}{0}$, *ou à la fois sous la forme* $\frac{m}{0}$.

218. Théorème II. *Dans le cas où* $ab'-ba'=0$, *les deux équations* [1] *sont incompatibles, ou elles rentrent l'une dans l'autre.*

Pour le prouver, substituons à b' sa valeur dans la seconde des équations [1] ; elle devient :

$$a'x+\frac{ba'}{a}y=c', \quad \text{ou} \quad aa'x+ba'y=ac'.$$

Mais, en multipliant la première des équations [1] par a', on a :

$$aa'x+ba'y=ca'.$$

Ainsi, dans ce cas, les équations [1] sont équivalentes à deux autres équations qui ont le même premier membre, et dont les seconds membres sont ac' et ca'. Si donc ac' et ca' ne sont pas égaux, les deux équations sont incompatibles ; mais si $ac'=ca'$, elles sont identiques. C'est ce qu'il fallait démontrer.

219. Conséquences. 1° Lorsque ac' n'est pas égal à ca', N_y n'est pas nul ; et, par suite (**217**), N_x ne l'est pas non plus. Donc, *lorsque les deux équations* [1] *sont incompatibles, les formules* [2] *se*

présentent toutes deux sous la forme $\frac{m}{0}$. *Cette forme est donc le symbole de l'impossibilité.*

2° Lorsque $ac' = ca'$, N_x est nul, ainsi que N_y (**217**). *Donc, lorsque les équations* [1] *rentrent l'une dans l'autre, les formules* [2] *se présentent toutes deux sous la forme* $\frac{0}{0}$. *Cette forme est donc le symbole de l'indétermination.*

Un système de deux équations à deux inconnues admet donc une solution unique et déterminée, ou bien il n'en admet aucune, ou bien il en admet une infinité. Mais nous avons supposé, dans cette discussion, qu'aucun des coefficients des inconnues n'est égal à zéro ; il nous reste à examiner maintenant les cas particuliers où quelques-uns d'entre eux seraient nuls, en même temps que $(ab' - ba')$.

220. Cas où l'un des coefficients est nul en même temps que $(ab' - ba')$. Supposons qu'on ait, à la fois,

$$ab' - ba' = 0, \qquad b' = 0;$$

il en résulte que $ba' = 0$; donc : ou $a' = 0$, ou $b = 0$.

1° $a' = 0$, les formules [2] deviennent :

$$x = \frac{-bc'}{0}, \qquad y = \frac{ac'}{0}.$$

Donc, si c' n'est pas nul, elles prennent toutes deux la forme $\frac{m}{0}$: et, si $c' = 0$, elles prennent toutes deux la forme $\frac{0}{0}$. Or les équations deviennent alors :

$$ax + by = c, \qquad 0 = c'$$

elles sont donc incompatibles, dans le premier cas, puisque la seconde est absurde; et il n'en existe plus qu'une dans le second cas, puisque la seconde est identique. Donc, *les formes* $\frac{m}{0}$ *et* $\frac{0}{0}$, *que prennent ici les formules, sont encore le symbole, l'une de l'impossibilité, l'autre de l'indétermination.*

2° Si $b = 0$, les formules deviennent :

$$x = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{0};$$

donc, si ca' n'est pas égal à ac', y se présente sous la forme $\frac{m}{0}$, tandis que x prend la forme $\frac{0}{0}$. C'est une exception au théorème (217). Or, dans ce cas, les équations deviennent :

$$ax = c, \qquad a'x = c';$$

elles ne contiennent que l'inconnue x, et elles donnent :

$$x = \frac{c}{a}, \qquad x = \frac{c'}{a'};$$

mais $\frac{c}{a}$ n'est pas égal à $\frac{c'}{a'}$, puisque ca' n'est pas égal à ac'; donc *les équations sont incompatibles ; et l'impossibilité se manifeste ici par les formes simultanées* $\frac{m}{0}$ *et* $\frac{0}{0}$.

Mais, si $ac' = ca'$, les deux formules prennent la forme $\frac{0}{0}$; et les deux équations se réduisent à une seule :

$$x = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}.$$

Cette équation détermine la valeur de x, *mais la valeur de* y *reste indéterminée. Il y a donc ici une indétermination partielle, qui se manifeste par la forme* $\frac{0}{0}$. On doit remarquer que cette forme affecte les deux formules, bien que la valeur de x soit parfaitement déterminée.

Cette partie de la discussion comprend le cas où les coefficients des deux inconnues sont nuls dans une même équation, et celui où les coefficients d'une même inconnue sont nuls dans les deux équations. Nous n'avons plus à examiner que le cas suivant.

221. Cas où, en même temps que $ab' - ba' = 0$, le coefficient de x dans l'une des équations et celui de y dans l'autre sont égaux à zéro. Supposons par exemple :

$$ab' - ba' = 0, \qquad a = 0, \qquad b' = 0.$$

Il en résulte, que $ba' = 0$, c'est-à-dire que le second coefficient

de l'une des inconnues est nul aussi. Soit $b=0$; alors les formules deviennent :

$$x=\frac{0}{0},\qquad y=\frac{-ca}{0};$$

et les équations, $0=c,\quad a'x=c'.$

Si donc ni c ni a' ne sont nuls, la première équation est absurde; *et il y a impossibilité, laquelle se manifeste par les formes simultanées* $\frac{0}{0}$ *et* $\frac{m}{0}$.

Si c est nul, la première équation est identique; la seconde détermine x; *il y a une indétermination partielle, laquelle se manifeste par la forme* $\frac{0}{0}$.

Si a' est nul, *il y a impossibilité*, bien que les formules se présentent toutes deux sous la forme $\frac{0}{0}$.

222. Tableau de la discussion. On peut résumer la discussion précédente dans le tableau suivant :

Cas généraux.	I. $ab'-ba'\gtrless 0$		$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$; une solution déterminée.
	II. $ab'-ba'=0$		$ac'-ca'\gtrless 0, x=\frac{cb'-bc'}{0}$, $y=\frac{ac'-ca'}{0}$; impossibilité
			$cc'-ca'=0, x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$; indétermination.
Cas particuliers.	$ab'-ba'=0$ $b'=0$	$a'=0$	$c'\gtrless 0, x=\frac{-bc'}{0}$, $y=\frac{ac'}{0}$; impossibilité.
			$c'=0, x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$; indétermination.
		$b=0$	$ac'-ca'\gtrless 0, x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{ac'-ca'}{0}$; impossibilité.
			$ac'-ca'=0, x=\frac{c}{a}$, $y=\frac{0}{0}$; indétermon partielle.
		$a=0$ $b'=0$	$c\gtrless 0, a'\gtrless 0, x=\frac{0}{0}$, $y=-\frac{ca'}{0}$; impossibilité.
			$c=0$, $x=\frac{c'}{a'}$, $y=\frac{0}{0}$; indétermon partielle.
			$a'=0$, $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, impossibilité.

223. Cas où c et c' sont nuls a la fois. En dehors des cas que nous venons d'étudier, on discute encore celui où les termes

tout connus, c et c', sont nuls à la fois. Les formules se présentent sous la forme :

$$x=\frac{0}{ab'-ba'},\qquad y=\frac{0}{ab'-ba'}.$$

Par conséquent, si $ab'-ba'$ n'est pas nul, on a : $x=0$, $y=0$. Mais, si $ab'-ba'=0$, les formules deviennent : $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$.

Pour interpréter ces résultats, remontons encore aux équations. Elles sont, dans ce cas :

$$\begin{cases} ax+by=0, \\ a'x+b'y=0; \end{cases}$$

et elles peuvent s'écrire :

$$x=-\frac{b}{a}y,\qquad x=-\frac{b'}{a'}y.$$

Donc, *si* $\frac{b}{a}$ *n'est point égal à* $\frac{b'}{a'}$, *c'est-à-dire, si* $(ab'-ba')$ *n'est pas nul, ces équations n'ont d'autre solution que* $x=0$, $y=0$. Mais *si* $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, *c'est-à-dire, si* $ab'-ba'=0$, *les deux équations rentrent l'une dans l'autre ; il y a indétermination, laquelle se manifeste par la forme* $\frac{0}{0}$. Il faut remarquer que, *dans ce dernier cas, le rapport des inconnues est déterminé ;* car on a :

$$\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'}.$$

§ III. Discussion sommaire des formules générales de résolution d'un système de trois équations à trois inconnues.

224. Formules générales. Une équation du premier degré à trois inconnues x, y, z, ne peut renfermer que quatre espèces de termes, savoir : des termes en x, des termes en y, des termes en z, et des termes tout connus. Le système des trois équations pourra donc toujours se ramener à la forme :

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=k, \\ a'x+b'y+c'z&=k', \\ a''x+b''y+c''z&=k''. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Employons, pour le résoudre, la méthode de Bezout (154); multiplions la première équation par λ, la deuxième par λ', et ajoutons membre à membre les produits et la troisième :

$$(a\lambda + a'\lambda' + a'')x + (b\lambda + b'\lambda' + b'')y + (c\lambda + c'\lambda' + c'')z = k\lambda + k'\lambda' + k''. \quad [2]$$

Posons ensuite :

$$b\lambda + b'\lambda' + b'' = 0, \qquad c\lambda + c'\lambda' + c'' = 0,$$

d'où nous tirons :

$$\lambda = \frac{c'b'' - b'c''}{cb' - bc'}, \qquad \lambda' = \frac{bc'' - cb''}{cb' - bc'};$$

et, substituons ces valeurs dans l'équation [1], nous trouvons, tous calculs faits :

$$x = \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

On trouverait, par un procédé analogue, les valeurs de y et de z. Mais il vaut mieux remarquer que si, dans la première équation, on change x en y, y en z et z en x, puis a en b, b en c et c en a, cette équation devient : $by + cz + ax = k$, c'est-à dire qu'elle ne change pas. La même observation s'applique aux deux autres. Par conséquent, on aura y en faisant ces permutations dans la formule qui donne x, et l'on aura z en les opérant ensuite dans la valeur de y. On reconnaît ainsi que le dénominateur ne change pas, et l'on trouve le système de solutions :

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},\\
y &= \frac{ak'c'' - ac'k'' + ca'k'' - ka'c'' + kc'a'' - ck'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},\\
z &= \frac{ab'k'' - ak'b'' + ka'b'' - ba'k'' + bk'a'' - kb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.
\end{aligned}\right\} \quad [3]$$

Ces formules ne sont légitimes que si le dénominateur commun n'est pas nul. On vérifie d'ailleurs aisément que, dans ce cas, elles satisfont aux équations [1].

225. Règle pour composer les formules. Pour former le dénominateur commun, on considère les deux *permutations ab* et

ba; on place dans chacune la lettre *c* successivement, à droite, au milieu et à gauche; ce qui donne :

$$abc,\ acb,\ cab, \quad \text{et} \quad bac,\ bca,\ cba.$$

Puis on affecte la seconde lettre d'un accent, et la troisième de deux accents. Enfin on donne alternativement les signes $+$ et $-$ aux différents termes. On a ainsi :

$$D = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

On peut encore former le dénominateur commun d'une autre manière. On remarque, en effet, qu'on peut l'écrire :

$$D = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'');$$

il est donc la somme des produits que l'on obtient, en multipliant respectivement les coefficients a, b, c de la première équation par les différences $(b'c'' - c'b'')$, $(c'a'' - a'c'')$, $(a'b'' - b'a'')$. On forme d'ailleurs ces différences, en multipliant *en croix* les coefficients des deux autres équations qui ne correspondent pas à la même inconnue que celui qu'on a choisi dans la première. Ainsi, les coefficients étant disposés comme il suit :

$$\begin{matrix} a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'', \end{matrix}$$

on prend pour multiplicateur de a, $(b'c'' - c'b'')$, ${}^{1}_{2}\!\times\!{}^{2}_{1}$; on prend ensuite pour multiplicateur de b, $(c'a'' - a'c'')$, ${}^{2}_{1}\!\times\!{}^{1}_{2}$; on prend enfin pour multiplicateur de c, $(a'b'' - b'a'')$, ${}^{1}_{2}\!\times\!{}^{2}_{1}$. On doit remarquer avec soin, que la croix, formée par les lignes qui réuniraient les facteurs que l'on multiplie, doit être composée alternativement dans des sens opposés, comme l'indiquent les figures.

Lorsque le dénominateur commun est formé, on obtient le numérateur de chaque inconnue, en remplaçant, dans ce dénominateur, le coefficient de l'inconnue par le terme tout connu de l'équation correspondante, c'est-à-dire en substituant k, k', k'', à a, a', a'', s'il s'agit de x; à b, b', b'', s'il s'agit de y, et à c, c', c'', s'il s'agit de z.

226. Discussion. Lorsque D n'est pas nul, le système a une solution unique et déterminée, fournie par les formules [3]. On

n'a donc à examiner que le cas où $D=0$. Or, l'équation [2], appliquée successivement à la détermination des valeurs de x, de y et de z, donne :

$$Dx=m,\quad Dy=n,\quad Dz=p.$$

Si donc $D=0$, *et qu'une au moins des quantités* m, n, p *ne soit pas nulle, l'équation correspondante est impossible. Le système est donc impossible ; et l'impossibilité se manifeste par la forme* $\frac{m}{0}$, *qu'affecte au moins l'une des inconnues.*

Si, au contraire, *on a à la fois*, $D=0$, $m=0$, $n=0$, $p=0$, les équations sont satisfaites, quels que soient x, y, z ; *le système est indéterminé, et l'indétermination se manifeste par la forme* $\frac{0}{0}$, *commune aux trois inconnues.*

227. Cas où les seconds membres des équations [1] sont nuls. Examinons enfin le cas où les équations proposées ne contiennent aucun terme indépendant des inconnues : on peut les considérer alors comme ayant lieu entre les rapports des inconnues ; et il suffit, pour déterminer ces rapports, d'avoir une équation de moins qu'il n'y a d'inconnues. En effet, si nous considérons les deux premières équations :

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ a'x+b'y+c'z=0, \end{cases}$$

elles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} a\dfrac{x}{z}+b\dfrac{y}{z}=-c, \\[2ex] a'\dfrac{x}{z}+b'\dfrac{y}{z}=-c', \end{cases}$$

et l'on en déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{z}=\dfrac{c'b-b'c}{ab'-ba'}, \\[2ex] \dfrac{y}{z}=\dfrac{a'c-c'a}{ab'-ba'}. \end{cases}$$

Si, maintenant, on complète le système par la troisième équation, et qu'on y substitue à x et y leurs valeurs en z, tirées des rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, on trouve :

$$Dz=0.$$

Donc, *si* D *n'est pas nul, il faut que l'on ait :* $z=0$; *et par suite* $x=0$, $y=0$. C'est la solution dans ce cas.

Si $D=0$, la dernière équation est vérifiée, quel que soit z ; elle est une conséquence des deux premières : *il y a* donc *indétermination ; et cette indétermination se manifeste par la forme* $\frac{0}{0}$ *que présentent les formules générales ; mais les rapports des inconnues restent déterminés.*

§ IV. Discussion du problème des courriers.

228. Problème. Nous terminerons ce chapitre par la résolution d'un problème dont la discussion résumera tout ce qui a été dit plus haut ; nous y trouverons une application remarquable de la théorie des quantités négatives, et nous y rencontrerons aussi les différents cas d'impossibilité et d'indétermination dont nous avons parlé.

Deux courriers M *et* M' *parcourent une droite indéfinie* XX', *dans le sens* XX', *avec des vitesses* v *et* v' ; *le courrier* M *passe en un point* A *de cette ligne,* h *heures avant que le courrier* M' *ne passe en un autre point* A'. *La distance* AA' = d. *On demande le point de rencontre des deux courriers.*

X ———— R'' ———— A ———— R' ———— A' ———— R ———— X'

Le point de rencontre cherché peut être, soit en R à droite de A', soit en R' entre A et A', soit en R'' à gauche de A ; sa position dépend des nombres v, v', d, h. Il est donc indispensable de distinguer plusieurs cas.

229. 1er Cas. *On suppose* $v>v'$, *et* $d>vh$. Comme le courrier M parcourt v kilomètres à l'heure, il parcourra vh kilomètres en h heures ; par suite, lorsque M' sera en A', M sera à une distance vh du point A. Ainsi la condition $d>vh$ signifie qu'à ce moment, M ne sera pas encore arrivé en A' ; il sera donc en arrière de M' ; or il va plus vite que lui, puisqu'on a $v>v'$; donc il le rejoindra à droite de A'.

Cela posé, soit R le point de rencontre : prenons pour inconnue la distance $A'R=x$. Le courrier M parcourt la distance

$AR = d + x$, dans un temps $\frac{d+x}{v}$; le courrier M′ parcourt la distance $A'R = x$, dans le temps $\frac{x}{v'}$. Or, d'après l'énoncé, M part de A, h heures avant le moment où M′ part de A′; donc M met h heures de plus que M′ pour parvenir au point R. Donc on a l'équation :

$$\frac{d+x}{v} - \frac{x}{v'} = h. \qquad [1]$$

En résolvant cette équation (on a soin de faire passer les termes inconnus dans le second membre, pour n'avoir pas à considérer des nombres négatifs), on trouve la formule :

$$x = \frac{v'(d - vh)}{v - v'}. \qquad [\alpha]$$

230. 2° Cas. *On suppose* $v < v'$, $d < vh$. Dans ce cas, au moment où le courrier M′ est en A′, le courrier M a dépassé ce point, puisque l'on a $vh > d$; il est donc alors en avant de M′; et comme il va moins vite que M′, puisque $v < v'$, il sera rejoint par lui à droite de A′. Le point de rencontre est donc dans la même région A′X′ que dans le cas précédent. L'équation du problème est donc la même [1]. Mais, pour éviter l'emploi des nombres négatifs, on résoudra cette équation en faisant passer les termes connus dans le second membre; et l'on trouvera :

$$x = \frac{v'(vh - d)}{v' - v}. \qquad [\beta]$$

231. 3° Cas. *On suppose* $v > v'$, $d < vh$. Dans ce cas, le courrier M, au moment où M′ est en A′, a dépassé ce point, puisque $vh > d$; mais il va plus vite que M′; donc la rencontre ne peut pas avoir lieu à droite de A′. On comprend, d'ailleurs, qu'elle a dû avoir lieu à gauche, avant l'époque considérée, puisque les vitesses sont inégales et la route indéfinie. Mais alors deux cas se présentent : le point de rencontre est-il en R′ entre A et A′, ou en R″ à gauche de A ?

Supposons-le d'abord en R′, et représentons par x la distance A′R′ : la distance AR′ sera égale à $(d - x)$. Pour trouver, dans ce

cas, l'équation du problème, on peut considérer le courrier M comme partant du point A à un certain instant, et parcourant la distance AR′ dans un temps $\frac{d-x}{v}$; au bout de ce temps, il rencontre le courrier M′, qui, partant alors de R′, parcourt la distance R′A′ dans un nouveau temps $\frac{x}{v'}$. Ainsi, lorsque ce dernier arrive en A′, il s'est écoulé un temps $\frac{d-x}{v}+\frac{x}{v'}$, depuis que M est parti de A; et l'équation est :

$$\frac{d-x}{v}+\frac{x}{v'}=h. \qquad [2]$$

Supposons maintenant le point de rencontre en R″. Désignons par x la distance A′R″; la distance AR″ sera $(x-d)$. On peut supposer ici que les deux courriers partent ensemble du point R″; le courrier M arrive en A après un temps $\frac{x-d}{v}$, et le courrier M′ parvient en A′ après un temps $\frac{x}{v'}$. Et comme, d'après l'énoncé, M′ a employé h heures de plus que M, l'équation est :

$$\frac{x}{v'}-\frac{x-d}{v}=h. \qquad [3]$$

Or on voit aisément que les équations [2] et [3], quoique obtenues par des raisonnements différents, sont identiques; car, en séparant les termes $\frac{d}{v}$ et $\frac{x}{v}$, elles deviennent toutes deux :

$$\frac{d}{v}-\frac{x}{v}+\frac{x}{v'}=h.$$

Ainsi, quand le point de rencontre est à gauche de A′, sa position, quelle qu'elle soit, est fournie par l'équation [2].

Si l'on résout cette équation, en ayant soin de laisser les termes inconnus dans le premier membre, on trouve :

$$x=\frac{v'(vh-d)}{v-v'}. \qquad [\gamma]$$

232. 4ᵉ Cas. *On suppose* $v<v'$, $d>vh$. Dans ce cas, le courrier M n'est pas encore en A′, quand le courrier M′ s'y trouve,

puisque $vh < d$. Ainsi M est alors en arrière de M'; et comme il va moins vite que lui, il ne le rejoindra pas à droite de A'. Mais, puisque les vitesses sont inégales, la rencontre a dû avoir lieu à gauche. L'équation du problème est donc encore l'équation [2]. Seulement, pour la résoudre, on fera passer les termes inconnus dans le second membre, et l'on trouvera la formule :

$$x = \frac{v'(d - vh)}{v' - v}. \qquad [\delta]$$

233. Discussion. L'équation [1] et les formules [α] et [β] conviennent aux cas où le point de rencontre se trouve à droite du point A'. Or les deux formules [α] et [β] ne diffèrent pas l'une de l'autre, si l'on continue à admettre les conventions (41); car leurs numérateurs sont égaux et de signes contraires, ainsi que leurs dénominateurs. On peut donc supprimer la formule [β] et ne considérer, pour les deux premiers cas, que la formule [α].

L'équation [2] et les formules [γ] et [δ] s'appliquent aux cas où le point de rencontre est à gauche du point A'. Or ces deux formules sont aussi identiques, en vertu des conventions [41]. Donc on peut se contenter de la formule [γ] pour les deux derniers cas.

D'un autre côté, l'équation [2] ne diffère de l'équation [1] que par le changement du signe de x; et les formules [α] et [γ], ayant des dénominateurs égaux, et des numérateurs égaux et de signes contraires, donnent pour x, en vertu des conventions (41), des valeurs égales et de signes contraires.

Donc *l'équation* [1] *et la formule* [α], *qui la résout, s'appliqueront aux quatre cas, pourvu que l'on convienne de porter à gauche de* A' *la longueur mesurée par la valeur de* x, *lorsque celle-ci sera négative.*

234. Cas particuliers. Nous avons supposé jusqu'ici, que l'on a $v \gtreqless v'$, $d \gtreqless vh$. Examinons maintenant les cas où ces inégalités se transforment en égalités.

1° *Si* d = vh, *sans que* v *soit égal à* v', la formule [α] donne : $x = 0$; c'est-à-dire que la distance du point de rencontre au point A' est nulle, ou que *les deux courriers sont ensemble en* A'. On voit, *à priori*, qu'il doit en être ainsi : car, puisque $vh = d$, M arrive en A' en même temps que M'; et, puisque les vitesses sont inégales, ils ne sont ensemble qu'en ce point.

2° *Si* v = v′, *sans que* d *soit égal à* vh, la formule [α] donne : $x=\frac{v'(d-vh)}{0}$. Cette forme est (213) le symbole de l'impossibilité. On doit donc affirmer que, *dans ce cas*, *les courriers ne se rencontreront jamais*. C'est ce dont il est facile de se convaincre *à priori ;* car, puisque d n'est pas égal à vh, les courriers ne sont pas ensemble au point A′; et, puisqu'ils ont la même vitesse, la distance qui les sépare est toujours la même.

3° *Si l'on a, à la fois :* v = v′, d = vh, la formule [α] donne : $x=\frac{0}{0}$. Cette forme est ordinairement le symbole de l'indétermination. On peut donc penser que, *dans ce cas, les deux courriers sont toujours ensemble.* Mais il faut le vérifier *à priori*, et cela est facile ; car, puisque $d=vh$, ils sont ensemble au point A′ ; et, puisque leur vitesse est la même, ils ne se sépareront jamais.

Ainsi, même dans les cas particuliers où l'équation et la formule cessent d'existor, on peut donner aux symboles que l'on rencontre une interprétation qui fournit la solution véritable.

235. Nous ne pousserons pas plus loin la discussion de ce problème ; nous en avons dit assez pour indiquer la marche à suivre. Nous engageons le lecteur à faire d'autres hypothèses : par exemple, à supposer que *le courrier* M′ *marche de* X′ *vers* X, ou que le courrier M passe en A, h heures *après* que le courrier M′ est passé en A′. En construisant directement, pour chacune de ces hypothèses, l'équation et la formule qui la résout, il trouvera toujours que l'équation [1] et la formule [α] sont applicables, pourvu qu'il regarde comme négatives les grandeurs dont il aura changé le sens.

EXERCICES.

I. Quelle relation faut-il supposer entre A, B, A′, B′, pour que l'expression, $\frac{Ax+B}{A'x+B'}$, ait une valeur indépendante de x?

Il faut que l'on ait : $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ ou bien B = 0, B′ = 0.

II. Quelles relations faut-il supposer entre A, B, C, A′, B′, C′, pour que l'expression, $\frac{Ax+By+C}{A'x+B'y+C'}$, ait une valeur indépendante à la fois de x et de y

Il faut que l'on ait : $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$.

On demande encore, si l'expression peut être indépendante de x, sans l'être de y. Non.

III. Trouver une progression par différence, dans laquelle il existe un rapport constant entre la somme des x premiers termes, et la somme des kx termes suivants ; k étant donné, et x pouvant prendre toutes les valeurs entières.

Il y a une infinité de progressions qui répondent à la question. Ce sont celles dont la raison est double du premier terme.

IV. Discuter les formules de résolution de trois équations à trois inconnues. On distinguera les cas suivants :

1° Les deux premières équations peuvent être incompatibles, quelle que soit la troisième.

On trouvera, pour cela, les conditions : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, et $bk'-kb'\gtrless 0$.

2° Les deux premières peuvent être incompatibles avec la troisième.

Il faudra, pour cela, que le dénominateur commun soit nul, et que le numérateur d'une des inconnues ne le soit pas.

3° Les deux premières équations peuvent rentrer l'une dans l'autre.

Il faudra, pour cela, que l'on ait : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{k}{k'}$.

4° La troisième peut rentrer dans les autres

Il faut, pour cela, que le dénominateur commun soit nul, ainsi que le numérateur d'une des inconnues.

V. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes, pour que le problème du n° 190, relatif à des réservoirs qui sont remplis par des robinets et par la pluie, devienne impossible ou indéterminé. On rendra compte, *à priori*, de l'impossibilité ou de l'indétermination.

On trouve que la condition d'impossibilité est $\frac{n}{n'}=\frac{s}{s'}$; et que si, en outre, on a : $vs't'=v'st$, le problème est indéterminé.

VI. Si l'on considère les équations :

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c', \end{cases} \qquad [1]$$

et que l'on pose :

$$\begin{cases} x=\alpha t+\beta u, \\ y=\alpha' t+\beta' u; \end{cases} \qquad [2]$$

on obtient, par cette substitution, deux équations en t et en u. On propose de vérifier, que le dénominateur des valeurs de t et de u, qu'on en déduit, est le produit des dénominateurs que l'on trouve, en résolvant les équations [1] par rapport à x et à y, et les équations [2] par rapport à t et à u.

VII. Même question pour les équations :

$$\begin{cases} ax + by + cz = k, \\ a'x + b'y + c'z = k', \\ a''x + b''y + cz'' = k'', \end{cases} \qquad [1]$$

dans lesquelles on pose :

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta u + \gamma v, \\ y = \alpha' t + \beta' u + \gamma' v, \\ z = \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v. \end{cases} \qquad [2]$$

Ces deux exercices n'offrent que de simples vérifications de calcul.

LIVRE III.

DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE I.

DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

236. Forme générale d'une équation à une inconnue. Une équation à une inconnue x est du second degré, lorsque ses deux membres, étant entiers en x, contiennent le carré de l'inconnue, et n'en contiennent pas une puissance supérieure. Cette équation ne peut donc renfermer que trois sortes de termes : savoir, des termes qui contiennent le carré de x, des termes qui contiennent sa première puissance, et des termes indépendants. Par conséquent, si l'on fait passer tous les termes dans le premier membre, et que l'on réunisse en un seul tous les termes en x^2, en un seul tous les termes en x, et en un seul tous les termes connus, l'équation prend la *forme générale*,

$$ax^2+bx+c=0;$$

a, b, c étant des nombres donnés qui peuvent être positifs ou négatifs. Par exemple, l'équation,

$$3x-\frac{2}{5}+\frac{x^2}{9}=8+\frac{2x^2}{3}-\frac{26x}{15},$$

se transforme successivement en les équations suivantes :

$$\frac{x^2}{9}-\frac{2x^2}{3}+3x+\frac{26x}{15}-8-\frac{2}{5}=0,$$

$$5x^2-30x^2+135x+78x-360-18=0,$$

$$-25x^2+213x-378=0,$$

$$25x^2-213x+378=0.$$

Les solutions de l'équation du second degré se nomment *ses racines*.

Le coefficient a ne peut pas être nul; car l'équation cesserait d'être du second degré; mais les coefficients b et c peuvent être égaux à zéro. L'équation prend alors l'une des formes :

$$ax^2+c=0,\quad ax^2+bx=0.$$

On dit, dans ce cas, qu'elle est incomplète.

§ I. Résolution de l'équation du second degré

237. Cas ou l'équation est de la forme $ax^2+c=0$. Lorsque l'équation du second degré se présente sous la forme,

$$ax^2+c=0, \qquad [1]$$

on peut la considérer comme une équation du premier degré dont l'inconnue serait x^2; et l'on en tire :

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Si donc $-\frac{c}{a}$ *est un nombre positif*, ce nombre est le carré de l'inconnue. La valeur de x est donc la racine carrée de $-\frac{c}{a}$; et, comme cette racine (96) a deux valeurs égales et de signes contraires, *on a deux solutions :*

$$x'=+\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x''=-\sqrt{-\frac{c}{a}}. \qquad [2]$$

Si, au contraire, $-\frac{c}{a}$ *est négatif*, il n'y a pas de nombre positif ou négatif, dont ce nombre soit le carré (96). *L'équation* [1] *n'a donc pas de solution*. Cependant on dit alors, *qu'elle a deux racines imaginaires*, représentées par les formules [2].

238. Cas ou l'équation est de la forme $ax^2+bx=0$. Lorsque le terme indépendant de x est nul, l'équation se présente sous la forme :

$$ax^2+bx=0; \qquad [1]$$

on peut alors mettre x en facteur, et écrire :

$$x(ax+b)=0.$$

Or, pour qu'un produit de deux facteurs soit nul, il faut et il

suffit que l'un des deux facteurs soit nul. On aura donc toutes les solutions de l'équation, en posant :

$$x=0, \quad ax+b=0,$$

équations du premier degré, dont les solutions sont :

$$x'=0, \quad x''=-\frac{b}{a}. \qquad [2]$$

Ainsi, *l'équation a deux racines, dont l'une est toujours nulle.*

239. Résolution de l'équation complète. Considérons maintenant l'équation complète,

$$ax^2+bx+c=0. \qquad [1]$$

Pour la résoudre, on cherche à la ramener à la forme [1] du n° **237**, dans laquelle le premier membre est un carré contenant l'inconnue, et le second est tout connu. A cet effet, on multiplie les deux membres par $4a$ (ce qui est permis (122), puisque a n'est pas nul); puis on fait passer $4ac$ dans le second membre, et l'on obtient l'équation équivalente :

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

On reconnaît alors sans peine, que le premier membre se compose des deux premiers termes du carré de $(2ax+b)$, et qu'il ne manque que b^2 pour compléter ce carré. Si donc on ajoute b^2 aux deux membres, l'équation devient :

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac, \quad \text{ou} \quad (2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Elle a ainsi la forme cherchée : (b^2-4ac) est le carré de $(2ax+b)$. *Si donc* (b^2-4ac) *est positif*, la valeur de $(2ax+b)$ sera la racine carrée de ce nombre; et comme cette racine a deux valeurs égales et de signes contraires, on aura indifféremment :

$$2ax+b=+\sqrt{b^2-4ac}, \quad 2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac};$$

équations du premier degré, d'où l'on tirera :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

L'équation a donc deux solutions. On indique, en général, cette double valeur, en écrivant de la manière suivante :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad [2]$$

on sous-entend, que $+\sqrt{b^2-4ac}$ représente la valeur positive du radical, et que $-\sqrt{b^2-4ac}$ représente sa valeur négative.

Si, au contraire, la quantité (b^2-4ac) *est négative*, $\sqrt{b^2-4ac}$ ne représente, d'après nos conventions, aucun nombre positif ou négatif; et *l'équation proposée n'admet aucune solution*. Cependant on dit alors, qu'*elle a deux racines imaginaires*, représentées par la formule [2].

Il pourrait arriver que (b^2-4ac) *fût égal à zéro;* dans ce cas, les deux valeurs de $\sqrt{b^2-4ac}$ se réduisent à zéro; l'équation devient : $(2ax+b)^2=0$, et les racines deviennent, l'une et l'autre: $x=-\frac{b}{2a}$. *L'équation n'admet donc qu'une solution.* On dit cependant encore, qu'*elle a deux racines, mais qu'elles sont égales.*

240. Une équation du deuxième degré a toujours deux racines. En résumé, on voit qu'une équation du second degré admet quelquefois deux solutions, quelquefois une seule; et quelquefois enfin, elle n'en admet aucune. On dit cependant, qu'elle en admet toujours deux, qui peuvent être réelles et différentes, réelles et égales, ou imaginaires. Il peut sembler puéril, au premier abord, de choisir ainsi une forme détournée, pour affirmer, dans tous les cas, l'existence de deux racines, qui n'en existent pas pour cela davantage. Ces locutions et l'introduction dans les calculs des nombres imaginaires sont cependant une conséquence de l'esprit de généralisation qui règne en algèbre. Il serait impossible, en effet, d'opérer sur des expressions *littérales*, si la forme des résultats changeait avec la valeur numérique des lettres. Il faudrait, à chaque instant, diviser et subdiviser les questions, pour obtenir les formules correspondantes à telle ou telle hypothèse. L'adoption des nombres négatifs et imaginaires a pour but d'éviter cet inconvénient. Dans une question particulière, l'introduction de ces nombres n'aurait aucune utilité; mais dans l'étude générale d'une classe de questions, ils permettent d'exprimer et de démontrer, en une fois, des règles et des résultats qui exigeraient, sans cela, des démonstrations et des formules distinctes.

241. Définition de l'expression imaginaire. On désigne, en général, sous le nom d'*expression imaginaire*, la racine carrée d'un nombre négatif. Il ne faut attacher à cette locution aucune

idée relative à la mesure des grandeurs. Une expression imaginaire, semblable en cela à un nombre négatif, ne représente aucune grandeur. Mais, de même que les opérations faites sur les nombres négatifs, les opérations relatives aux expressions imaginaires reçoivent conventionnellement un sens, et deviennent un moyen précieux de généralisation.

La première de ces conventions consiste, en ce que le carré de l'expression $\sqrt{-A}$ *est* $-A$.

Pour définir les autres opérations, on convient d'appliquer aux expressions imaginaires toutes les règles démontrées généralement pour les quantités réelles. (On donne le nom de *réels* aux nombres positifs et négatifs).

242. Forme des racines imaginaires de l'équation du second degré. Les racines imaginaires de l'équation du second degré sont, d'après ce qui précède, des expressions de la forme $A+\sqrt{-B}$, B représentant un nombre positif. Si l'on désigne par b la racine carrée de ce nombre, de telle sorte que l'on ait, $B=b^2$, l'expression imaginaire, qui représente la racine, devient $A+\sqrt{-b^2}$, ou $A+\sqrt{b^2\times(-1)}$. Puisque l'on convient d'appliquer aux opérations relatives aux expressions imaginaires toutes les règles démontrées généralement pour les nombres réels, on fera sortir le facteur b^2 hors du radical, comme s'il s'agissait de la racine carrée d'un produit positif; et l'on écrira l'expression ainsi :

$$A+b\sqrt{-1}.$$

D'après cela, $\sqrt{-1}$ sera le seul facteur imaginaire, qui entrera dans une expression imaginaire. On le définira, en disant qu'il a pour carré -1.

En général, comme nous l'avons dit, les règles démontrées pour les nombres réels serviront de définition, dans ce cas nouveau, aux opérations qui, sans cela, n'auraient aucun sens.

243. Règle. La formule [2] fournit, dans tous les cas, les racines de l'équation [1]. Elle montre que, *pour les obtenir, on prend le coefficient de* x, *après avoir changé son signe; on lui ajoute et l'on en retranche séparément la racine carrée du nombre formé, en soustrayant du carré de ce coefficient le quadruple produit du coef-*

ficient de x^2 *par le terme indépendant; puis on divise le résultat par le double du coefficient* de x^2.

244. Simplification. Il arrive quelquefois, que cette formule et la règle qu'elle exprime se simplifient légèrement.

1° Souvent le coefficient de x^2 est égal à l'unité; on peut toujours, d'ailleurs, amener cette circonstance, en divisant les deux membres par a. L'équation prend alors la forme :

$$x^2+px+q=0. \qquad [3]$$

On peut résoudre directement cette équation, en faisant passer q dans le second membre, puis en ajoutant $\frac{p^2}{4}$ aux deux membres, et en extrayant les racines des résultats, comme on l'a fait au n° 239. Mais il est plus simple de déduire la nouvelle formule de la formule [2], en y faisant $a=1, b=p, c=q$; elle devient :

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2};$$

ou, en effectuant la division du radical par 2,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad [4]$$

Il faut savoir par cœur la formule, sous cette dernière forme, et l'employer toutes les fois que $a=1$. Elle montre que, *pour résoudre l'équation* [3], *il faut prendre la moitié du coefficient de* x *changé de signe, puis ajouter et retrancher successivement la racine carrée du nombre qu'on obtient en soustrayant du carré de cette moitié le terme tout connu.*

2° Il peut arriver que le coefficient b de x soit pair. Si l'on met le facteur 2 en évidence, en posant $b=2k$, l'équation [1] prend la forme :

$$ax^2+2kx+c=0. \qquad [5]$$

On pourrait encore résoudre directement cette équation par la méthode (239). Toutefois on multiplierait seulement les deux membres par a, et l'on formerait dans le premier le carré de $(ax+k)$. Mais il est plus simple de faire l'hypothèse $b=2k$ dans la formule [2]; elle devient :

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a};$$

ou, en divisant les deux termes par 2,

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad [6]$$

Ainsi, *pour trouver les racines dans ce cas, il faut prendre la moitié du coefficient de* x *changé de signe, ajouter et retrancher la racine carrée du nombre qu'on obtient en retranchant du carré de cette moitié le produit du coefficient de* x^2 *par le terme indépendant, et diviser le résultat par le coefficient de* x^2. Il ne faut jamais se dispenser de faire cette simplification, quand elle se présente.

245. Applications. 1° Soit l'équation : $x^2 - 7x + 10 = 0$; on aura :

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}; \quad \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5, \\ x'' = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2. \end{array}\right.$$

2° Soit l'équation : $3x^2 + 14x - 440 = 0$; on trouve :

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 3.440}}{3} = \frac{-7 \pm \sqrt{1369}}{3} = \frac{-7 \pm 37}{3};$$

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{-7 + 37}{3} = 10, \\ x'' = \frac{-7 - 37}{3} = -\frac{44}{3}. \end{array}\right.$$

3° Soit l'équation : $7x^2 - 13x + 3 = 0$; on a :

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4.7.3}}{14} = \frac{13 \pm \sqrt{85}}{14}; \quad \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{13 + \sqrt{85}}{14}; \\ x'' = \frac{13 - \sqrt{85}}{14}. \end{array}\right.$$

4° Soit l'équation : $x^2 - 6x + 9 = 0$;

on a (racines égales) : $x = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$; $\left\{\begin{array}{l} x' = 3, \\ x'' = 3. \end{array}\right.$

5° Soit l'équation : $2x^2 - 11x + 20 = 0$; on a (racines imaginaires) :

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4.2.20}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{-39}}{4}, \quad \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{11 + \sqrt{39}\sqrt{-1}}{4} \\ x'' = \frac{11 - \sqrt{39}\sqrt{-1}}{4}. \end{array}\right.$$

6° Soit l'équation littérale : $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

On chasse d'abord les dénominateurs ; puis on transpose, et l'on réduit les termes semblables ; et l'on trouve :

$$(a-b)^2x^2-(a^2+b^2)(a+b)x+ab(a+b)^2=0.$$

De là : $x=\dfrac{(a^2+b^2)(a+b)\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2(a+b)^2-4ab(a+b)^2(a-b)^2}}{2(a-b)^2}$,

ou, $$x=\frac{(a+b)\{a^2+b^2\pm\sqrt{(a-b)^4+4a^2b^2}\}}{2(a-b)^2}.$$

§ II. Discussion des formules.

246. Cas où les racines sont réelles et inégales. On a vu que, lorsque (b^2-4ac) est positif, l'équation [1] a deux racines réelles et différentes :

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

On peut admettre que a est positif; car s'il ne l'était pas, on changerait les signes de tous les termes, et on le rendrait ainsi plus grand que zéro. Le dénominateur des deux racines est donc positif; et ces racines ont le signe de leur numérateur.

Or c peut être positif, nul ou négatif. *Si* c *est positif*, (b^2-4ac) est plus petit que b^2; et par suite $\sqrt{b^2-4ac}$ est plus petit que la valeur absolue de b : donc c'est le terme $-b$ qui donne son signe aux numérateurs : donc, dans ce cas, *les deux racines ont le même signe, qui est celui de* $-b$. *Si* c *est négatif*, (b^2-4ac) est plus grand que b^2; le radical est donc plus grand que la valeur absolue de la quantité qui le précède, et il donne son signe aux numérateurs : *les deux racines sont donc de signes contraires;* et la plus grande, en valeur absolue, est x', si b est positif, et x'', si b est négatif. *Dans le cas particulier où* $c=0$, $\sqrt{b^2-4ac}$ est égal à la valeur absolue de b : par suite, $x'=-\dfrac{b}{a}$, et $x''=0$, *si* b *est positif;* $x'=0$, $x''=-\dfrac{b}{a}$, *si* b *est négatif.*

247. Cas où les racines sont réelles et égales. *Lorsque* $(b^2-4ac)=0$, on sait que les deux racines sont égales, l'une et l'autre, à $-\dfrac{b}{2a}$: *elles ont donc un signe contraire à celui de* b.

On peut remarquer que, dans ce cas, l'équation générale [1] peut s'écrire :

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=0, \qquad \text{ou} \qquad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Son premier membre est un carré parfait, multiplié par a.

248. Cas où les racines sont imaginaires. *Lorsque* (b^2-4ac) *est négatif*, on sait que les racines sont imaginaires; et, en posant, $-\frac{b}{2a}=\alpha$, et $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\beta$, elles deviennent :

$$x'=\alpha-\beta\sqrt{-1}, \qquad x''=\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Le premier membre de l'équation peut, dans ce cas, se mettre sous une forme particulière, très-utile à connaître. En effet, on a évidemment :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}.$$

Or les trois premiers termes, dans la parenthèse, composent le carré de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$; et les deux derniers se réduisent à $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$. Donc l'équation peut s'écrire :

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}=0.$$

Mais $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ est un nombre positif, que l'on peut regarder comme le carré de sa racine carrée. Donc on peut écrire

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right\}=0.$$

Ainsi *le premier membre est le produit par* a *de la somme des carrés de deux expressions réelles.*

Cette forme montre bien pourquoi l'équation, dans ce cas, n'admet aucune solution : car il n'est pas de nombre positif ou négatif, qui, substitué à x dans le premier membre, puisse l'annuler.

249. Tableau de la discussion. La discussion précédente est résumée dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{c} b^2-4ac>0, \\ \text{2 racines réelles et} \\ \text{inégales.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} c>0 \left\{ \begin{array}{l} b<0, \text{ deux racines positives,} \\ b>0, \text{ deux racines négatives.} \end{array} \right. \\ c=0 \left\{ \text{une racine nulle, une racine} = -\dfrac{b}{a}. \right. \\ c<0 \left\{ \text{deux racines de signes différents.} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} b^2-4ac=0. \\ \text{2 racines réelles et} \\ \text{égales.} \end{array} \left\{ x'=x''=-\frac{b}{2a} : \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{le premier membre est} \\ \text{un carré parfait.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} b^2-4ac<0. \\ \text{2 rac. imaginaires.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x'=\alpha-\beta\sqrt{-1} \\ x''=\alpha+\beta\sqrt{-1} \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} \text{le premier membre est} \\ \text{la somme de 2 carrés.} \end{array} \right.$$

250. Remarque. 1° Lorsque a et c sont de signes différents, les racines sont toujours réelles : car (b^2-4ac) est alors une somme, toujours positive.

2° Pour que les racines soient égales et de signes contraires, il faut et il suffit que l'on ait : $b=0$. En effet, si α et $-\alpha$ sont les deux racines, on doit avoir à la fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} a\alpha^2+b\alpha+c=0, \\ a\alpha^2-b\alpha+c=0; \end{array} \right.$$

d'où l'on tire par soustraction :

$$2b\alpha=0,$$

ou, puisque α n'est pas nul,

$$b=0.$$

La condition, d'ailleurs, est évidemment suffisante.

§ III. Propriétés des racines.

251. Théorème I. *La somme des racines de l'équation du second degré est égale au quotient, changé de signe, du coefficient de* x *divisé par le coefficient de* x^2.

En effet, si l'on additionne les formules [2] du n° 239, on a :

$$x'+x''=-\frac{b}{a}. \qquad [1]$$

252. Théorème II. *Le produit des racines est égal au quotient du terme connu, divisé par le coefficient de* x^2.

En effet, multipliant les formules [2] l'une par l'autre, on a :

$$x'x'' = \frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2},$$

ou
$$x'x'' = \frac{c}{a}. \qquad [2]$$

253. REMARQUE. Ces deux théorèmes peuvent se démontrer *à priori*. Car, dire que x' et x'' sont les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

c'est dire qu'on a les identités :

$$\begin{cases} ax'^2 + bx' + c = 0, \\ ax''^2 + bx'' + c = 0; \end{cases}$$

or, on en tire par soustraction :

$$a(x'^2 - x''^2) + b(x' - x'') = 0;$$

et, en divisant par $(x' - x'')$,

$$a(x' + x'') + b = 0;$$

donc :
$$x' + x'' = -\frac{b}{a}. \qquad [1]$$

Si l'on remplace b par $-a(x'+x'')$ dans la première des identités précédentes, il vient :

$$ax'^2 - a(x'+x'')x' + c = 0;$$

d'où
$$x'x'' = \frac{c}{a}. \qquad [2]$$

Ces deux propositions sont fort importantes; leurs applications sont nombreuses. Nous en indiquerons quelques-unes.

254. DÉCOMPOSITION DU PREMIER MEMBRE DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ EN FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ. Si x' et x'' désignent les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad [1]$$

on a (253) :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Si l'on divise les deux membres de l'équation [1] par a, et que

l'on remplace $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ par les valeurs précédentes, son premier membre devient :

$$x^2-(x'+x'')x+x'x'',$$

ou, comme il est facile de le vérifier,

$$(x-x')(x-x'').$$

Ainsi, *le premier membre d'une équation du second degré, mise sous la forme*

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

est le produit de deux binomes du premier degré, égaux à l'excès de x *sur chacune des racines.*

Si l'équation proposée est de la forme :

$$ax^2+bx+c=0,$$

c'est seulement après l'avoir divisée par a, que l'on peut lui appliquer le résultat précédent ; et, par suite, avant cette division, *le premier membre est égal à*

$$a(x-x')(x-x'').$$

255. Décomposition d'un trinome du second degré en facteurs du premier degré. Le théorème qui précède s'applique immédiatement à la décomposition du trinome du second degré : mais il peut se démontrer directement d'une autre manière.

Considérons, en effet, le trinome

$$ax^2+bx+c;$$

on a identiquement :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\}; \quad [1]$$

or, on peut remplacer $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ par l'expression identiquement égale,

$$-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2;$$

et, par cette substitution, l'expression [1] devient le produit de a par la différence de deux carrés, savoir :

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2\right\}.$$

Or, on sait que la différence de deux carrés est égale au produit de la somme des racines par leur différence; et, par suite, l'expression précédente, équivalente à ax^2+bx+c, peut s'écrire :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right);$$

et l'on reconnaît l'expression trouvée plus haut,

$$a(x-x')(x-x'').$$

Cette formule, quelle que soit la manière dont on l'établisse, s'applique évidemment au cas où x' et x'' sont imaginaires (**241**); mais, dans ce cas, les deux facteurs $(x-x')$, $(x-x'')$, n'ont aucune valeur arithmétique, et nous n'aurons pas occasion d'en faire usage.

On nomme ordinairement *racines d'un trinome* ax^2+bx+c, les nombres qui, substitués à x, le réduisent à zéro, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$ax^2+bx+c=0.$$

Par conséquent, *pour décomposer le trinome en facteurs du premier degré, on détermine ses racines, on retranche chacune d'elles de* x, *et l'on multiplie par* a *le produit des différences.*

256. PROBLÈME. Les propriétés du n° **253** fournissent immédiatement l'équation du second degré, qui permet de résoudre le problème suivant: *Trouver deux nombres, connaissant leur somme et leur produit.*

Soient, en effet, S la somme de deux nombres, et P leur produit; ces deux nombres sont les racines de l'équation

$$x^2-Sx+P=0;$$

car la somme de ces racines est S, et leur produit est P.

Il est facile, d'ailleurs, de donner à l'équation une forme qui montre, *à priori*, la raison de ce fait; on peut, en effet, l'écrire ainsi

$$P=Sx-x^2, \quad \text{ou} \quad P=x(S-x);$$

et l'on voit que, résoudre cette équation, c'est trouver deux nombres x et $S-x$, dont le produit soit P, et dont la somme $x+S-x$ soit égale à S.

257. Détermination, a priori, des signes des racines. Les relations, qui donnent la somme et le produit des deux racines (253), permettent de déterminer leurs signes, sans résoudre l'équation.

On voit, en effet, d'après le signe de leur produit $\frac{c}{a}$, si les racines sont de même signe ou de signes contraires. Dans le premier cas, le signe de la somme $-\frac{b}{a}$ apprendra si elles sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives. Dans le second cas, l'une est positive et l'autre négative; et le signe de $-\frac{b}{a}$ fait connaître le signe de celle dont la valeur absolue est la plus grande. Ainsi les racines de l'équation

$$x^2-3x-4=0$$

sont de signes contraires, car leur produit est -4; et la plus grande est positive, car leur somme est positive et égale à 3.

258. Remarque. *Avant d'appliquer les règles précédentes, il faut s'assurer que les racines sont réelles.* Si l'on considère, par exemple, l'équation

$$x^2-3x+10=0,$$

on serait conduit (253) à regarder les racines comme toutes deux positives; car leur produit 10 est positif, ainsi que leur somme 3. Mais l'expression (b^2-4ac) étant ici égale à -31, les racines sont imaginaires.

259. Problème. Le théorème de l'article 255, dont on fait, du reste, un usage continuel en analyse, permet de résoudre immédiatement la question suivante : *former une équation du second degré, dont les racines soient des nombres donnés α et β.* L'équation demandée est évidemment :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0, \qquad \text{ou} \qquad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0;$$

et l'on aperçoit d'ailleurs, *à priori*, que le premier membre $(x-\alpha)(x-\beta)$ s'annule pour $x=\alpha$ et pour $x=\beta$. On voit aussi

que le coefficient de x est égal à la somme des racines, prises en signe contraire, et que le terme tout connu est égal au produit des racines.

EXEMPLES : 1° *Quelle est l'équation du second degré, dont les racines sont :*

$$2+\sqrt{3} \text{ et } 2-\sqrt{3}\,?$$

La somme $\qquad 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4,$

et le produit $\qquad (2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})=4-3=1;$

l'équation demandée est, par conséquent, $x^2-4x+1=0$.

2° L'équation du second degré, dont les racines sont $(a+b)$ et $(a-b)$, est :

$$x^2-2ax+a^2-b^2=0.$$

§ IV. Examen d'un cas particulier remarquable.

260. Cas où $a=0$. Lorsque, dans l'équation $ax^2+bx+c=0$, on suppose que a prend la valeur zéro, les formules

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

deviennent :

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}, \qquad x''=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{0};$$

c'est-à-dire, si b est positif,

$$x'=\frac{-2b}{0} \qquad x''=\frac{0}{0};$$

et, si b est négatif,

$$x'=\frac{0}{0}, \qquad x''=\frac{-2b}{0}.$$

Ainsi l'une des racines se présente sous la forme indéterminée, et l'autre sous la forme infinie. D'un autre côté, l'équation proposée devient :

$$bx+c=0;$$

elle est alors du premier degré, et elle n'admet qu'une solution :

$$x=-\frac{c}{b}.$$

Les formules générales semblent donc, dans ce cas, en défaut.

Remarquons d'abord que, si réellement il en était ainsi, il

n'en faudrait rien conclure contre les raisonnements qui y ont conduit; car ces raisonnements supposent expressément (239), que a ne soit pas nul.

Cependant les valeurs de x' et de x'' satisfaisant à l'équation proposée, quel que soit a, lorsque a tend vers zéro, l'une d'elles doit approcher de la solution de l'équation

$$bx+c=0.$$

Et c'est évidemment, comme nous allons le vérifier, celle qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Considérons, en effet, pour fixer les idées, le cas où b est positif. On a :

$$x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Multiplions les deux termes de cette fraction par l'expression $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, qui ne devient pas nulle pour $a=0$; nous aurons :

$$x''=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})};$$

en effectuant la multiplication indiquée au numérateur, où l'on remarque que l'on a le produit de la somme de deux nombres $(-b+\sqrt{b^2-4ac})$ par leur différence $(-b-\sqrt{b^2-4ac})$, il vient :

$$x''=\frac{b^2-b^2+4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$
$$=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}};$$

et, sous cette forme, il est évident que, a tendant vers zéro, x'' s'approche de la valeur $-\frac{2c}{2b}$ ou $-\frac{c}{b}$.

Quant à la valeur de x', elle augmente évidemment sans limite quand a diminue, puisque le numérateur tend vers $-2b$, tandis que le dénominateur tend vers zéro.

§ V. Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$, quand a est très-petit.

261. GRANDEUR DES RACINES. *Lorsque* a *est très-petit, par rap-*

port à b *et à* c, *l'une des racines diffère peu de* $-\frac{c}{b}$, *et l'autre est extrêmement grande.* Cette proposition résulte évidemment de ce que, lorsque a tend vers zéro, l'une tend vers $-\frac{c}{b}$, et l autre croît indéfiniment (260).

On peut s'en convaincre, en mettant l'équation proposée sous la forme

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a.$$

En effet, comme le second membre est très-petit, on satisfera à cette équation, en donnant à x une valeur convenable, qui rendra très-petit l'un des facteurs du premier, sans rendre l'autre très-grand. Pour cela, il suffira de choisir pour x une valeur très-grande; car alors le facteur $\frac{1}{x}$ sera très-petit, et le facteur $\left(b+\frac{c}{x}\right)$ différera peu de b; ou bien, on prendra pour x une valeur voisine de $-\frac{c}{b}$; car cette valeur rendra très-petit le second facteur, tandis que le premier différera peu de $-\frac{b}{c}$.

262. Désavantage des formules ordinaires. La formule générale, qui donne les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$,

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac},$$

se prête mal aux calculs numériques, lorsque le coefficient a a une valeur très-petite par rapport à celles de b et de c. On comprend, en effet, qu'après avoir calculé approximativement $\sqrt{b^2-4ac}$, si l'on divise le résultat par $2a$, on divisera en même temps l'erreur, qui se trouvera par là considérablement augmentée. Il est donc convenable de modifier, dans ce cas, la formule qui donne les racines.

263. Calcul de la plus petite racine. Nous nous occuperons seulement de la racine qui diffère peu de $-\frac{c}{b}$. L'autre se

trouvera ensuite sans peine, puisque la somme des deux est connue et égale à $-\frac{b}{a}$.

De l'équation $$ax^2+bx+c=0,$$

on déduit : $$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}. \qquad [1]$$

Or a est, par hypothèse, très-petit ; x et b ne sont ni très-grands ni très-petits : donc la valeur de $\frac{ax^2}{b}$ est elle-même très-petite ; et nous pouvons la négliger, et écrire, comme *première approximation :*

$$x_1=-\frac{c}{b}. \qquad [2]$$

L'erreur commise, en adoptant cette valeur, est $\frac{ax^2}{b}$; elle contient en facteur la première puissance de a ; et l'on dit, pour cette raison, qu'elle est petite du *premier ordre.*

Si nous désignons par α_1 l'erreur commise, quand on prend $x=-\frac{c}{b}$, nous aurons exactement :

$$x=-\frac{c}{b}+\alpha_1. \qquad [3]$$

En remettant cette valeur dans le second membre de l'équation [1], il vient :

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}+\alpha_1\right)^2=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+\frac{2a\alpha_1c}{b^2}-\frac{a\alpha_1^2}{b}; \quad [4]$$

si nous négligeons, dans le second membre, le troisième et le quatrième terme, qui contiennent en facteurs $a\alpha_1$ et $a\alpha_1^2$, il viendra, comme *seconde approximation :*

$$x_2=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}; \qquad [5]$$

α_1 étant du premier ordre par rapport à a, $a\alpha_1$ et $a\alpha_1^2$ sont respectivement du second et du troisième ordre, c'est-à-dire qu'ils contiennent a^2 et a^3 en facteur. Notre seconde approximation,

fournie par la formule [5], ne laisse donc subsister que des erreurs du *second ordre;* et si nous posons, par conséquent :

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \alpha_2, \qquad [6]$$

α_2 sera du second ordre, c'est-à-dire que son expression contiendra a^2 en facteur.

Si nous remettons dans le second membre de la formule [1] la valeur de x fournie par la formule [6], il vient :

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \alpha_2\right)^2, \qquad [7]$$

ou, en développant,

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7} + 2\alpha_2\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b} + \frac{ac^2}{b^3}\right) - \frac{a\alpha_2^2}{b}. \qquad [8]$$

Or α_2 étant du *second ordre* (c'est-à-dire contenant a^2 en facteur), $\alpha_2 a$ et $\frac{\alpha_2^2 a}{b}$ seront du troisième et du cinquième ordre. Si donc nous négligeons les termes qui les contiennent, ainsi que $\frac{a^3c^4}{b^7}$, qui est du troisième ordre, et qu'il n'y a dès lors aucune raison pour conserver, il vient, comme *troisième approximation,*

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}; \qquad [9]$$

et l'erreur commise n'est plus que du troisième ordre. Il serait facile de continuer ainsi indéfiniment.

264. Remarque. Les formules d'*approximations successives :*

$$x_1 = -\frac{c}{b}, \quad x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}, \quad x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5},$$

satisfont aux conditions que l'on doit toujours s'efforcer d'obtenir dans un système d'approximations successives.

1° Chacune s'obtient de la précédente par l'addition d'un terme de correction.

2° L'erreur qui subsiste, après l'addition de chacun des termes, est toujours *très-petite* par rapport à ce terme.

En effet, quand on écrit : $x = -\frac{c}{b}$, l'erreur commise contient a en facteur, et est, par suite, très-petite par rapport à $-\frac{c}{b}$.

Quand on écrit : $x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$, l'erreur commise contient a^2 en facteur, et est très-petite par rapport à $\frac{ac^2}{b^3}$; et ainsi de suite.

D'après cette remarque, pour savoir si la valeur obtenue est trop grande ou trop petite, il suffira d'examiner le signe du terme de correction que l'on obtiendrait en poussant l'approximation plus loin. Car, si ce terme est positif, comme il l'emporte sur la somme de tous ceux qui le suivraient, l'erreur est positive, et la valeur trouvée est trop faible. Ce sera l'inverse, si le terme de correction est négatif.

§ VI. Propriétés du trinome du second degré.

265. Définition du trinome du second degré. Un trinome du second degré est un polynome à trois termes, de la forme générale,

$$ax^2 + bx + c;$$

a, b, c y représentent des nombres constants, positifs ou négatifs, donnés *à priori*; x y représente un nombre variable, susceptible de recevoir toutes les valeurs possibles. Lorsque l'on fait varier la valeur attribuée à x, la valeur du trinome varie et passe par différents états de grandeur qu'il est utile d'étudier.

Nous avons déjà dit (**255**) qu'on nomme ordinairement racines du trinome les racines de l'équation qu'on obtient en égalant le trinome à zéro. Ces nombres peuvent être réels ou imaginaires ; si on les désigne par x' et par x'', on sait que le trinome est représenté par le produit : $a(x - x')(x - x'')$.

266. Théorème I. *Lorsque les racines* x', x'' *du trinome sont réelles et inégales, et qu'on substitue à* x *un nombre compris entre elles, la valeur du trinome a un signe contraire à celui de son premier terme ; et si l'on remplace* x *par un nombre non compris entre les racines, le signe de la valeur du trinome est celui de son premier terme.*

En effet, si l'on suppose $x'<x''$, toute valeur donnée à x et comprise entre x' et x'', rend $(x-x')$ positif et $(x-x'')$ négatif: elle rend donc négatif le produit $(x-x')(x-x'')$; elle donne par suite, au produit $a(x-x')(x-x'')$ un signe contraire à celui de a, ou, ce qui est la même chose, à celui de ax^2. Si, au contraire, la valeur attribuée à x est plus petite que x', ou plus grande que x'', les facteurs $(x-x')$, $(x-x'')$ sont tous deux négatifs ou tous deux positifs; leur produit est positif, et le trinome $a(x-x')(x-x'')$ a le même signe que a.

267. Théorème II. *Lorsque les racines du trinome sont réelles et égales, le trinome est toujours de même signe que son premier terme, quelle que soit la valeur attribuée à* x, *à l'exception de celle qui le rend nul.*

En effet, on sait (247) que, dans ce cas, le trinome prend la forme:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Or le carré est toujours positif, quelle que soit la valeur de x; donc le trinôme a toujours le signe de a. Cependant il faut faire exception pour la valeur $x=-\frac{b}{2a}$, qui annule le trinome.

268. Théorème III. *Lorsque les racines du trinome sont imaginaires, la valeur du trinome a toujours, quel que soit* x, *le signe de son premier terme.*

Car on a vu (248) que, dans ce cas, le trinome est le produit de a par la somme des carrés de deux nombres réels, dont l'un n'est jamais nul. Cette somme étant toujours positive, le produit est nécessairement de même signe que a.

269. Remarque. Les trois théorèmes précédents peuvent se renfermer sous un seul énoncé: *Le trinome* ax^2+bx+c *est de même signe que son premier terme, excepté lorsque la valeur attribuée à* x *est comprise entre les racines.*

On sous-entend alors que, dans le cas des racines imaginaires, x ne pouvant jamais être compris entre elles, le trinome a toujours le signe de son premier terme.

270. Application aux inégalités du second degré. On dit

qu'une inégalité est du second degré, lorsqu'on peut la mettre sous l'une des deux formes,

$$Ax^2+Bx+C>0, \quad Ax^2+Bx+C<0;$$

A, B, C désignent des nombres donnés positifs ou négatifs; et x est un nombre inconnu dont il faut déterminer les limites, de manière à vérifier l'inégalité qui le renferme.

Les théorèmes précédents vont servir à résoudre cette question importante.

1° Soit à résoudre l'inégalité :

$$3x^2+5x+\frac{4}{3}<0.$$

En égalant le premier membre à zéro, on trouve pour racines $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{4}{3}$. Les racines étant réelles et inégales, il faut, pour que l'inégalité soit vérifiée, c'est-à-dire pour que le premier membre soit de signe contraire à son premier terme, que la valeur de x soit comprise entre $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{4}{3}$, ou que l'on ait :

$$-\frac{4}{3}<x<-\frac{1}{3}.$$

2° Soit encore l'inégalité :

$$-9+6x-x^2<0.$$

Dans ce cas, les racines du trinome sont réelles et égales à 3; son premier terme $-x^2$ est négatif; donc l'inégalité sera vérifiée pour toute valeur attribuée à x, excepté pour la valeur $x=3$, qui la transforme en égalité.

3° Soit l'inégalité :

$$x^2-3x+7>0.$$

Dans ce cas, les racines du trinome sont imaginaires, et son premier terme est positif; l'inégalité est satisfaite, quel que soit x.

271. Remarque. Nous verrons plus loin que la théorie des inégalités sert fréquemment, dans la discussion des problèmes, à déterminer les conditions de possibilité.

EXERCICES.

I. Résoudre l'équation :

$$(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}=a-(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On trouve : $$x=\pm\frac{a}{2}\left(\frac{a^2-4}{a^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

II. Résoudre l'équation : $$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1.$$

On trouve : $$x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}.$$

III. Résoudre l'équation :

$$\sqrt{(1+x)^2-ax}+\sqrt{(1-x)^2+ax}=x.$$

On trouve : $$x=\pm 2\sqrt{(1-a)\left(1-\frac{a}{3}\right)},$$

et $$x=0,$$

qui ne convient, qu'en changeant le signe de l'un des radicaux.

IV. Résoudre l'équation : $$\frac{21x^3-16}{3x^2-4}-7x=5.$$

On trouve : $$x'=2,\qquad x''=-\frac{2}{15}.$$

V. Résoudre l'équation :

$$mqx^2-mnx+pqx-np=0.$$

On trouve : $$x'=\frac{n}{q},\qquad x''=-\frac{p}{m}.$$

VI. Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0.$$

On trouve : $$x=\frac{a}{2}(-3\pm\sqrt{3}).$$

VII. Résoudre l'équation :

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}}{3}=\frac{20-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}}.$$

On prend $\sqrt{x^2+x+6}$ pour inconnue auxiliaire, et l'on trouve :

$$x'=5,\qquad x''=-6;$$

et, en outre, $$x=\frac{-1\pm\sqrt{377}}{2},$$

racines qui ne conviennent, que si l'on prend le radical avec le signe —.

VIII. Résoudre l'équation :

$$2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30.$$

On prend $2x^2+3x$ pour inconnue auxiliaire, et l'on trouve :

$$x'=3,\quad x''=-\frac{9}{2},\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{329}}{4}:$$

ces deux dernières ne conviennent que si l'on prend le radical avec le signe —.

IX. Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

On trouve : $$x=\pm\frac{1}{2}.$$

X. Résoudre l'équation :

$$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{(1-x^2)}.$$

En posant $$z=\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}},$$

On trouve : $$z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\qquad x=\frac{z^m-1}{z^m+1}.$$

XI. Résoudre l'équation : $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2=1+\frac{cx}{ab}.$

On trouve : $$x=a\left(1\pm2\sqrt{\frac{b}{c}}\right).$$

XII. Résoudre l'équation :

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=0.$$

On trouve : $$x=\frac{-(a+b+c)\pm2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}.$$

XIII. Former la somme des carrés, celle des cubes, celle des quatrièmes puissances et celle des inverses des quatrièmes puissances des racines de l'équation, $ax^2+bx+c=0$.

On trouve : $$x'^2+x''^2=\frac{b^2-2ac}{a^2},\qquad x'^3+x''^3=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

$$x'^4+x''^4=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4},\qquad \frac{1}{x'^4}+\frac{1}{x''^4}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{c^4}.$$

XIV. Trouver les conditions nécessaires, pour que la fraction,

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'},$$

soit indépendante de x.

On trouve les conditions : $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$

XV. Démontrer que l'équation :

$$(b^2-4ac)\,x^2+2\,(2ac'+2ca'-bb')\,x+(b'^2-4a'c')=0,$$

a toujours ses racines réelles, quand (b^2-4ac) est négatif.

Il n'y a lieu à démonstration, que lorsque $(b'^2-4a'c')$ est aussi négatif. On pose alors : $b^2-4ac=-\alpha^2$, $b'^2-4a'c'=-\alpha'^2$; et l'on prouve que la quantité qui, dans les valeurs de x, est placée sous le radical, est un produit de deux facteurs, dont chacun est une somme de deux carrés.

CHAPITRE II.

DES ÉQUATIONS A UNE INCONNUE, QUI SE RAMÈNENT A CELLES DU SECOND DEGRÉ.

§ I. Des équations bicarrées.

272. Résolution de l'équation bicarrée. Une équation à une inconnue est dite *bicarrée*, lorsqu'elle ne contient que le carré et la quatrième puissance de l'inconnue. Elle peut toujours être ramenée à la forme,

$$ax^4+bx^2+c=0. \qquad [1]$$

Si l'on prend x^2 pour inconnue, cette équation devient du second degré. Car en posant : $x^2=z$, on a : $x^4=z^2$; et l'équation [1] devient :

$$az^2+bz+c=0.$$

On tire de là ;

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

comme x est la racine carrée de z, on a :

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}. \qquad [2]$$

Ainsi x admet, en général, quatre valeurs, égales deux à deux et de signes contraires.

273. Discussion des formules. 1° Si l'on a : $b^2-4ac>0$, les deux valeurs de z sont réelles ; elles peuvent, d'ailleurs (**246**), être toutes deux positives, ou toutes deux négatives, ou encore l'une positive et l'autre négative. *Dans le premier cas, les quatre*

valeurs de x *sont réelles; dans le second, elles sont toutes les quatre imaginaires; dans le troisième, deux d'entre elles sont réelles, et les deux autres sont imaginaires.*

2° Si l'on a : $b^2-4ac=0$, les valeurs de z sont réelles et égales; par suite, *les valeurs de* x *sont égales deux à deux : elles sont réelles, si* b *et* a *sont de signes contraires, et imaginaires, si* b *et* a *sont de même signe.*

3° Si l'on a : $b^2-4ac<0$, les valeurs de z sont imaginaires; et, par conséquent, *les quatre valeurs de* x *sont imaginaires.*

274. Transformation des expressions de la forme $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. La formule [2], qui résout l'équation bicarrée, contient deux radicaux superposés; et cette forme n'est pas avantageuse, en général, quand il s'agit de calculer numériquement les racines. Il n'est donc pas inutile de chercher, à quelles conditions il sera possible de transformer une expression de la forme $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ en une somme de deux radicaux simples.

Posons l'équation :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y};$$

et essayons de la résoudre par des valeurs *rationnelles* de x et de y; c'est le seul cas, où il y ait avantage à opérer la transformation. Nous supposerons, pour éviter toute difficulté, que les quatre radicaux ont le signe $+$; il nous sera permis alors (126) d'élever au carré les deux membres de l'équation [1]; et nous aurons l'équation équivalente :

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy};$$

ou

$$(a-x-y)+\sqrt{b}=2\sqrt{xy}. \qquad [2]$$

Si nous élevons encore au carré, nous aurons :

$$(a-x-y)^2+2(a-x-y)\sqrt{b}+b=4xy.$$

Or le second membre est commensurable, par hypothèse; il en est de même des termes $(a-x-y)^2$ et b. Il faut donc que $2(a-x-y)\sqrt{b}$ soit aussi commensurable; et, comme $\sqrt{b}$ ne l'est pas, il faut que $(a-x-y)$ soit nul. On doit donc avoir :

$$x+y=a$$

et, par suite :

$$4xy=b \qquad [3]$$

Il résulte de là, que x et y ne peuvent être que les racines (256) de l'équation :

$$x^2-ax+\frac{b}{4}=0. \qquad [4]$$

Ainsi, on doit avoir, par exemple :

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}, \qquad y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}. \qquad [5]$$

Mais ces valeurs ne sont commensurables que dans le cas où (a^2-b) est un carré parfait. Donc, si cette condition n'est pas remplie, la transformation n'est pas possible. Si, au contraire, (a^2-b) est un carré c^2, x et y ont des valeurs commensurables :

$$x=\frac{a+c}{2}, \quad y=\frac{a-c}{2};$$

et, ces valeurs vérifiant l'équation [2], nous avons la formule de transformation :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}. \qquad [6]$$

Faisons remarquer, d'ailleurs, que, quel que soit (a^2-b), la formule :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

est vraie, puisqu'en l'élevant au carré, on arrive à une identité ; mais elle n'offre aucun avantage, quand (a^2-b) n'est pas un carré, puisqu'alors on substitue à un radical une somme de deux radicaux *de même forme.*

275. Remarque. Si l'on a à tranformer $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, on posera :

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y},$$

x étant plus grand que y; et les mêmes raisonnements conduiront à la même équation [4], pour la détermination de x et de y. La transformation ne réussira donc que dans le cas où (a^2-b) serait un carré parfait c^2; et l'on aura :

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}. \qquad [7]$$

Si maintenant le premier membre a le signe —, il est facile de voir que, pour faire concorder les signes des deux membres, on devra écrire :

$$\left.\begin{array}{l} -\sqrt{a+\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}, \\ -\sqrt{a-\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}. \end{array}\right\} \quad [8]$$

Car il suffira, pour obtenir ces nouvelles formules, de changer les signes des deux membres des formules [6] et [7].

Ainsi, en résumé, on a :

$$\pm\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right),$$

en admettant que les signes extérieurs se correspondent, ainsi que les signes intérieurs.

276. Applications.

1° $\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{49-24}}{2}}-\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-24}}{2}}=\sqrt{6}-1.$

2° $\sqrt{94+6\sqrt{245}}=\sqrt{94+\sqrt{8820}}=\sqrt{\dfrac{94+4}{2}}+\sqrt{\dfrac{94-4}{2}}=7+3\sqrt{5}.$

3° On démontre, en géométrie, qu'en désignant par C le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, et par x le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double, on a la formule : $x=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-C^2}}$. Ici, $a=2R^2$, $b=4R^4-C^2R^2$; d'où $a^2-b=C^2R^2$. On a donc :

$$x=\sqrt{R\left(R+\frac{C}{2}\right)}-\sqrt{R\left(R-\frac{C}{2}\right)}.$$

4° Condition nécessaire et suffisante, pour que les racines de l'équation bicarrée $x^4+px^2+q=0$, s'expriment par la somme de deux radicaux simples.

On a : $$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Dans ce cas, $a=-\dfrac{p}{2}$, $b=\dfrac{p^2}{4}-q$; donc $a^2-b=q$.

Ainsi, il faut et il suffit que q soit un carré.

§ II. De quelques équations binomes

277. Forme de l'équation binome. Une équation binome est une équation à deux termes, de la forme :

$$x^m+A=0. \qquad [1]$$

Si A est positif, en désignant par a la racine m^{me} de A, on aura : $A=a^m$. Si A est négatif, on désignera par a la racine m^{me} de $-A$, et l'on aura : $A=-a^m$. L'équation [1] prendra alors la forme,

$$x^m\pm a^m=0. \qquad [2]$$

Et, si l'on pose, $x=ay$, l'équation [2] deviendra :

$$a^m y^m\pm a^m=0,$$

ou

$$y^m\pm 1=0. \qquad [3]$$

Telle est la forme à laquelle on peut ramener toute équation binome. Quand on a trouvé les valeurs de y, on les multiplie par a, pour avoir les valeurs de x.

278. Résolution de quelques équations binomes.

1° L'équation [1] $\quad x^2-1=0,$

a pour racines, $\quad x=\pm 1.$

L'équation [2] $\quad x^2+1=0,$

a pour racines, $\quad x=\pm\sqrt{-1}.$

2° L'équation [3] $\quad x^3-1=0,$

peut s'écrire : $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0;$

elle est donc décomposable en deux équations,

$$x-1=0, \quad \text{et} \quad x^2+x+1=0;$$

et ses racines sont :

$$x=1, \quad \text{et} \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

L'équation [4] $\quad x^3+1=0,$

devient identique à la précédente, quand on y change x en $-x$: ses racines sont donc celles de [3], changées de signe, c'est-à-dire :

$$x=-1, \quad \text{et} \quad x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

3° L'équation [5] $x^4-1=0$,

peut s'écrire : $(x^2-1)(x^2+1)=0$.

Elle est donc équivalente aux deux équations [1] et [2]; et, par suite, ses racines sont celles de ces équations, c'est-à-dire :

$$x=\pm 1, \qquad x=\pm\sqrt{-1}.$$

L'équation [6] $x^4+1=0$,

est identique à $x^4+2x^2+1=2x^2$,

ou à $(x^2+1)^2-2x^2=0$:

elle peut donc s'écrire :

$$(x^2+1+x\sqrt{2})\,(x^2+1-x\sqrt{2})=0;$$

et par suite, elle est décomposable en deux équations du deuxième degré,

$$x^2+x\sqrt{2}+1=0, \quad \text{et} \quad x^2-x\sqrt{2}+1=0.$$

Ces deux équations ne diffèrent que par le signe de x : elles ont pour racines,

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2} \qquad x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2},$$

Ce sont donc là les quatre racines de l'équation [6].

4° L'équation [7] $x^6-1=0$,

est décomposable en deux autres,

$$x^3-1=0 \qquad x^3+1=0.$$

Ses solutions sont donc les six racines des équations [3] et [4], c'est-à-dire :

$$x=\pm 1, \qquad \text{et} \qquad x=\frac{\pm 1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

L'équation [8] $x^6+1=0$,

devient identique à la précédente, quand on y remplace x par $x\sqrt{-1}$; car on a :

$$(x\sqrt{-1})^6=x^6(\sqrt{-1})^6=-x^6.$$

Ses racines sont donc données par les équations :

$$x\sqrt{-1}=\pm 1, \quad x\sqrt{-1}=\frac{\pm 1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

et, pour les obtenir, il suffit de multiplier les deux membres par $\sqrt{-1}$; car alors les premiers membres deviennent égaux à $x\times(-1)$, ou à $-x$. On a donc :

$$x=\pm\sqrt{-1}, \quad \text{et} \quad x=\frac{\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}.$$

5° L'équation [9] $\quad x^8-1=0,$

est décomposable en deux autres,

$$x^4-1=0, \quad \text{et} \quad x^4+1=0.$$

Ses racines sont donc les huit racines des équations [5] et [6], c'est-à-dire :

$$x=\pm 1, \quad x=\pm\sqrt{-1}, \quad x=\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$$

L'équation [10] $\quad x^8+1=0,$

peut s'écrire : $\quad x^8+2x^4+1=2x^4,$

ou $\quad (x^4+1)^2-2x^4=0:$

elle se décompose donc en deux autres,

$$x^4+1+x^2\sqrt{2}=0, \quad \text{et} \quad x^4+1-x^2\sqrt{2}=0,$$

équations bicarrées que l'on sait résoudre, et qui donnent :

$$x=\pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}}, \quad \text{et} \quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}}.$$

6° Enfin les racines de l'équation,

$$x^{12}-1=0, \qquad [11]$$

sont celles des équations [7] et [8].

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de ces transformations; car notre but était seulement de montrer, par quelques exemples, comment certaines équations, de degré supérieur au second, peuvent se ramener à celles du second degré. Mais la méthode générale de résolution des équations binomes appartient à la seconde partie de l'algèbre.

§ III. Des équations trinomes.

279. Résolution de l'équation trinome. Une équation trinome est une équation à trois termes, de la forme,

$$ax^{2n}+bx^n+c=0. \qquad [1]$$

Si l'on prend x^n pour inconnue, en posant :

$$x^n=z, \quad \text{d'où} \quad x^{2n}=z^2, \qquad [2]$$

cette équation devient du second degré,

$$az^2+bz+c=0. \qquad [3]$$

On peut donc obtenir les deux valeurs de z; et, en les substituant successivement dans l'équation [2], on est ramené, pour avoir les racines de l'équation [1], à résoudre deux équations binomes du degré n.

EXERCICES.

I. Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1.$$

On trouve : $x=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}.$

II. Résoudre l'équation : $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$

On pose : $\sqrt[3]{x}=z;$

et l'on trouve : $x=\pm 8, \quad x=\pm\frac{5}{2}\sqrt{-\frac{5}{2}}.$

III. Résoudre l'équation : $\frac{x}{a+x}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=\frac{b}{a}.$

On pose : $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}}=z;$

et l'on trouve :

$$z=\frac{-a\pm\sqrt{5a^2-4ab}}{2(a-b)}, \qquad x=\frac{a(a^2+2ab-2b^2\pm a\sqrt{5a^2-4ab})}{2(a-b)^2}.$$

IV. Résoudre l'équation :

$$cx=(\sqrt{1+x}-1)\,(\sqrt{1-x}+1).$$

On pose : $\sqrt{1+x}=z$;

et l'on trouve : $x=0,\quad x=\dfrac{4c\,(1-c^2)}{(1+c^2)^2}.$

V. Résoudre l'équation :

$$(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x}-3\sqrt{x}=46+2x.$$

On pose : $x+\sqrt{x}+2=z$;

et l'on trouve : $x=4,\quad x=9,\quad x=\dfrac{-13\pm3\sqrt{-3}}{2}.$

VI. Résoudre l'équation :

$$(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}-5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}=0.$$

On trouve : $x=0,\quad x=\dfrac{63a}{65}.$

VII. Résoudre l'équation :

$$(1+x)^{\frac{2}{5}}+(1-x)^{\frac{2}{5}}=(1-x^2)^{\frac{11}{5}}.$$

On trouve : $x=\pm\dfrac{\sqrt{-3}}{3}.$

VIII. Résoudre l'équation :

$$\frac{(1+x)^2}{1+x^3}+\frac{(1-x)^2}{1-x^3}=a.$$

On trouve : $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{3}{4}}}.$

IX. Résoudre l'équation :

$$(a+x)^{\frac{1}{4}}+(a-x)^{\frac{1}{4}}=h.$$

On trouve : $x=\pm\sqrt{a^2-\left\{h^2\pm\sqrt{a+\dfrac{h^4}{2}}\right\}^4}.$

X. Résoudre l'équation : $\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{x}{a}.$

On trouve : $x=a,\quad x=a\,\dfrac{-3\pm\sqrt{-7}}{8}.$

Quelquefois on reconnaît, à l'inspection d'une équation, qu'elle admet une racine a. Son premier membre est alors décomposable en facteurs (76) : et cette décomposition facilite la résolution de l'équation, en abaissant son degré, car son premier membre est divisible par $(x-a)$.

En voici quelques exemples.

XI. Résoudre l'équation : $x^3-3x=2.$

Elle admet la racine, $x=2.$

XII. Résoudre l'équation : $2x^3-x^2=1$.

Elle admet la racine, $x=1$.

XIII. Résoudre l'équation :

$$x^3-6x^2+10x-8=0.$$

Elle admet la racine, $x=4$.

XIV. Résoudre l'équation :

$$x^4-2x^3+x-132=0.$$

On l'écrit sous la forme,

$$x^2(x-1)^2-x(x-1)-132=0;$$

on pose : $x(x-1)=z$;

et l'on trouve : $x=4$, $x=-3$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{-43}}{2}$.

XV. Résoudre l'équation :

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=0.$$

Elle admet deux fois la racine, $x=1$;

et on la ramène ainsi au second degré.

XVI. Résoudre l'équation :

$$x^4+\frac{13}{3}x^3-39x-81=0.$$

On écrit l'équation sous la forme,

$$x^4-81+\frac{13}{3}x(x^2-9)=0;$$

et l'on trouve : $x=\pm 3$, $x=\dfrac{-13\pm\sqrt{-155}}{6}$.

CHAPITRE III.

DES ÉQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES.

§ I. Des équations du second degré à deux inconnues.

280. Forme générale de l'équation du second degré à deux inconnues. Une équation du second degré, à deux inconnues x et y, ramenée à la forme entière, ne peut renfermer que six es-

pèces de termes, savoir : des termes en x^2, des termes en xy, des termes en y^2, puis des termes en y, des termes en x, et des termes indépendants. L'équation du second degré peut donc toujours se ramener à la forme,

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

281. Résolution de deux équations dont l'une est du premier degré. La résolution des équations simultanées est une des questions les plus compliquées de l'algèbre. Nous n'avons pas à en aborder ici la théorie générale : nous nous bornerons à traiter quelques cas fort simples.

On peut toujours résoudre deux équations à deux inconnues, l'une du premier et l'autre du second degré. Soit, en effet, le système :

$$\left.\begin{aligned} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \\ ax+by=c. \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}[1]\\ [2]\end{matrix}$$

On tire de l'équation [2] :

$$y=\frac{c-ax}{b};$$

substituant cette valeur dans l'équation [1], on obtient une équation du second degré en x :

$$\begin{aligned}(Ab^2-Bab+Ca^2)x^2+(Bbc-2Cac+Db^2-Eab)x\\ +Cc^2+Ebc+Fb^2=0,\end{aligned} \quad [3]$$

laquelle fournit deux valeurs pour cette inconnue ; et chacune de ces valeurs, mise à la place de x, dans l'équation [2], donne deux valeurs correspondantes pour y.

Le système proposé admet donc deux systèmes de solutions Si les deux valeurs de x sont réelles, les deux systèmes de solutions sont réels : ils sont imaginaires, si les valeurs de x sont imaginaires.

282. Cas de deux équations du second degré. *Lorsque les équations à deux inconnues sont toutes deux du second degré, l'élimination de l'une des inconnues conduit, en général, à une équation complète du quatrième degré.*

En effet, soit le système :

$$\left.\begin{aligned} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \\ A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0. \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}[1]\\ [2]\end{matrix}$$

Pour éliminer y, on pourrait tirer sa valeur de l'une des équations, et la substituer dans l'autre : mais on compliquerait ainsi l'équation finale de radicaux, qu'il faudrait ensuite faire disparaître. Il est plus simple d'éliminer d'abord y^2, en multipliant l'équation [1] par C' et l'équation [2] par C, et en soustrayant l'un des résultats de l'autre ; on a ainsi :

$$(AC'-CA')x^2+(BC'-CB')xy+(DC'-CD')x+(EC'-CE')y$$
$$+(FC'-CF')=0,$$

ou, en représentant chaque coefficient par une lettre,

$$ax^2+bxy+cx+dy+e=0; \qquad [3]$$

et cette équation [3] peut remplacer (**139**) l'une des deux équations proposées.

On tire alors de l'équation [3] la valeur de y :

$$y=-\frac{ax^2+cx+e}{bx+d},$$

et on la substitue dans l'équation [1], qui devient :

$$Ax^2-\frac{Bx(ax^2+cx+e)}{bx+d}+\frac{C(ax^2+cx+e)^2}{(bx+d)^2}$$
$$+Dx-\frac{E(ax^2+cx+e)}{bx+d}+F=0. \qquad [4]$$

Or on voit aisément que, si l'on chasse les dénominateurs, en multipliant les deux membres par $(bx+d)^2$, cette équation sera du quatrième degré. Comme elle contiendra, en général, des termes du troisième degré et des termes du premier degré, il ne sera pas possible de la résoudre par les procédés ordinaires de l'Algèbre élémentaire.

Ainsi, le système de deux équations du second degré à deux inconnues ne peut être résolu, en général, par les méthodes connues jusqu'ici. Mais on rencontre parfois des systèmes simples, qui peuvent se résoudre à l'aide de certains artifices particuliers, que nous allons faire connaître.

282. Résolution de quelques systèmes simples. 1° Soit le système :

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a, \\ xy&=b^2. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

On reconnaît immédiatement (256) que x et y sont les racines de l'équation,

$$x^2-ax+b^2=0;$$

Donc. $$\begin{matrix}x\\y\end{matrix}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b^2}}{2}. \qquad [2]$$

Pour que les racines soit réelles, il faudra que l'on ait :

$$a^2 \geqq 4b^2.$$

2° Soit le système ;

$$\left.\begin{aligned}x-y&=a,\\ xy&=b^2.\end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

On ramène ce système au précédent, en posant $y=-v$; car on a alors :

$$x+v=a, \qquad xv=-b^2;$$

et, par suite, $$\begin{matrix}x\\v\end{matrix}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b^2}}{2}.$$

Ainsi l'on a :

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}\\ y&=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2};\end{aligned}\right\} \quad [2] \quad \text{ou} \quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2},\\ y&=-\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}.\end{aligned}\right\} \quad [3]$$

Il y a donc deux systèmes de solutions, qui sont toujours réelles.

3° Soit le système :

$$\left.\begin{aligned}x+y&=a,\\ x^2+y^2&=b^2.\end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Si l'on élève au carré les deux membres de la première équation, puis qu'on en retranche les deux membres de la seconde, on a :

$$2xy=a^2-b^2.$$

On connaît donc la somme et le produit des inconnues, qui sont, par suite, racines de l'équation :

$$x^2-ax+\frac{a^2-b^2}{2}=0.$$

On a donc : $$\begin{matrix}x\\y\end{matrix}=\frac{a\pm\sqrt{2b^2-a^2}}{2}. \qquad [2]$$

Si l'on a : $2b^2-a^2>0$, les valeurs de x et de y sont réelles ; elles sont imaginaires, si l'on a : $2b^2-a^2<0$.

4° Soit le système :

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=a^2,\\ xy&=b^2.\end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Si l'on double les deux membres de la seconde équation, puis qu'on l'ajoute à la

première, et qu'on l'en retranche successivement, on remplace le système proposé par le système équivalent (139) :

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^2&=a^2+2b^2,\\(x-y)^2&=a^2-2b^2.\end{aligned}\right\}\qquad[2]$$

On tire de là :

$$\left.\begin{aligned}x+y&=\pm\sqrt{a^2+2b^2},\\x-y&=\pm\sqrt{a^2-2b^2}.\end{aligned}\right\}\qquad[3]$$

Par conséquent, en ajoutant et en retranchant membre à membre, puis en divisant par 2, on a

$$\left.\begin{aligned}x&=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b^2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2b^2},\\y&=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b^2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2b^2}.\end{aligned}\right\}\qquad[4]$$

REMARQUE. Il semble qu'il y ait là huit systèmes de solutions, qu'on obtiendrait en combinant les signes des radicaux de toutes les manières possibles. Mais on doit faire observer que les équations [3] forment seulement quatre systèmes; savoir, en posant $\sqrt{a^2+2b^2}=R$, et $\sqrt{a^2-2b^2}=R'$:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=R,\\x-y&=R',\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x+y&=-R,\\x-y&=R',\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x+y&=R,\\x-y&=-R',\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x+y&=-R,\\x-y&=-R'.\end{aligned}\right\}$$

De plus, si l'on permute x et y, les équations [1] ne changent pas; le premier et le troisième système sont équivalents; il en est de même du second et du quatrième. Il n'y a donc, en réalité, que deux systèmes de solutions.

On voit d'ailleurs, que les solutions seront réelles, si l'on a : $a^2>2b^2$; et imaginaires, si l'on a : $a^2<2b^2$.

5° Soit le système :

$$\left.\begin{aligned}x^2-y^2&=a^2,\\xy\ &=b^2.\end{aligned}\right\}\qquad[1]$$

On ramène ce système à celui du second cas, en l'écrivant ainsi :

$$\left.\begin{aligned}x^2-y^2&=a^2,\\x^2y^2\ &=b^4.\end{aligned}\right\}\qquad[2]$$

Et l'on en tire les valeurs de x^2 et de y^2, puis celles de x et de y :

$$\left.\begin{aligned}x&=\pm\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^4}}{2}},\\y&=\pm\sqrt{\frac{-a^2+\sqrt{a^4+4b^4}}{2}};\end{aligned}\right\}[3]\quad\text{ou}\quad\left.\begin{aligned}x&=\pm\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^4+4b^4}}{2}},\\y&=\pm\sqrt{\frac{-a^2-\sqrt{a^4+4b^4}}{2}}.\end{aligned}\right\}[4]$$

Mais le système [2] est plus général que le système [1], parce qu'on a élevé au carré les deux membres de la seconde équation [1]. On doit donc combiner les valeurs de x et de y, de manière que leur produit soit égal à b^2 : et cela exige que l'on associe les valeurs qui ont le même signe.

Il y a donc quatre systèmes de solutions : les deux premiers sont réels, et les deux autres imaginaires.

§ II. Des équations du second degré à plus de deux inconnues.

284. Exemples. 1° Soit le système :

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a\,,\\ x^2+y^2+z^2&=b^2\,,\\ xy&=cz.\end{aligned}\right\}\qquad [1]$$

Si l'on élève au carré les deux membres de la première équation, après avoir fait passer z dans le second membre, on a :

$$x^2+2xy+y^2=a^2-2az+z^2\,;$$

et, si l'on substitue à x^2+y^2 et à xy leurs valeurs tirées des deux autres, il vient :

$$2z^2-2(a+c)z+a^2-b^2=0,$$

équation du second degré en z, d'où l'on tire :

$$z=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-2(a^2-b^2)}}{2}.\qquad [2]$$

Connaissant z, on tirera la somme $x+y$ de la première équation, et le produit xy de la troisième; et le calcul s'achèvera, comme au n° **283** (1°).

2° Soit encore le système :

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=37,\\ x^2+xz+z^2&=28,\\ y^2+yz+z^2&=19.\end{aligned}\right\}\qquad [1]$$

Si l'on retranche la seconde équation de la première, et la troisième de la deuxième, on a :

$$\left.\begin{aligned} (y-z)\,(x+y+z)&=9\,,\\ (x-y)\,(x+y+z)&=9\,;\end{aligned}\right\}$$

d'où l'on conclut : $\quad y-z=x-y,\quad$ ou $\quad x+z=2y\,;$ [2]

et, par suite, $\quad (x-y)y=3.$ [3]

On tire de cette dernière : $\quad x=\dfrac{3}{y}+y\,;$

et, substituant cette valeur dans la première des équations proposées, il vient :

$$\left(\frac{3}{y}+y\right)^2+3+y^2+y^2=37,$$

ou

$$3y^4-28y^2+9=0,$$

équation bicarrée qui donne :

$$y=\pm3,\quad y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Par suite,

$$x=\pm4,\quad x=\pm\frac{10}{3}\sqrt{3},$$

$$z=\pm2,\quad z=\mp\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

§ III. Des équations de degré supérieur au second.

285. Exemples. 1° Soit le système :

$$\left.\begin{aligned} x^2y+xy^2&=30, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{5}{6}. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

En chassant les dénominateurs de la seconde équation, on peut écrire ainsi le système :

$$\left.\begin{aligned} xy(x+y)&=30, \\ 6(x+y)&=5xy. \end{aligned}\right\}$$

Si donc on considère xy et $x+y$ comme deux inconnues auxiliaires u et v, on aura :

$$\left.\begin{aligned} uv&=30, \\ 6v&=5u. \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

La seconde équation donne $v=\frac{5}{6}u$; en substituant cette valeur dans la première, on obtient :

$$\frac{5}{6}u^2=30, \quad \text{ou} \quad u^2=36;$$

de là : $$u=\pm 6, \quad \text{et} \quad v=\pm 5.$$

Il faut adopter le même signe pour la valeur de u et pour celle de v, puisque $v=\frac{5}{6}u$.

Si nous adoptons d'abord les valeurs $u=6$, $v=5$, nous avons :

$$\left.\begin{aligned} x+y&=5, \\ xy&=6; \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

d'où l'on déduit, pour x et pour y, les valeurs 2 et 3.

Si nous adoptons $u=-6$, $v=-5$, nous avons :

$$\left.\begin{aligned} x+y&=-5, \\ xy&=-6; \end{aligned}\right\} \qquad [4]$$

d'où l'on déduit pour x et y les valeurs -6 et 1.

2° Soit encore le système :

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{y^2}+\frac{4+y}{y}&=\frac{8+4y}{x}+\frac{12y^2}{x^2}, \\ 4y^2-xy&=x. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

La première équation devient, si l'on chasse les dénominateurs :

$$4x^2+(4+y)yx^2=(8+4y)xy^2+12y^4;$$

et on peut l'écrire, en ajoutant $4y^4$ aux deux membres,

$$x^2(2+y)^2-4xy^2(2+y)+4y^4=16y^4.$$

Or le premier membre est le carré de $x(2+y)-2y^2$; cette équation peut donc s'écrire :

$$[x(2+y)-2y^2]^2=(4y^2)^2;$$

ce qui équivaut à $$x(2+y)-2y^2=\pm 4y^2.$$ [2]

Nous pouvons donc, au système proposé, substituer les deux suivants :

$$[3]\quad \left\{\begin{array}{l} x(2+y)-2y^2=4y^2, \\ 4y^2-xy=x. \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} x(2+y)-2y^2=-4y^2, \\ 4y^2-xy=x. \end{array}\right\}\quad [4]$$

Nous résoudrons, d'ailleurs, sans difficulté ces deux systèmes. En effet la seconde des équations [3], résolue par rapport à x, devient :

$$x=\frac{4y^2}{y+1};$$

et cette valeur, substituée dans la première, donne :

$$4y^2\left(\frac{2+y}{y+1}\right)-6y^2=0, \quad \text{ou} \quad 2y^2(1-y)=0;$$

d'où l'on conclut : $$y=0, \quad \text{et} \quad y=1,$$

et, par suite, $$x=0, \quad \text{et} \quad x=2.$$

On trouvera de même, pour les solutions du système [4] :

$$\left.\begin{array}{l} y=0, \\ x=0, \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} y=-\frac{5}{3}, \\ x=-\frac{50}{3}. \end{array}\right\}$$

Ainsi les solutions du système proposé sont :

$$1^\circ \left\{\begin{array}{l} x=0, \\ y=0, \end{array}\right. \qquad 2^\circ \left\{\begin{array}{l} x=2, \\ y=1, \end{array}\right. \qquad 3^\circ \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{50}{3}, \\ y=-\frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

4° Soit, enfin, le système :

$$\left.\begin{array}{r} x^3+y^3+x^2y+y^2x=13, \\ x^4y^2+x^2y^4=468; \end{array}\right\} \qquad [1]$$

On peut, en groupant les termes, l'écrire ainsi :

$$\left.\begin{array}{r} (x+y)(x^2+y^2)=13, \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468; \end{array}\right\}$$

et, en divisant la seconde équation par la première, on a :

$$x^2y^2=36(x+y),$$

équation qui peut remplacer l'une des précédentes. Si l'on désigne le produit x, par u, et la somme $x+y$ par v, le système devient :

$$\left.\begin{array}{r} v(v^2-2u)=13, \\ u^2=36v. \end{array}\right\} \qquad [2]$$

Si l'on élimine v entre ces deux équations, on a :

$$\frac{u^6}{36^3}-\frac{2u^3}{36}-13=0,$$

équation trinome, d'où l'on tire :

$$\frac{u^3}{36}=36\pm\sqrt{36^2+13\times 36};$$

et de là : $u=-6$, et $u=6\sqrt[3]{13}$.

Par suite, $v=1$, et $v=\sqrt[3]{13^2}$.

Ainsi le premier système de solution est fourni par l'équation :

$$x^2-x-6=0;$$

d'où l'on conclut : $x=3$, $y=-2$;

et le second système est fourni par l'équation :

$$x^2-\sqrt[3]{13^2}x+6\sqrt[3]{13}=0\ ;$$

d'où l'on conclut :

$$x=\frac{\sqrt[3]{13^2}+\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2},\qquad y=\frac{\sqrt[3]{13^2}-\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}.$$

EXERCICES.

I. Résoudre les équations :

$$\begin{cases} ab-\frac{1}{2}(a+b)\ (x+y)+xy=0, \\ cd-\frac{1}{2}(c+d)\ (x+y)+xy=0 \end{cases}$$

et en déduire : $\dfrac{(x-y)^2}{4}=\dfrac{(a-c)\ (a-d)\ (b-c)\ (b-d)}{(a+b-c-d)^2}$.

On tire $x+y$ et xy des deux équations, et on forme l'expression $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy$, qui est égale à $\frac{(x-y)^2}{4}$.

II. Résoudre le système :

$$a^n x^m+b^m y^n=2\sqrt{a^n b^m x^m y^n},\quad xy=ab.$$

On élimine y; et, en posant $\sqrt{x^{m+n}}=z$, on obtient une équation du second degré,

$$z^2-2b^n\sqrt{a^{m-n}}z+b^{m+n}=0$$

On en tire z; et l'on obtient ensuite x et y.

III. Résoudre le système :

$$x+y=a,\quad x^3+y^3=d^3.$$

On calcule le produit xy; et l'on arrive ensuite à

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4d^3}{3a} - \frac{a^2}{3}}.$$

IV. Résoudre le système :

$$x + y = a, \quad x^4 + y^4 = d^4.$$

On calcule le produit xy, en élevant la première équation à la quatrième puissance; et l'on trouve : $\quad xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + d^4}{2}}.$

On en conclut aisément x et y.

V. Résoudre le système :

$$x + y = a, \quad x^5 + y^5 = d^5.$$

On calcule le produit xy d'une manière analogue, et l'on trouve :

$$xy = \frac{a^2}{2} \pm \frac{\sqrt{5a(a^5 + 4d^5)}}{10a}.$$

VI. Résoudre le système :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{b^2}.$$

En prenant $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ pour inconnues, on est ramené au système 3° (n° 283).

VII. Résoudre le système :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x + y = b.$$

On est ramené au même système, en prenant $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ pour inconnues.

VIII. Résoudre le système :

$$x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35, \quad x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5.$$

On prend pour inconnues $x^{\frac{1}{4}}$ et $y^{\frac{1}{5}}$; et l'on est ramené à l'exercice III.

IX. Résoudre le système :

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1, \qquad \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78.$$

On prend encore pour inconnues $x + y$ et xy. (Rép. : $x = 81$, $y = 16$).

X. Résoudre le système :

$$x - y + \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} = \frac{20}{x + y}, \qquad x^2 + y^2 = 34.$$

On trouve aisément :

$$1^\circ \; x = \pm 5, \; y = \pm 3; \quad 2^\circ \; x = \pm\sqrt{\frac{59}{2}}, \; y = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$$

XI. Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x+y)(xy+1) = 18xy, \\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1) = 208x^2y^2. \end{cases}$$

On divise la première équation par xy, la seconde par x^2y^2; puis on représente $x + \frac{1}{x}$ par u, $y + \frac{1}{y}$ par v, et l'on arrive aux deux équations :

$$v + u = 18, \quad v^2 + u^2 = 212;$$

d'où l'on tire aisément : $x = 7 \pm 4\sqrt{3}$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$.

XII. Résoudre le système :

$$\left.\begin{array}{c} \sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a, \\ x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b. \end{array}\right\}$$

On remarque que la première équation peut s'écrire :

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2},$$

et que la seconde est le cube de la suivante :

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{b}.$$

On est ainsi ramené au système (3°) du n° **288**, en posant $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$. Mais la dernière équation n'est pas aussi générale que la seconde des équations proposées ; de sorte qu'on n'a pas ainsi toutes les solutions.

XIII. Résoudre le système :

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=a, \quad \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=b.$$

On tire facilement de ces équations, en posant $\sqrt[3]{\dfrac{b+a}{b-a}}=r$:

$$x=ry; \quad y=\frac{a(1+r)}{1+r+r^2} \quad x=\frac{ar(1+r)}{1+r+r^2}.$$

XIV. Résoudre le système :

$$\frac{xy}{z}=a, \quad \frac{xz}{y}=b, \quad \frac{yz}{x}=c.$$

On trouve : $x^2=ab$, $y^2=ac$, $z^2=bc$.

XV. Résoudre le système :

$$x(y+z)=2p, \quad y(z+x)=2q, \quad z(x+y)=2r.$$

On tire aisément de là :

$$xy=p+q-r, \quad xz=p+r-q, \quad yz=q+r-p;$$

et, par suite,

$$x=\sqrt{\frac{(p+q-r)(p+r-q)}{q+r-p}},\quad y=\sqrt{\frac{(p+q-r)(q+r-p)}{p+r-q}},$$

$$z=\sqrt{\frac{(p+r-q)(q+r-p)}{p+q-r}}.$$

XVI. Résoudre le système :

$$xy^2z^3=4725,\quad \frac{yz^2}{x}=6\frac{3}{7},\quad \frac{z}{x^2y}=\frac{3}{245}.$$

On trouve : $x=7,\quad y=5,\quad z=3.$

XVII. Résoudre le système :

$$x+y+z=13,\quad x^2+y^2+z^2=61,\quad 2yz=x(z+y).$$

On élimine aisément y et z; et l'on trouve $x=4$ et $x=9$. On obtient, par suite, $y+z$ et yz; d'où l'on conclut y et z. Les valeurs, qui correspondent à $x=9$ sont imaginaires ; celles qui correspondent à $x=4$, sont $y=3$, $z=6$.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION ET DISCUSSION DES PROBLÈMES D'UN DEGRÉ SUPÉRIEUR AU PREMIER.

§ I. Problèmes à une inconnue.

286. PROBLÈME I. *Calculer la profondeur d'un puits, sachant qu'il s'est écoulé un nombre θ de secondes entre l'instant où l'on a laissé tomber une pierre et celui où le bruit qu'elle a fait, en frappant le fond, est revenu à l'oreille.* (On néglige la résistance de l'air.)

Pour résoudre ce problème, il faut se rappeler deux principes de physique :

1° L'espace parcouru par un corps pesant est proportionnel au carré du temps t écoulé depuis le commencement de la chute ; et, si l'on désigne par g un coefficient constant, égal à $9^m,80896$, il est représenté par l'expression $\frac{gt^2}{2}$.

2° Le son se meut uniformément, et parcourt 333 mètres par seconde. Dans le calcul qui va suivre, nous représenterons sa vitesse par v; de sorte que, dans le temps t, il parcourt l'espace vt.

Soit x la profondeur du puits, évaluée en mètres. En nommant t_1 le nombre de secondes que la pierre met à descendre, on a :

$$x=\frac{gt_1^2}{2};\quad \text{d'où}\quad t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}}. \qquad [1]$$

En nommant t_2 le temps que le son met à remonter, on a :

$$x = vt_2;\quad \text{d'où}\quad t_2 = \frac{x}{v}. \qquad [2]$$

Or $t_1 + t_2 = \theta$, d'après l'énoncé ; donc l'équation du problème est :

$$\frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = \theta. \qquad [3]$$

Pour résoudre cette équation, qui contient un radical, on la met sous la forme :

$$\theta - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}}. \qquad [4]$$

et, élevant les deux membres au carré, on a :

$$\theta^2 - 2\frac{\theta x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = \frac{2x}{g}; \qquad [5]$$

ou, en faisant passer tous les termes dans le premier membre, et ordonnant :

$$\frac{x^2}{v^2} - 2x\left(\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g}\right) + \theta^2 = 0. \qquad [6]$$

On tire de là :

$$x = \frac{\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{\theta^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}.$$

Discussion. Les deux racines sont réelles ; car la quantité placée sous le radical est évidemment positive.

Il est facile de voir, en outre, qu'elles sont toutes deux positives : car, d'après l'équation [6], leur produit $\theta^2 v^2$ est positif, ainsi que leur somme $\left(\frac{2\theta}{v} + \frac{2}{g}\right)v^2$. Le problème ne peut, cependant, avoir qu'une solution ; car deux puits de profondeurs différentes ne peuvent correspondre à une même valeur de θ. Pour expliquer cette singularité, et trouver quelle est celle des deux racines qui répond à la question, remarquons qu'en élevant au carré les deux membres de l'équation [4], nous formons une équation nouvelle, qui, il est vrai, ne peut manquer d'être satisfaite si la proposée l'est elle-même, mais qui peut l'être aussi sans que celle-ci le soit. Les deux membres auraient, en effet, même carré, s'ils étaient égaux et de signes contraires. L'équation [5] équivaut donc réellement (**126**) aux deux suivantes :

$$\theta - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \quad \theta - \frac{x}{v} = -\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

La première de ces équations est la seule qui corresponde au problème proposé ; et sa solution est la solution du problème. Or cette solution est moindre que $v\theta$, puisque, $\theta - \frac{x}{v}$ étant positif, il en est de même de $v\theta - x$: au contraire, la solution de la seconde équation est plus grande que $v\theta$, puisque

$\theta - \frac{x}{v}$ est négatif; elle est, par conséquent, la plus grande racine de l'équation [5] : elle doit être rejetée comme solution étrangère. Ainsi, la solution cherchée est :

$$x = \frac{\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g} - \sqrt{\left(\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{\theta^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}.$$

Remarquons que, dans l'équation [6] qui fournit cette solution, v représente la vitesse du son, égale à 333 environ; le carré v^2 est donc un nombre assez considérable, et $\frac{1}{v^2}$, coefficient de x, est très-petit. D'ailleurs, la solution cherchée est la plus petite des deux racines. Il y a donc lieu d'appliquer à la recherche de sa valeur les formules de l'article **268**; en adoptant la première, il viendra :

$$x = \frac{\theta^2}{\frac{2}{g} + \frac{2\theta}{v}}. \qquad [a]$$

C'est la formule dont on devra se servir dans les applications. En effet, $\frac{1}{v^2}$ vaut, à peu près, $\frac{1}{100000}$; et comme l'unité de longueur est le mètre, on peut, sans aucun inconvénient, négliger les quantités de l'ordre $\frac{1}{v^2}$.

La formule [a] peut, du reste, se simplifier un peu, si l'on remarque que, v étant grand, $\frac{2\theta}{v}$ est petit; en sorte qu'en le négligeant dans une première approximation, on peut écrire :

$$x = \frac{g\theta^2}{2};$$

c'est la formule qui conviendrait, en supposant la vitesse du son infinie. Pour obtenir un terme de correction, posons :

$$x = \frac{g\theta^2}{2} + \alpha.$$

Nous aurons, pour déterminer α, l'équation :

$$\frac{\theta^2}{\frac{2}{g} + \frac{2\theta}{v}} = \frac{g\theta^2}{2} + \alpha;$$

d'où l'on tire, en chassant le dénominateur du premier membre,

$$0 = \frac{2\alpha}{g} + \frac{g\theta^3}{v} + \frac{2\alpha\theta}{v}.$$

Négligeant $\frac{2\alpha\theta}{v}$, *qui est, à la fois, très-petit, à cause du facteur* α *et du facteur* $\frac{1}{v}$, on en déduit :

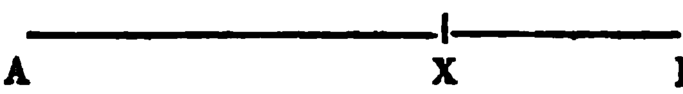
$$\alpha=-\frac{g^2\theta^3}{2v};$$

et l'on a enfin, comme valeur approchée de x :

$$x=\frac{g\theta^2}{2}-\frac{g^2\theta^3}{2v} \qquad [b]$$

C'est, du reste, la formule à laquelle on serait arrivé, en effectuant la division de θ^2 par $\left(\frac{2}{g}+\frac{2\theta}{v}\right)$, et en s'arrêtant après avoir trouvé les deux premiers termes du quotient.

287. Problème II. *Partager une droite* AB *en deux parties telles, que la plus grande* AX *soit moyenne proportionnelle entre la plus petite et la ligne entière.*



Soit a la longueur de AB; désignons AX par x, et, par suite, BX par $(a-x)$; nous aurons, d'après l'énoncé, la proportion :

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}. \qquad [1]$$

On en tire l'équation : $\quad x^2=a(a-x)$,

ou $\quad x^2+ax-a^2=0. \qquad [2]$

De là $\quad x=\frac{-a\pm\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{a(-1\pm\sqrt{5})}{2}. \qquad [3]$

Discussion. Les deux racines sont évidemment réelles. Comme $\sqrt{5}$ est comprise entre 2 et 3, la première racine est positive et plus petite que a; elle est donc la solution demandée. Mais la seconde est négative, et sa valeur absolue est plus grande que a; elle doit donc être rejetée.

Cependant on peut interpréter cette solution négative. En effet, désignons-la par $(-\alpha)$: comme elle vérifie l'équation [2], on doit avoir :

$$(-\alpha)^2=a\{a-(-\alpha)\}, \quad \text{ou} \quad \alpha^2=a(a+\alpha).$$

Ainsi α est une moyenne proportionnelle entre a et $(a+\alpha)$, et répond évidemment à la question suivante :

Trouver, sur la ligne AB *prolongée, un point* X′ *tel, que sa distance* α *au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance* $(a+\alpha)$ *au point* B *et la ligne* $AB=a$.

Les deux solutions, que nous venons de rencontrer, résolvent d'une manière générale le problème suivant :

Trouver, sur une droite indéfinie, sur laquelle sont pris deux points A *et* B,

un point X *tel, que la distance* AX *soit moyenne proportionnelle entre* BX *et* AB.

Et il arrive que, comme dans la plupart des problèmes du premier degré, la solution négative doit être portée sur la droite AB, en sens opposé à la solution positive.

On aurait pu, d'ailleurs, éviter la solution négative, en comptant les distances à partir du point B. Car, en désignant par x la distance BX (1re fig.), et, par suite, par $(a-x)$ la distance AX, on aurait eu la proportion :

$$\frac{a}{a-x}=\frac{a-x}{x};$$

d'où l'on eût tiré l'équation

$$x^2-3ax+a^2=0; \qquad [4]$$

et, par suite

$$x=\frac{a(3\pm\sqrt{5})}{2}. \qquad [5]$$

Ces deux solutions sont positives : la première, qui est plus grande que a, donne le point X'; et la seconde, qui est plus petite que a, donne le point X.

Construction des solutions. Les formules [3], qui peuvent s'écrire:

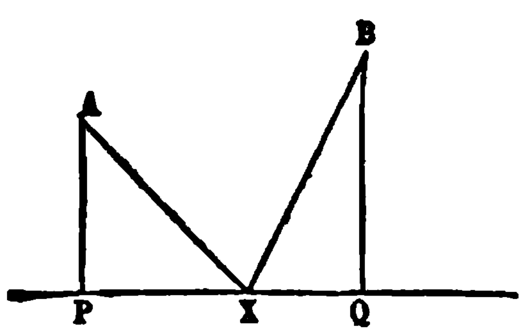
$$x'=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}-\frac{a}{2}, \quad x''=-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}+\frac{a}{2}\right),$$

conduisent immédiatement à la construction qu'on indique dans les *Éléments de géométrie*. Car $\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ est l'hypoténuse du triangle rectangle, qui a pour côtés de l'angle droit AB et $\frac{AB}{2}$; et, pour avoir x', il faut retrancher $\frac{AB}{2}$ de cette hypoténuse, tandis que, pour avoir la valeur absolue de x'', il faut ajouter les deux longueurs. On porte d'ailleurs x' de A vers B, et x'' en sens contraire.

Remarquons encore que l'équation [2] peut s'écrire :

$$x(x+a)=a^2;$$

par conséquent, le problème proposé revient à celui-ci : *Trouver deux lignes* x *et* x + a, *dont la différence est* a, *et dont la moyenne proportionnelle est* a. On apprend, en géométrie, à résoudre cette question, et l'on retrouve la construction précédente.



288. Problème III. *Trouver, sur une ligne* PQ, *un point* X *également éclairé par deux lumières* A *et* B, *dont les intensités sont* i *et* i'. *On donne* AP = a, BQ = b, *et* PQ = d; AP *et* BQ *étant les perpendiculaires abaissées des points* A *et* B *sur la ligne* PQ.

Pour résoudre ce problème, on doit se rappeler que l'intensité de la lumière est en raison inverse du carré de la distance du point éclairé au point lumineux; de sorte qu'une lumière, d'intensité i, éclaire, à la distance x, avec une intensité $\frac{i}{x^2}$.

On doit avoir, par conséquent :

$$\frac{i}{\overline{AX}^2}=\frac{i'}{\overline{BX}^2};$$

ou, en désignant PX par x, et, par conséquent, QX par $(d-x)$

$$\frac{i}{a^2+x^2}=\frac{i'}{b^2+(d-x)^2}; \qquad [1]$$

ou, en chassant les dénominateurs :

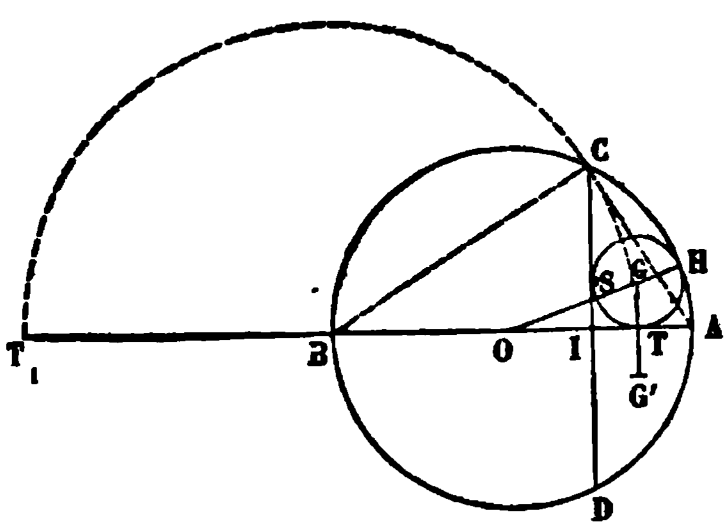
$$[b^2+(d-x)^2]\,i=(a^2+x^2)\,i'. \qquad [2]$$

Discussion. Sans entrer dans les détails de la solution de cette équation du deuxième degré, et des conditions de possibilité du problème, cherchons à interpréter les solutions négatives qu'elle peut avoir. Si l'on désigne par $(-\alpha)$ une solution négative, cette solution doit vérifier l'équation [1]; on doit donc avoir :

$$\frac{i}{a^2+\alpha^2}=\frac{i'}{b^2+(d+\alpha)^2}. \qquad [3]$$

C'est là précisément l'équation que l'on aurait dû écrire si, cherchant le point X à gauche de P, on avait désigné par α sa distance inconnue au point P. Les solutions négatives fournissent donc des solutions du problème proposé, pourvu que l'on porte la longueur qu'elles représentent à gauche du point P, c'est-à-dire dans un sens opposé à celui qui correspond aux solutions positives.

289. Problème IV. *Étant donnés un cercle dont le centre est* O, *un de ses diamètres* AB, *et une corde* CD *perpendiculaire à* AB; *on demande de tracer un cercle tangent, à la fois, au cercle* O, *au diamètre et à la corde*



Soient OA=R, OI=a. Supposons qu'on veuille construire le cercle G inscrit dans le segment AIC. Prenons pour inconnue son rayon, et posons GT=IT=x. La droite OG, qui joint les centres, va passer par le point de contact H des deux cercles; elle coupe d'ailleurs le cercle inconnu en S. Or la tangente OT est moyenne proportionnelle entre la sécante entière OH et sa partie extérieure OS: On a donc :

$$\overline{OT}^2=OH\times OS, \quad \text{ou} \quad (a+x)^2=R(R-2x), \qquad [1]$$

ou, en développant et en ordonnant,

$$x^2+2(R+a)x-R^2+a^2=0. \qquad [2]$$

On en tire : $$x=-(R+a)\pm\sqrt{(R+a)^2+(R^2-a^2)};$$
ou, réduisant :

$$x=-(R+a)\pm\sqrt{2R(R+a)}. \qquad [3]$$

Discussion. Ces deux racines sont évidemment réelles, puisque $2R(R+a)$ est une quantité positive; et, comme a est plus petit que R, on voit, à l'inspection de l'équation [2], que l'une d'elles est positive et l'autre négative.

La solution positive x' se construit avec une grande facilité : car le radical est une moyenne proportionnelle entre $2R$ et $(R+a)$, c'est-à-dire entre BA et BI; il est donc égal à BC. Donc :

$$x'=BC-BI.$$

Donc, si l'on prend $BT=BC$, IT sera égal à x' : ce sera le rayon cherché. Pour avoir le centre, on élèvera en T une perpendiculaire TG sur AB, et on la prendra égale à IT.

Quant à la solution négative x'', elle est égale, en valeur absolue, à $BC+BI$. Pour l'interpréter, remarquons que, si on la désigne par $(-\alpha)$, elle doit vérifier l'équation [1]; on doit donc avoir :

$$(a-\alpha)^2=R(R+2\alpha), \quad \text{ou} \quad (\alpha-a)^2=R(R+2\alpha). \qquad [4]$$

Or c'est là précisément l'équation qu'il eût fallu écrire, si l'on avait voulu tracer un cercle tangent extérieurement à l'arc BC, au diamètre et à la corde prolongés, et que l'on eût appelé α son rayon inconnu; on s'en assure aisément en faisant la figure. Ainsi la racine négative fournit une seconde solution du problème; et pour avoir le point de contact T_1 du nouveau cercle et du diamètre AB, il suffit de porter, sur ce diamètre, à gauche de B, une longueur BT_1 égale à BC.

On voit qu'ici encore les deux rayons $IT=BC-BI$ et $IT_1=BC+BI$ sont portés, à partir du point I, en des sens opposés, comme l'indiquent les signes dont leurs valeurs sont affectées dans les formules [3].

Il est évident que les points T et T_1 sont les points de contact de deux autres cercles égaux aux premiers, dont les centres sont symétriquement placés au-dessous du diamètre AB, et qui répondent aussi à la question.

Si l'on veut maintenant inscrire un cercle dans le segment BIC, on trouvera, par des raisonnements analogues, l'équation

$$(x-a)^2=R(R-2x), \qquad [5]$$

qui différera de l'équation [1], et qui ne pourra pas s'y ramener par le changement de signe de x. Sans entrer dans le détail de cette nouvelle solution, nous dirons seulement que la racine négative correspondra au cercle tangent extérieurement à l'arc AC, et qu'on obtiendra les points de contact des deux cercles avec le diamètre AB, en décrivant, du point A comme centre, une demi-circonférence, de rayon AC.

On voit que le problème a huit solutions fournies par deux équations du second degré.

290. Problème V. *Partager la surface d'un cercle, de rayon* R, *en moyenne et extrême raison, par une circonférence concentrique.*

On peut faire deux hypothèses : 1° la surface comprise entre les deux circonférences est la moyenne; 2° la surface du cercle inconnu est la moyenne.

Dans le premier cas, si l'on désigne par x le rayon du cercle cherché, l'équation du problème est :

$$\frac{\pi R^2}{\pi(R^2-x^2)}=\frac{\pi(R^2-x^2)}{\pi x^2},$$

ou

$$(R^2-x^2)^2=R^2x^2. \qquad [1]$$

On tire de là : $R^2-x^2=Rx$, ou $R^2-x^2=-Rx$.

La première de ces deux équations donne :

$$x=\frac{R(-1\pm\sqrt{5})}{2}; \qquad [2]$$

et la seconde, qui n'en diffère que par le signe de x, donne :

$$x=\frac{R(1\pm\sqrt{5})}{2}. \qquad [3]$$

Discussion. Ces quatre racines sont égales deux à deux et de signes contraires. Mais les racines négatives n'ont pas de signification dans cette question géométrique; elles doivent être rejetées. Quant aux racines positives, *la première*,

$$x=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

est la plus grande partie du rayon R *divisé en moyenne et extrême raison :* elle répond directement à la question de *partage. La seconde,*

$$x=\frac{R(\sqrt{5}+1)}{2},$$

est la ligne dont la moyenne serait R *dans la division en moyenne et extrême raison.* Cette ligne, plus grande que R, donne une solution qui ne convient pas au problème tel qu'il a été posé. Mais, que l'on en généralise l'énoncé de la manière suivante :

Construire un cercle concentrique à un cercle donné, et tel que la couronne soit moyenne proportionnelle entre les surfaces des deux cercles,

Ce nouvel énoncé n'exigera plus que le rayon inconnu soit plus petit que R. Si on le suppose plus grand, l'équation nouvelle,

$$(x^2-R^2)^2=R^2x^2,$$

ne différera pas de l'équation [1]; et, par suite, la seconde solution conviendra, comme la première.

Supposons maintenant que ce soit le cercle inconnu qui doive être moyenne proportionnelle entre le cercle donné et la couronne : l'équation du problème est alors :

$$\frac{\pi R^2}{\pi x^2}=\frac{\pi x^2}{\pi(R^2-x^2)}, \quad \text{ou} \quad x^4+R^2x^2-R^4=0. \qquad [4]$$

On pourrait résoudre cette équation bicarrée par les méthodes connues. Mais il vaut mieux poser :

$$x^2=Ry; \qquad [5]$$

et l'équation devient, après avoir été divisée par R^2 :

$$y^2+Ry-R^2=0; \qquad [6]$$

elle est identique avec la première des équations du premier cas. Ainsi la valeur négative de y doit être rejetée ; et *la valeur positive est la plus grande partie du rayon divisé en moyenne et extrême raison. Quant au rayon* x *du cercle inconnu, il est, d'après l'équation* [5], *une moyenne proportionnelle entre le rayon du cercle donné et la moyenne* y.

On construira aisément les trois solutions de ce problème.

§ II. Problèmes à plusieurs inconnues.

291. PROBLÈME VI. *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et la hauteur* h *abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.*

Soient x et y les deux côtés inconnus ; le théorème de Pythagore donne l'équation :

$$x^2+y^2=a^2. \qquad [1]$$

La surface du triangle a pour expressions $\frac{xy}{2}$ et $\frac{ah}{2}$; donc on a :

$$xy=ah. \qquad [2]$$

En doublant les deux membres de l'équation [2], et en l'ajoutant ensuite à l'équation [1], on a :

$$x^2+y^2+2xy=a^2+2ah, \quad \text{ou} \quad (x+y)^2=a^2+2ah;$$

d'où l'on tire, en extrayant les racines carrées des deux membres, ce qui est permis, puisqu'ils sont positifs :

$$x+y=\sqrt{a^2+2ah}. \qquad [3]$$

Si, au lieu d'additionner les deux équations membre à membre, on soustrait la seconde de la première, on a :

$$(x-y)^2=a^2-2ah;$$

et, comme on peut supposer que x est le plus grand des deux côtés cherchés, on a, en extrayant les racines :

$$x-y=\sqrt{a^2-2ah}. \qquad [4]$$

On connaît donc la somme [3] et la différence [4] des inconnues, et l'on en conclut :

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2ah}+\sqrt{a^2-2ah}\right),\\ y&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2ah}-\sqrt{a^2-2ah}\right). \end{aligned}\right. \qquad [5]$$

DISCUSSION. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les valeurs de x et de y soient réelles, c'est-à-dire que l'on ait :

$$a > 2h, \quad \text{ou} \quad h < \frac{a}{2}. \qquad [6]$$

292. REMARQUE. Ces inégalités [6] n'excluent pas les égalités limites,

$$a = 2h, \quad h = \frac{a}{2};$$

car les valeurs de x et de y restent réelles et positives, dans cette hypothèse. Elles fournissent donc les solutions des deux questions suivantes :

1° *Parmi tous les triangles rectangles, de hauteur donnée* h, *quel est celui dont l'hypoténuse est la plus petite possible?*

C'est le triangle dont l'hypoténuse est égale à $2h$. Il est isocèle ; car, dans ce cas,

$$x = y = h\sqrt{2}.$$

2° *Parmi tous les triangles rectangles, de même hypoténuse* a, *quel est celui dont la hauteur est la plus grande possible?*

C'est le triangle dont la hauteur est égale à $\frac{a}{2}$. Il est isocèle ; car, dans ce cas,

$$x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

293. PROBLÈME VII. *Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant sa surface* m² *et son périmètre* $2p$.

Soient x, y, z les côtés du triangle ; z étant l'hypoténuse, on a, d'après l'énoncé et en se servant de propositions très-connues :

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad [1]$$

$$x + y + z = 2p, \qquad [2]$$

$$2m^2 = xy. \qquad [3]$$

En multipliant par 2 les deux membres de la troisième équation, et l'ajoutant ensuite à la première, on a :

$$z^2 + 4m^2 = x^2 + y^2 + 2xy, \quad \text{ou} \quad z^2 + 4m^2 = (x+y)^2. \qquad [4]$$

La seconde donne d'ailleurs l'équation :

$$x + y = 2p - z; \quad \text{d'où} \quad (x+y)^2 = (2p-z)^2. \qquad [5]$$

En égalant les deux valeurs de $(x+y)^2$ fournies par les équations [4] et [5], on a :

$$(2p - z)^2 = z^2 + 4m^2;$$

ou, en effectuant l'élévation au carré indiquée dans le premier membre, puis en supprimant le terme z^2 qui est commun, et en divisant les deux membres par 4,

$$p^2 - pz = m^2;$$

d'où l'on déduit :

$$z = \frac{p^2 - m^2}{p}. \qquad [6]$$

Puis x étant connu, les équations [2] et [3] font connaître $(z+y)$ et zy; car elles donnent :

$$z+y=2p-x=\frac{p^2+m^2}{p}, \quad zy=2m^2;$$

z et y sont, par conséquent, racines de l'équation

$$u^2-\frac{p^2+m^2}{p}u+2m^2=0.$$

On a donc :
$$\begin{matrix} z \\ y \end{matrix}=\frac{p^2+m^2}{2p}\pm\sqrt{\frac{(p^2+m^2)^2}{4p^2}-2m^2}. \qquad [7]$$

DISCUSSION. Comme la valeur [6] de x doit être positive, l'une des conditions de possibilité du problème est :

$$p>m.$$

Mais cette condition ne suffit pas ; il faut, en outre, que les valeurs de z et de y soient réelles et positives.

Or on voit, à l'inspection de l'équation qui les fournit, qu'elles sont positives, si elles sont réelles. Il suffit donc d'exprimer qu'elles sont réelles, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{(p^2+m^2)^2}{4p^2}-2m^2>0 \quad \text{ou} \quad (p^2+m^2)^2-8p^2m^2>0.$$

Or le premier membre peut être considéré comme la différence de deux carrés. Cette inégalité équivaut donc à la suivante :

$$(p^2+m^2+2pm\sqrt{2})(p^2+m^2-2pm\sqrt{2})>0.$$

Mais le premier facteur est positif : il faut donc que l'on ait :

$$p^2+m^2-2pm\sqrt{2}>0. \qquad [8]$$

Telle est la condition à laquelle p et m doivent satisfaire. On peut en déduire les limites entre lesquelles peut varier p pour une valeur donnée de m, ou m pour une valeur donnée de p. Nous obtiendrons ces deux résultats à la fois, en posant $\frac{p}{m}=r$. Si, en effet, l'on divise par m^2 les deux membres de l'inégalité [8], elle devient :

$$r^2-2r\sqrt{2}+1>0.$$

Or son premier membre est positif [illegible] ; on en conclut que, pour qu'elle soit satisfaite, r doit être plus grand que la plus grande racine de l'équation $r^2-2r\sqrt{2}+1=0$, ou plus petit que la plus petite, c'est-à-dire plus grand que $(\sqrt{2}+1)$ ou plus petit que $(\sqrt{2}-1)$. Mais p étant, comme on l'a vu, plus grand que m, le rapport $\frac{p}{m}$ ne peut être moindre que $(\sqrt{2}-1)$; il faut donc qu'il soit plus grand que $(\sqrt{2}+1)$. [illegible] cette condition entraîne les premières, elle est donc la seule [illegible].

294. Remarque. Le triangle rectangle, dont le périmètre est $2p$ et la surface m^2, n'est possible que si l'on a :

$$\frac{p}{m} > \sqrt{2} + 1;$$

on en conclut : $$m < \frac{p}{\sqrt{2}+1}, \quad \text{ou} \quad m < p(\sqrt{2}-1),$$

et $$p > m(\sqrt{2}+1).$$

Ces inégalités n'excluent pas les égalités limites,

$$m = p(\sqrt{2}-1), \quad p = m(\sqrt{2}+1);$$

car, dans cette hypothèse, les valeurs des inconnues restent réelles et positives. Elles fournissent donc la solution des questions suivantes :

1° *Parmi tous les triangles rectangles, de même périmètre* 2p, *quel est celui dont la surface est la plus grande possible?*

C'est le triangle dont la surface est $m^2 = p^2(\sqrt{2}-1)^2$. Il est isocèle; car les côtés de l'angle droit sont donnés par la formule : $x = y = p(2-\sqrt{2})$. L'hypoténuse $z = 2p(\sqrt{2}-1)$.

2° *Parmi les triangles rectangles, de même surface* m², *quel est celui dont le périmètre est minimum?*

C'est le triangle dont le périmètre est : $2p = 2m(\sqrt{2}+1)$. Il est isocèle; car les côtés de l'angle droit sont donnés par la formule : $x = y = m\sqrt{2}$. L'hypoténuse $z = 2m$.

295. Problème VIII. *Inscrire dans une sphère, de rayon* R, *un cylindre dont la surface totale, y compris les deux bases, soit équivalente à un cercle, de rayon donné* m.

Si l'on nomme x le rayon de base et y la hauteur du cylindre, la géométrie fournit immédiatement les équations suivantes :

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = R^2, \quad 2\pi x^2 + 2\pi xy = \pi m^2; \qquad [1]$$

et cette dernière devient, en supprimant le facteur π,

$$2x^2 + 2xy = m^2. \qquad [2]$$

On déduit de [2] : $$y = \frac{m^2 - 2x^2}{2x};$$

et, en substituant cette valeur dans la première équation [1], on a :

$$x^2 + \frac{(m^2-2x^2)^2}{16x^2} = R^2;$$

chassant les dénominateurs, et réduisant les termes semblables, on obtient l'équation bicarrée :

$$20x^4 - (4m^2 + 16R^2)x^2 + m^4 = 0; \qquad [3]$$

d'où l'on déduit :

$$x^2 = \frac{(m^2+4R^2) \pm \sqrt{(m^2+4R^2)^2 - 5m^4}}{10}; \qquad [4]$$

et par suite, $$x = \sqrt{\frac{m^2 + 4R^2 \pm \sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4}}{10}}. \qquad [5]$$

DISCUSSION. A la seule inspection de l'équation bicarrée [3], on s'aperçoit que, si les valeurs de x^2 sont réelles, elles sont toutes deux positives, et elles fournissent par conséquent chacune une valeur réelle et positive de x. Mais il ne suffit pas que x soit réel et positif, il faut aussi que y le soit; par suite, on doit avoir :

$$m^2 - 2x^2 > 0, \quad \text{ou} \quad x < \frac{m}{\sqrt{2}}. \qquad [6]$$

Le problème aura donc autant de solutions qu'il y aura de valeurs de x fournies par la formule [5], et satisfaisant à cette condition [6].

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que les valeurs de x soient réelles; il suffit, pour cela, comme nous l'avons dit, que celles de x^2 le soient; ce qui exige seulement l'inégalité :

$$(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4 > 0,$$

ou $$(m^2 + 4R^2 - m^2\sqrt{5})(m^2 + 4R^2 + m^2\sqrt{5}) > 0.$$

Or le second facteur est positif; il faut donc que l'on ait :

$$m^2 + 4R^2 - m^2\sqrt{5} > 0\cdot$$

d'où $$m^2 < \frac{4R^2}{\sqrt{5}-1}, \quad \text{ou} \quad m^2 < R^2(\sqrt{5}+1). \qquad [7]$$

Cette condition étant remplie, la plus petite valeur de x convient toujours à la question; car elle satisfait, en outre, à l'inégalité [6], c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{m^2 + 4R^2 - \sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4}}{10} < \frac{m^2}{2};$$

ou, en chassant les dénominateurs, et transposant :

$$4(R^2 - m^2) < \sqrt{(4R^2 + m^2)^2 - 5m^4}.$$

Et, en effet, si m est plus grand que R, cette inégalité est évidente. Si, au contraire, m est plus petit que R, les deux membres étant positifs, il est permis de les élever au carré (204), et l'inégalité devient :

$$16(R^4 - 2R^2m^2 + m^4) < 16R^4 + 8R^2m^2 + m^4 - 5m^4,$$

ou $$20m^4 - 40R^2m^2 < 0; \quad \text{d'où} \quad m^2 < 2R^2;$$

ce qui est vrai. *Le problème a donc toujours une solution, dès que la condition* [7] *est vérifiée.*

Pour que la plus grande valeur de x convienne aussi, il faut que l'on ait de même :

$$\frac{m^2 + 4R^2 + \sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4}}{10} < \frac{m^2}{2};$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduisant :

$$\sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4} < 4(m^2 - R^2).$$

Or si m est moindre que R, cette inégalité est impossible, et, par conséquent, la seconde solution n'existe pas. Si m est plus grand que R, les deux membres de l'inégalité étant positifs, on peut les élever au carré ; il vient ainsi :

$$(m^2+4R^2)^2-5m^4<16(m^2-R^2)^2; \quad \text{d'où} \quad m^2>2R^2.$$

Il faut donc, pour qu'il y ait deux solutions, que m^2 *soit compris entre* $2R^2$ *et* $R^2(\sqrt{5}+1)$.

296. Remarque. On peut se rendre compte, de la manière suivante, des résultats que nous venons d'obtenir.

L'équation [2], lorsqu'on y remplace y par sa valeur positive tirée de [1], donne, pour expression de la surface totale du cylindre inscrit dans la sphère :

$$\pi m^2=2\pi x\left(x+2\sqrt{R^2-x^2}\right).$$

Si l'on examine les valeurs successives par lesquelles passe cette surface lorsque le rayon x de la base augmente depuis 0 jusqu'au rayon R de la sphère, on voit qu'elle est nulle pour $x=0$; puis, qu'elle augmente avec x jusqu'à une limite que le calcul fait connaître, et qui, d'après ce qui précède, est $\pi R^2(\sqrt{5}+1)$; la valeur de x, qui fournit ce maximum, est, d'ailleurs :

$$x=\frac{R}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}.$$

Puis, lorsque x augmente jusqu'à R, la surface diminue jusqu'à la valeur $2\pi R^2$, qui correspond au cas où, la hauteur étant nulle, le cylindre se réduit à ses deux bases qui sont deux grands cercles. Or, en augmentant depuis zéro jusqu'au maximum, pour diminuer depuis le maximum jusqu'à $2\pi R^2$, il est évident que la surface du cylindre passe deux fois par toutes les valeurs comprises entre le maximum et $2\pi R^2$, et une seule fois par celles qui sont moindres que $2\pi R^2$.

297. Quelques problèmes sont considérablement simplifiés par un choix habile de l'inconnue. En voici deux exemples :

Problème IX. *Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme des moyens* $2s$, *la somme des extrêmes* $2s'$, *et la somme des carrés des quatre termes* $4q^2$.

Prenons pour inconnue le produit x des moyens; leur somme étant $2s$, ils sont (256) racines de l'équation :

$$z^2-2sz+x=0,$$

et égaux, par conséquent, à

$$s+\sqrt{s^2-x}, \quad s-\sqrt{s^2-x}.$$

Comme le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, on verra, de la même manière, que les extrêmes sont :

$$s'+\sqrt{s'^2-x}, \quad s'-\sqrt{s'^2-x}.$$

En formant la somme des carrés de ces quatre expressions, on trouve :

$$4s^2+4s'^2-4x;$$

l'équation du problème est donc :

$$4s^2+4s'^2-4x=4q^2.$$

On déduira de là la valeur de x, et, par suite, les quatre termes de la proportion, qui sont, tout calcul fait :

$$s'+\sqrt{q^2-s^2},\quad s+\sqrt{q^2-s'^2},\quad s-\sqrt{q^2-s'^2},\quad s'-\sqrt{q^2-s^2}.$$

REMARQUE. Il est naturel de prendre pour inconnue le produit des moyens, parce que ce produit, pour chaque proportion, n'admet qu'une seule valeur. Si l'on cherchait, par exemple, à déterminer un des moyens, on devrait les trouver tous les deux par le même calcul; car rien ne les distingue dans l'énoncé. L'équation serait donc au moins du second degré.

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait :

$$s^2<q^2,\quad s'^2<q^2.$$

298. PROBLÈME X. *Trouver une proportion, connaissant la somme* 4s *de ses termes, la somme* $4q^2$ *de leurs carrés, et la somme* $4c^3$ *de leurs cubes.*

Prenons pour inconnues la différence $4x$ entre la somme des extrêmes et la comme des moyens, et le produit y des extrêmes; désignons par a, b, c, d, les quatre termes de la proportion; nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{l} a+d+c+b=4s, \\ a+d-(c+b)=4x. \end{array}\right. \qquad [1]$$

On tire de là :

$$\left\{\begin{array}{l} a+d=2s+2x, \\ b+c=2s-2x. \end{array}\right. \qquad [2]$$

Comme l'on a :

$$ad=y,\quad bc=y, \qquad [3]$$

on en déduit (256) pour a, b, c, d, les valeurs :

$$\left\{\begin{array}{l} a=s+x+\sqrt{(s+x)^2-y}, \\ d=s+x-\sqrt{(s+x)^2-y}, \\ b=s-x+\sqrt{(s-x)^2-y}, \\ c=s-x-\sqrt{(s-x)^2-y}. \end{array}\right. \qquad [4]$$

La somme des quatre carrés est, comme on le calcule facilement :

$$8(s^2+x^2)-4y;$$

et la somme des quatre cubes est :

$$16s(s^2+3x^2)-12sy;$$

ce qui fournit les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} 8\,(s^2+x^2)-4y\;=4q^2, \\ 16s\,(s^2+3x^2)-12sy=4c^3; \end{array}\right.$$

ou, en divisant par 4 les deux membres de chacune d'elles, et en transposant :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2-\;y\;=q^2-2s^2, \\ 12sx^2-3sy=c^3-4s^3. \end{array}\right. \qquad [5]$$

En résolvant ces deux équations, on trouve :

$$x^2 = \frac{c^3 - 3q^2s + 2s^3}{6s}, \quad y = \frac{c^3 - 6q^2s + 8s^3}{3s};$$

et, si l'on substitue les valeurs de x et de y dans les formules [4], on obtient les quatre termes de la proportion.

EXERCICES.

I. Un voyageur part d'un point B, pour aller vers un point C, en même temps qu'un autre voyageur part de C pour aller vers B. Chacun d'eux marche avec une vitesse constante. Ces deux vitesses ont un rapport tel, que le premier arrive en C quatre heures après qu'ils se sont rencontrés, et que le second arrive en B neuf heures après cette rencontre. On demande quel est le rapport des vitesses.

Si l'on désigne par x et par y les deux vitesses, par d la distance BC, et par z la distance du point B au point de rencontre, on trouve les équations :

$$\frac{z}{x} = \frac{d-z}{y}, \quad \frac{d-z}{x} = 4, \quad \frac{z}{y} = 9;$$

et l'on en tire :

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}.$$

II. Trouver un nombre de deux chiffres, tel que, divisé par le produit de ces deux chiffres, il donne pour quotient $5\frac{1}{3}$; et que, si l'on en retranche 9, on obtienne le nombre renversé.

Le nombre est 32.

III. Trouver un nombre de trois chiffres, tel que le second chiffre soit moyen proportionnel entre les deux autres, que le nombre soit à la somme de ses chiffres comme 124 est à 7, et qu'en lui ajoutant 594, on obtienne le nombre renversé.

Le nombre est 248.

IV. Trouver cinq nombres, en progression par différence, connaissant leur somme $5a$ et leur produit p^5.

On trouve que le terme du milieu est égal à a, et que la raison y est donnée par l'équation :

$$4ay^4 - 5a^3y^2 + a^5 - p^5 = 0.$$

V. Trouver quatre nombres, en progression par différence, connaissant leur somme $4a$ et celle de leurs inverses $\frac{1}{b}$.

En représentant les quatre termes par $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$, on trouve que $x=a$, et que y est donné par l'équation :

$$9y^4 + 10a(2b-a)y^2 + a^4 - 4a^3b = 0.$$

VI. Mener d'un point A, à un cercle C, une sécante de longueur donnée l, et chercher les conditions de possibilité. On donne la distance a du point au centre, et le rayon R du cercle.

En désignant par y la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de la sécante sur le diamètre qui passe par le point A, et par x la distance du pied de cette perpendiculaire au centre, on trouve :

$$x=\frac{R^2+a^2-l^2}{2a},\quad y^2=\frac{(a+R+l)(a+R-l)(l+R-a)(l+a-R)}{4a^2}.$$

Les conditions de possibilité sont : si le point A est extérieur au cercle,

$$l<a+R,\quad l>a-R;$$

et si le point est intérieur,

$$l<R+a,\quad l>R-a.$$

VII. On sait que, étant donnés un point A et un cercle, dont le centre est en O et dont le rayon est R, on nomme *polaire* du point A une perpendiculaire à OA, menée par un point X de cette droite, tel que $OX\times OA=R^2$. Cela posé, deux cercles, de rayon R et R′, étant donnés, on demande si un point M de leur plan peut avoir même polaire dans l'un et dans l'autre.

Il faut, pour cela, que les deux cercles ne se coupent pas; et, si cette condition est remplie, en désignant par d la distance des centres, on trouve, pour la distance du *pôle* au centre du cercle R,

$$x=\frac{d^2+R^2-R'^2\pm\sqrt{(R+R'+d)(R+R'-d)(R-R'+d)(R-R'-d)}}{2d}.$$

VIII. Étant donnée une sphère, de rayon R, on propose de la couper par un plan tel, que le plus petit des deux segments sphériques ainsi obtenus soit au cône de même base, qui aurait pour sommet le centre de la sphère, dans un rapport donné m.

On trouve que la hauteur du segment est donnée par les formules :

$$x=0,\quad x=R\,\frac{3(m+1)-\sqrt{(m+1)(m+9)}}{2(m+1)}.$$

IX. Même problème, en supposant que le cône ait pour sommet l'extrémité du diamètre perpendiculaire à la base commune, située dans le plus grand segment.

On trouve : $$x=0,\quad x=R\,\frac{4m+3-\sqrt{8m+9}}{2(m+1)}.$$

X. Étant donnée une sphère, de rayon R, la couper par un plan tel, que la plus petite des deux zones ainsi déterminées soit à la surface latérale du cône de même base, qui aurait pour sommet le centre de la sphère, dans un rapport donné m.

On trouve, pour la hauteur de la zone

$$x=0,\quad x=\frac{2m^2R}{m^4+4}.$$

XI. Même problème, en supposant que le cône ait pour sommet l'extrémité du diametre perpendiculaire à la base commune, située dans le plus grand segment.

On trouve : $x=0,\quad x=R\dfrac{2m^2+1-\sqrt{4m^2+1}}{m^2}.$

XII. Partager un trapèze, dont les bases sont a et b, en trois parties proportionnelles à m, n, p, par des parallèles aux bases.

En désignant par x et par y les longueurs des deux parallèles, on trouve :

$$x^2=\frac{(n+p)\,a^2+mb^2}{m+n+p},\quad y^2=\frac{pa^2+(m+n)\,b^2}{m+n+p}.$$

XIII. Inscrire dans un cercle de rayon R, un triangle isocèle, connaissant la somme a de la base et de la hauteur.

En désignant par x la moitié de la base, et par y la hauteur, on trouve :

$$x=\frac{2\,(a-R)\pm\sqrt{4R^2+2aR-a^2}}{5},\qquad y=\frac{a+4R\mp2\sqrt{4R^2+2aR-a^2}}{5}.$$

Discuter et construire ces solutions; dire quelles sont les conditions de possibilité, et dans quel cas il y a une ou deux solutions.

XIV. Un quadrilatère ABCD étant donné, on propose de construire un second quadrilatère A'B'C'D', dont les côtés soient respectivement parallèles aux côtés du premier, également distants de ceux-ci, de telle sorte que l'aire comprise entre les périmètres des deux polygones soit équivalente à un carré m^2.

On suppose que le quadrilatère A'B'C'D' enveloppe ABCD; si l'on désigne par $2p$ le périmètre du quadrilatère donné, par s la somme des cotangentes des demi-angles de ce quadrilatère, et par x la distance des côtés parallèles, on trouve l'équation :

$$sx^2+2px-m^2=0.$$

Discuter cette solution. Examiner si la racine négative peut s'interpréter, en supposant que le quadrilatère A'B'C'D' est intérieur au quadrilatère ABCD.

XV. Étant donnés un cercle, de rayon R, et un autre cercle, de rayon $\dfrac{R}{m}$, tangent intérieurement au premier, on propose de tracer un troisième cercle, tangent, à la fois, aux deux autres et au diamètre qui joint leurs centres.

En désignant par x le rayon du cercle cherché, et par y la distance du centre du premier cercle au point de contact du diamètre et du cercle inconnu, on trouve :

1° $\quad x=\dfrac{4\,(m-1)}{(m+1)^2}R\quad y=\dfrac{3-m}{m+1}R;$

2° $\quad x=0,\qquad y=R.$

Discuter et construire les solutions.

XVI. Calculer les trois côtés x, y, z d'un triangle, sachant que les volumes décrits par le triangle, en tournant autour de chacun d'eux, sont équivalents aux volumes de trois sphères, de rayons α, β, γ.

On trouve les relations : $\alpha^3 x = \beta^3 y = \gamma^3 z$;

et, par suite,

$$x^3 = \frac{16\alpha^3}{\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3}+\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\alpha^3}{\gamma^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3}+\frac{\alpha^3}{\beta^3}-\frac{\alpha^3}{\gamma^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3}+\frac{\alpha^3}{\gamma^3}-\frac{\alpha^3}{\beta^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\alpha^3}{\gamma^3}-\frac{\alpha^3}{\alpha^3}\right)},$$

et deux autres formules analogues pour y^3 et z^3.

XVII. Inscrire dans une sphère, de rayon R, un cylindre dont le volume soit équivalent à la somme des segments sphériques qui ont même base que lui.

En désignant par x le rayon de base du cylindre, et par y la hauteur de l'un des segments, on trouve :

1° $$x^2 = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{R(3-\sqrt{3})}{2};$$

2° $$x = 0, \quad y = 0.$$

Construire la solution.

XVIII. Étant donné un cercle, de rayon R, on mène, par un point C de son plan, une tangente à ce cercle, et l'on fait tourner à la fois, autour du diamètre qui passe par le point C, la tangente et la demi-circonférence. On demande de déterminer le point C, de telle sorte que la surface conique, et la zone de même base qu'elle enveloppe, soient dans un rapport donné p.

Si l'on désigne par x la distance du point C au centre, et par y la distance du centre à la base commune, on trouve :

1° $$x = (2p-1)R, \quad y = \frac{R}{2p-1};$$

2° $$x = R, \quad y = R.$$

Discuter ces solutions.

CHAPITRE V.

QUELQUES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

299. Définitions. Une quantité x est *variable indépendante*, lorsqu'on peut lui donner arbitrairement des valeurs quelconques. Une expression algébrique y est dite *fonction* de la variable x, lorsqu'elle en dépend de telle sorte, que, pour chaque valeur de x, elle prend une valeur unique et déterminée.

300. Variations, maximum et minimum d'une fonction. Lors-

qu'on fait croître la valeur attribuée à x, par degrés insensibles, la valeur de la fonction *varie :* mais elle peut être tantôt croissante et tantôt décroissante. Lorsque la fonction cesse de croître pour commencer à décroître, on dit qu'elle passe par un *maximum :* lorsqu'elle cesse de décroître pour commencer à croître, on dit qu'elle passe par un *minimum.*

Nous n'avons pas à exposer ici les méthodes générales qu'on emploie pour déterminer les maximums et les minimums des fonctions ; ces méthodes trouveront leur place dans la seconde partie. Notre but est seulement de montrer comment la discussion de certains problèmes du second degré fait connaître des limites que les fonctions ne peuvent pas franchir. Lorsqu'on cherche, en effet, à rendre une fonction égale à une quantité donnée, le problème n'est ordinairement possible que sous certaines conditions. Il faut, dans la plupart des cas, que la quantité donnée soit comprise entre certaines limites que la discussion détermine, et qui indiquent la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre la fonction. Nous avons déjà rencontré quelques-uns de ces problèmes dans le chapitre précédent (**291**, **293**, **295**). Nous en donnerons ici quelques autres exemples.

§ 1. Maximum ou minimum d'une fonction d'une seule variable indépendante.

301. PROBLÈME I. *Partager un nombre donné* 2a *en deux parties dont le produit soit maximum.*

Chacune des parties étant plus petite que $2a$, le produit ne peut atteindre le carré de $2a$; il y a donc un maximum.

Désignons par x l'une des parties ; l'autre sera $(2a-x)$, et le produit sera $x(2a-x)$. Cherchons à rendre ce produit égal à une quantité donnée m, en posant ;

$$x(2a-x)=m,$$

ou

$$x^2-2ax+m=0. \qquad [1]$$

Il faudra, pour cela, que l'on prenne :

$$x=a\pm\sqrt{a^2-m}. \qquad [2]$$

Or, pour que le problème soit possible, il faudra que les va-

leurs de x soient réelles, c'est-à-dire que m ne soit pas supérieur à a^2. Si donc on peut prendre a^2 pour valeur de m, ce sera le maximum du produit. Or, si l'on suppose $m=a^2$, la formule [2] donne, $x=a$; et par suite, $2a-x=a$. Ces solutions sont acceptables; donc, *pour partager un nombre en deux parties dont le produit soit maximum, il faut le partager en deux parties égales.*

Il n'y a pas de minimum; car on peut donner à m une valeur quelconque inférieure à a^2; il y aura toujours une solution.

On peut démontrer directement ce théorème. Représentons l'une des parties par $(a-z)$, l'autre est $(a+z)$; et leur produit $(a-z)(a+z)$, ou (a^2-z^2), toujours inférieur à a^2, est d'autant plus grand que z^2 est plus petit. Le maximum correspond donc au minimum de z^2, c'est-à-dire au cas où $z=0$, c'est-à-dire où chaque partie est égale à a.

On voit d'ailleurs aisément que le produit est nul, quand le premier facteur est nul; qu'il augmente avec ce facteur jusqu'au maximum, et qu'il diminue ensuite et redevient nul, quand ce facteur devient égal à $2a$.

302. Ce problème fournit la solution des questions suivantes :

1° *Parmi tous les rectangles de même périmètre* 2p, *quel est celui dont la surface est maximum?*

La somme de la base et de la hauteur est constante et égale à p; donc l'aire, qui se mesure par leur produit, sera maximum lorsque les deux longueurs seront égales. Le rectangle maximum est donc le carré dont le côté est $\frac{1}{2}p$.

2° *Parmi les triangles de même périmètre* 2p, *et de même base* a, *quel est celui dont la surface est maximum?*

L'aire du triangle, dont les trois côtés sont a, b, c, est :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

elle atteint son maximum en même temps que S^2. Or les facteurs p et $(p-a)$ étant constants, on peut les supprimer, et se borner à déterminer le maximum du produit $(p-b)(p-c)$; car ce dernier produit augmente et diminue avec le premier. Or la somme des deux facteurs $(p-b)$ et $(p-c)$ est constante et égale à a; donc le produit sera maximum si les deux facteurs sont égaux, ou si $b=c$, c'est-à-dire si le triangle est isocèle.

303. PROBLÈME II. *Décomposer un nombre* p^2 *en deux facteurs positifs dont la somme soit minimum.*

Je dis que la somme sera minimum, quand les deux nombres seront égaux à p. Car on vient de démontrer (301) que, si la

somme de deux nombres est égale à $2p$, leur produit ne peut surpasser p^2, c'est-à-dire le carré de la demi-somme. Donc, si cette somme est moindre que $2p$, le produit ne peut atteindre p^2. Par conséquent, pour que le produit soit égal à p^2, il faut que la somme soit au moins égale à $2p$. Donc $2p$ est le minimum de la somme de deux nombres dont le produit est p^2. De là ce théorème : *Pour décomposer un nombre en deux facteurs dont la somme soit minimum, il faut le décomposer en deux facteurs égaux.*

On peut appliquer à la résolution de ce problème la méthode du n° **301**. Désignons, en effet, l'un des facteurs par x; l'autre sera $\frac{p^2}{x}$, et leur somme sera $\left(x+\frac{p^2}{x}\right)$. Cherchons à rendre cette somme égale à une quantité donnée m, en posant :

$$x+\frac{p^2}{x}=m, \quad \text{ou} \quad x^2-mx+p^2=0. \qquad [1]$$

Il faudra, pour cela, que l'on prenne :

$$x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4p^2}}{2}. \qquad [2]$$

Or, pour que le problème soit possible, il faudra que les valeurs de x soient réelles, c'est-à-dire que m^2 soit au moins égal à $4p^2$ Si donc on peut prendre $m^2=4p^2$, ou $m=2p$ (car il s'agit de nombres positifs), $2p$ sera le minimum de la somme. Or, si l'on pose $m=2p$, la formule [2] donne $x=\frac{m}{2}$, ou $x=p$. Cette solution acceptable conduit au théorème énoncé plus haut.

Il n'y a pas de maximum : car quelque grande que soit la valeur attribuée à m, dès qu'elle surpasse $2p$, le problème est toujours possible.

Ainsi la somme des deux facteurs, d'abord très-grande quand x est très-petit, diminue quand x augmente, jusqu'au minimum $2p$; puis elle augmente indéfiniment, quand x croît indéfiniment.

304. Ce problème fournit la solution de la question suivante : *Parmi tous les rectangles de même surface s^2, quel est celui dont le périmètre est minimum?* On trouvera aisément que c'est le carré dont le côté est s.

305. PROBLÈME III. *Inscrire dans un triangle, dont la base est* b *et la hauteur* h, *un rectangle dont la surface soit maximum.*

Pour inscrire un rectangle dans un triangle, on mène une parallèle quelconque à la base, et par les points où elle coupe les deux autres côtés, on abaisse des perpendiculaires sur la base. Or on comprend que, si la parallèle est menée dans le voisinage du sommet, la surface du rectangle est très-petite; que cette aire augmente jusqu'à une certaine limite, à mesure que la parallèle s'éloigne du sommet; mais qu'elle diminue ensuite jusqu'à zéro, lorsque la parallèle se rapproche indéfiniment de la base. La surface a donc un maximum.

Désignons par x la hauteur et par y la base du rectangle (parallèles respectivement à la hauteur et à la base du triangle); et cherchons à rendre la surface égale à une quantité donnée m, en posant :

$$xy = m. \qquad [1]$$

La géométrie fournit aisément, entre les deux variables x et y, la relation :

$$\frac{y}{b} = \frac{h-x}{h}, \qquad [2]$$

qui permet d'éliminer y de l'équation [1]. On a ainsi :

$$\frac{bx\,(h-x)}{h} = m. \qquad [3]$$

Au lieu de résoudre cette équation, et de discuter les conditions que doit remplir m, pour que x soit réel, on peut remarquer que le maximum de l'expression [3] a lieu en même temps que celui du produit $x\,(h-x)$, qui n'en diffère que par le facteur constant $\frac{b}{h}$. Or les deux facteurs x et $(h-x)$ ont une somme constante h : donc, s'il est possible de les rendre égaux, on obtiendra ainsi le maximum cherché. Or, pour rendre ces facteurs égaux, il faut poser $x = \frac{h}{2}$, et par suite, $y = \frac{b}{2}$. Ces valeurs sont acceptables. Donc, *pour inscrire dans le triangle un rectangle maximum, il faut mener la parallèle à la base par le milieu de la hauteur.* D'ailleurs la surface de ce rectangle est : $xy = \frac{bh}{4}$. Elle est la moitié de celle du triangle.

306. Problème IV. *Circonscrire à une sphère donnée, de rayon* R, *un cône dont le volume soit minimum.*

Pour circonscrire un cône quelconque à une sphère, on considère un grand cercle; on trace un de ses diamètres, puis la tangente à l'une des extrémités de ce diamètre, et une tangente quelconque que l'on prolonge jusqu'à la première d'une part, et jusqu'au diamètre, de l'autre. Puis on fait tourner autour du diamètre la demi-circonférence et le triangle formé par ces trois droites; ce triangle engendre le cône.

Or on voit aisément que, lorsque la seconde tangente est à peu près parallèle à l'axe, le volume du cône, dont la hauteur est très-grande, est lui-même extrêmement grand; qu'à mesure que la tangente s'incline, le volume diminue jusqu'à une certaine limite; et qu'il croît ensuite indéfiniment, lorsque la tangente mobile tend à devenir parallèle à la tangente fixe, parce qu'alors la base croît indéfiniment. Le volume a donc un minimum.

Pour le déterminer, désignons par x la hauteur du cône, et par y le rayon de sa base; et cherchons à rendre son volume égal à une quantité donnée m, en posant :

$$\frac{1}{3}\pi y^2 x = m. \qquad [1]$$

La géométrie fournit aisément, entre les variables x et y, la relation :

$$\frac{y}{R} = \frac{x}{\sqrt{x(x-2R)}}, \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{R^2 x}{x-2R}, \qquad [2]$$

qui permet d'éliminer y de l'équation [1]. On a ainsi :

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{x^2}{x-2R} = m. \qquad [3]$$

On pourrait résoudre cette équation, et discuter les conditions de possibilité du problème : on en déduirait le minimum de m. Mais il est plus simple de remarquer que, le facteur $\frac{1}{3}\pi R^2$ étant constant, on peut le supprimer, et que le minimum de l'expression [3] a lieu en même temps que celui de l'expression $\frac{x^2}{x-2R}$. Or le minimum de cette dernière correspond au maximum de l'expression renversée $\frac{x-2R}{x^2}$.

D'ailleurs, on a identiquement :

$$\frac{x-2R}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right) = \frac{1}{2R}\cdot\frac{2R}{x}\cdot\left(1-\frac{2R}{x}\right);$$

et l'on voit, qu'abstraction faite du facteur constant $\frac{1}{2R}$, le produit $\frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$ se compose de deux facteurs dont la somme est constante et égale à 1. Il sera donc maximum quand les deux facteurs seront égaux à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand on aura $x = 4R$. Cette valeur de x est acceptable : car x peut varier depuis $2R$ jusqu'à l'infini.

Ainsi *le cône minimum, circonscrit à une sphère, a une hauteur double du diamètre de la sphère. Son volume,* déduit de l'expression [3], est égal à $\frac{8}{3}\pi R^3$; *il est double de celui de la sphère. Sa base* πy^2, tirée de l'équation [2], est égale à $2\pi R^2$; *elle est double de l'aire d'un grand cercle.* Enfin, *sa surface totale* $\pi y\sqrt{x^2+y^2}+\pi y^2$, est égale à $8\pi R^2$; *elle est double de la surface de la sphère.*

307. Problème V. *Trouver entre quelles limites peut varier le trinome* ax^2+bx+c.

Cherchons d'abord à rendre ce trinome égal à m, en posant :

$$ax^2+bx+c=m. \qquad [1]$$

En résolvant cette équation, on trouve :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a}. \qquad [2]$$

Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait :

$$b^2 - 4ac + 4am > 0, \quad \text{ou} \quad 4am > 4ac - b^2. \qquad [3]$$

Mais, pour tirer de cette inégalité la limite que m ne doit pas dépasser, il faut distinguer deux cas.

1° *Si* a *est positif*, on peut diviser les deux membres par $4a$ (**210**) ; et il vient :

$$m > \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad [4]$$

Ainsi, dans ce cas, *le trinome peut recevoir toute valeur plus grande que* $\frac{4ac - b^2}{4a}$; *il peut même atteindre cette limite qui est sa valeur minimum.*

2° *Si* a *est négatif*, en divisant l'inégalité [3] par $4a$, on change son sens (**210**); et il vient :

$$m < \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad [5]$$

Ainsi, dans ce cas, *le trinome peut recevoir toute valeur inférieure à* $\frac{4ac - b^2}{4a}$; *il peut même atteindre cette limite, qui est sa valeur maximum.*

Dans chaque cas, la valeur minimum ou maximum de m annule le radical : et la valeur correspondante de x est $-\frac{b}{2a}$.

On peut maintenant étudier facilement les variations du trinome. On a vu, en effet (**233**), que le trinome peut toujours être mis sous la forme :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Or, lorsque x passe, par degrés continus, de $-\infty$ à $+\infty$, le terme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, toujours positif, part de $+\infty$, diminue, puis s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}$, puis croît jusqu'à $+\infty$: son minimum

est zéro. La quantité entre crochets, ne différant du terme considéré que par une quantité constante $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, part aussi de $+\infty$, diminue, atteint son minimum $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, quand $x=-\frac{b}{2a}$; puis croît indéfiniment avec x. Et, lorsqu'on la multiplie par a pour former le trinome, le produit subit des variations qui sont dans le même sens, si $a>0$, et en sens contraire, si $a<0$.

Donc, *si* a *est positif, le trinome part de* $+\infty$, *diminue jusqu'à un certain minimum* $\frac{4ac-b^2}{4a}$, *puis croît jusqu'à* $+\infty$. *Si* a *est négatif, il part de* $-\infty$, *croît jusqu'à un certain maximum* $\frac{4ac-b^2}{4a}$, *puis décroît jusqu'à* $-\infty$.

308. Problème VI. — *Trouver entre quelles limites peut varier la fraction*

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Cherchons d'abord à rendre cette expression égale à m, et posons en conséquence :

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=m \qquad [1]$$

On en déduit :

$$(a-a'm)\,x^2+(b-b'm)\,x+(c-c'm)=0;$$

d'où :

$$x=\frac{-(b-b'm)\pm\sqrt{(b-b'm)^2-4\,(a-a'm)\,(c-c'm)}}{2\,(a-a'm)}$$

ou, en ordonnant par rapport à m sous le radical : [2]

$$x=\frac{-(b-b'm)\pm\sqrt{(b'^2-4a'c')m^2-2(bb'-2ac'-2ca')m+(b^2-4ac)}}{2(a-a'm)}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut choisir la valeur attribuée à m, de manière que la quantité placée sous le radical ne soit pas négative, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(b'^2-4a'c')m^2-2(bb'-2ac'-2ca')m+(b^2-4ac)\geqq 0 \qquad [3]$$

Distinguons trois cas.

1° $(b'^2 - 4a'c')$ est positif. Dans ce cas, si les racines du trinome, qui forme le premier membre de l'inégalité [3], sont réelles et inégales, le trinome sera positif (266), c'est-à-dire de même signe que son premier terme, pour toutes les valeurs de m plus petites que la plus petite ou plus grandes que la plus grande : il sera négatif pour toutes les valeurs de m comprises entre ces racines. On ne pourra donc donner à m que deux séries de valeurs, l'une comprenant tous les nombres depuis $-\infty$ jusqu'à la plus petite racine *qui sera un maximum*, l'autre comprenant tous les nombres depuis la plus grande racine *qui sera un minimum* jusqu'à $+\infty$.

Si, au contraire, les racines du trinome sont réelles et égales, ou imaginaires, le trinome conserve (**267**, **268**), pour toute valeur de m, le signe de son premier terme : il est donc toujours positif, et m peut recevoir toutes les valeurs sans exception. Il n'y a, dans ce cas, ni maximum ni minimum.

2° $(b'^2 - 4a'c')$ est négatif. Dans ce cas, les racines du trinome ne sont jamais imaginaires : car, si elles pouvaient l'être, le trinome serait négatif pour toute valeur attribuée à m. Par suite les valeurs correspondantes de m et de x ne seraient jamais réelles à la fois. Or cette conclusion est inadmissible ; car, d'après la forme de l'équation [1], toute valeur réelle, attribuée à x, fournit pour m une valeur réelle correspondante. Les racines sont donc réelles. Mais elles ne peuvent pas être égales ; car, si elles l'étaient, le trinome serait négatif pour toute valeur de m, à l'exception d'une seule (267), qui l'annulerait : les valeurs correspondantes de m et de x ne seraient donc à la fois réelles que dans un seul cas ; conclusion également inadmissible, d'après la forme de l'équation [1], toutes les fois que, comme on le suppose ici, la fraction [1] n'est pas indépendante de x. Les racines du trinome sont donc réelles et inégales. Le trinome est donc positif, c'est-à-dire de signe contraire à son premier terme, pour toute valeur de m comprise entre les racines : il est négatif pour toute autre valeur. On ne peut donc attribuer à m, que des valeurs comprises entre la plus petite racine *qui est un minimum*, et la plus grande *qui est un maximum*.

3° $(b'^2 - 4a'c')$ est nul. Dans ce cas, la quantité placée sous le radical est du premier degré en m : on résout alors l'inégalité [3]

comme il a été dit (210). On sait qu'il y a un maximum ou un minimum, selon que le coefficient de m est négatif ou positif.

Ainsi, *pour que l'expression* [1] *ait un maximum et un minimum, il faut et il suffit que les racines du trinome, qui forme le premier membre de l'inégalité* [3], *soient réelles et inégales : ces racines sont elles-mêmes le maximum et le minimum, et les valeurs correspondantes de* x *sont fournies par la formule,*

$$x=\frac{-(b-b'm)}{2(a-a'm)},$$

dans laquelle on remplace m *par ces racines.*

309. Variations de l'expression $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$. Si l'on veut déterminer les variations que subit une fraction du second degré, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, on commence par calculer, d'après la méthode précédente, le maximum et le minimum dont elle est susceptible, et les valeurs correspondantes de x. Puis on égale successivement à zéro le numérateur et le dénominateur de l'expression, pour trouver les valeurs de x qui la rendent nulle ou infinie. Enfin on détermine les valeurs particulières de la fraction, correspondantes à $x=\pm\infty$, et à $x=0$. On fait un tableau des valeurs de la variable ainsi obtenues, en les rangeant par ordre de grandeur, et l'on place en regard les valeurs correspondantes de la fonction. Il est facile d'en déduire les variations que l'on cherche. Prenons un exemple.

Soit la fraction : $$y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-8}.$$

Comme $(b'^2-4a'c')$ est positif, on tombe dans le premier cas; en égalant la fraction à m, on trouve que les racines du trinome sont :

$$m'=\frac{3-2\sqrt{2}}{6},\quad m''=\frac{3+2\sqrt{2}}{6};$$

m' est un maximum, m'' est un minimum. Les valeurs correspondantes de x sont :

$$x'=10-6\sqrt{2},\quad x''=10+6\sqrt{2}.$$

Les valeurs de x, qui annulent la fraction, sont les racines de l'équation :

$$x^2-3x+2=0;$$

elles sont 1 et 2. Les valeurs, qui la rendent infinie, sont les racines de l'équation :

$$x^2-2x-8=0;$$

elles sont -2 et 4. Enfin, pour $x=\pm\infty$, la fraction prend la valeur 1; et pour $x=0$, elle est égale à $-\frac{1}{4}$.

Ainsi la fraction proposée peut s'écrire :

$$y=\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-4)}.$$

On forme donc le tableau suivant :

$$x=-\infty,\quad -2,\quad 0,\quad 1,\quad 10-6\sqrt{2},\quad 2,\quad 4,\quad 10+6\sqrt{2},\quad +\infty;$$
$$y=+1,\quad \pm\infty,\quad -\frac{1}{4},\quad 0,\quad \frac{3-2\sqrt{2}}{6},\quad 0,\quad \mp\infty,\quad \frac{3+2\sqrt{2}}{6},\quad +1.$$

Quand x croît de $-\infty$ à -2, y, qui est positif, puisque ses quatre facteurs sont négatifs, croît depuis $+1$ jusqu'à $+\infty$. Elle change alors de signe, car le facteur $(x+2)$ devient positif; elle passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$: puis, x continuant à croître depuis -2 jusqu'à 0, de 0 à 1, et de 1 jusqu'à $10-6\sqrt{2}$, l'expression croît depuis $-\infty$ jusqu'à $-\frac{1}{4}$, de $-\frac{1}{4}$ à 0, et de 0 jusqu'au maximum $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$. A partir de là, quand x augmente jusqu'à 2, et depuis 2 jusqu'à 4, elle diminue du maximum à 0, et de 0 à $-\infty$: puis elle passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$; car ses quatre facteurs sont alors positifs; elle diminue ensuite jusqu'au minimum $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$, quand x croît de 4 à $10+6\sqrt{2}$; et, quand enfin x croît de $10+6\sqrt{2}$ jusqu'à $+\infty$, elle augmente depuis le minimum jusqu'à $+1$.

310. PROBLÈME VII. *Deux variables* x *et* y *étant liées ensemble par une équation du second degré :*

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0, \tag{1}$$

trouver les valeurs extrêmes que puisse prendre l'une d'elles, x *par exemple.*

Si l'on résout l'équation par rapport à y, on aura :

$$y=\frac{-bx-d\pm\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af}}{2a}; \tag{2}$$

ou, en posant :

$$b^2-4ac=m,\quad bd-2ae=n,\quad d^2-4af=p,$$

$$y=\frac{-bx-d\pm\sqrt{mx^2+2nx+p}}{2a}. \tag{3}$$

Pour que y soit réel, il faut que x soit choisi de manière que l'on ait :

$$mx^2+2nx+p>0; \tag{4}$$

et l'on a vu (270) comment on peut, dans les différents cas, déduire de l'inégalité [4] les limites entre lesquelles la valeur de x doit être ou ne pas être comprise.

311. Règle générale. Les exemples, que nous venons de résoudre, suffisent pour montrer comment on procède, en algèbre élémentaire, à la recherche des maximums et des minimums de certaines fonctions du second degré, qui ne dépendent que d'une seule variable indépendante. *On étudie d'abord, autant que possible, la marche de la fonction, pour reconnaître l'existence du maximum ou du minimum. On choisit ensuite certaines variables fournies par la question, et l'on exprime la fonction au moyen de ces variables. Puis on égale l'expression à* m, *et l'on écrit les équations, que fournit l'énoncé, entre les diverses variables. Ces équations permettent de déterminer la variable indépendante en fonction de* m ; *et la discussion des conditions de possibilité du problème fait connaître les limites qui fournissent, s'il y a lieu, le maximum et le minimum de l'expression.*

312. Remarque. Cette méthode est, il faut l'avouer, fort restreinte; car elle ne s'applique qu'aux fonctions du second degré. D'un autre côté, elle ne semble pas naturelle; car, au lieu de conduire à la découverte du maximum et du minimum d'une fonction par des raisonnements basés sur la définition générale (300), elle donne, en quelque sorte, accidentellement les résultats, puisqu'elle les déduit des conditions de possibilité d'un problème, qui n'est pas le problème proposé.

Dès lors, il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer, que les résultats qu'elle fournit satisfont à la définition générale. Reprenons, dans ce but, le problème VI (308); et considérons, pour fixer les idées, le cas où $(b'^2-4a'c')$ est positif. On sait qu'alors, si les racines du trinome du second degré en m sont réelles et inégales, la fraction ne peut recevoir aucune valeur comprise entre elles : la plus petite m' est un maximum, et la plus grande m'' est un minimum de la fraction. Désignons d'ailleurs par x' et par x'' les valeurs correspondantes de x.

Ce qui caractérise (300) le maximum M d'une fonction, c'est que, si l'on appelle a la valeur de x qui correspond à ce maximum, la substitution de $(a-h)$ et de $(a+h)$ à x fournit des valeurs de la fonction inférieures à M, pourvu que h soit suffisam-

ment petit. De plus, ces valeurs diffèrent de M, *à cause de la continuité*, de quantités aussi petites que l'on veut. Or x' et m' remplissent ces conditions. En effet, quand x varie par degrés insensibles, la fraction m varie aussi d'une manière continue. De plus, pour $x=x'$, m prend la valeur m'. Enfin, quand on pose : $x=x'-h$, et $x=x'+h$, h étant suffisamment petit, les valeurs de m ne peuvent être qu'inférieures à m'; car elles doivent en différer très-peu, et elles ne pourraient lui être supérieures sans être au moins égales à m'', puisque m ne peut recevoir aucune valeur comprise entre m' et m''.

On montrerait, par des raisonnements analogues, que x'' et m'' satisfont aux conditions imposées par la définition au minimum d'une fonction; et que, dans les autres cas où la fraction du second degré est susceptible d'un maximum et d'un minimum, la méthode élémentaire fournit des résultats qui vérifient aussi la définition générale.

§ II. Maximum ou minimum de quelques fonctions d'un degré supérieur au second.

313. Problème VIII. *Partager un nombre donné* a *en* n *parties dont le produit soit le plus grand possible.*

Chacune des parties étant moindre que a, leur produit ne peut pas atteindre a^n : il est donc susceptible d'un maximum. Décomposons le nombre a en n parties positives quelconques, $x, y, z, \ldots u, t$, de telle sorte que l'on ait :

$$x+y+z+\ldots+u+t=a. \qquad [1]$$

Leur produit est : $$xyz\ldots ut. \qquad [2]$$

Or, supposons que deux facteurs x et y ne soient pas égaux, et remplaçons-les, l'un et l'autre, dans le produit, par leur demi-somme $\frac{x+y}{2}$, nous aurons le nouveau produit :

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}z\ldots ut.$$

Comme la somme des deux premiers facteurs n'a pas été alté-

rée, ce produit satisfait encore à la condition [1]. Mais, comme ces facteurs sont devenus égaux, on a (301):

$$xy < \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2},$$

et, par suite,

$$xyz \ldots . ut < \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot z \ldots . ut. \qquad [3]$$

Le produit [2] n'est donc pas maximum. Ainsi, un produit de facteurs positifs variables dont la somme est constante, ne peut pas être maximum, quand ces facteurs ne sont pas égaux. Comme le maximum existe, on doit en conclure que *le produit est maximum, quand tous les facteurs sont égaux à* $\frac{a}{n}$.

314. REMARQUES. Nous supposons, dans le raisonnement précédent, que tous les facteurs soient positifs. S'il n'en était pas ainsi, le produit n'aurait pas de maximum; car la somme des facteurs restant la même, leur valeur absolue pourrait augmenter indéfiniment; et, si le nombre des facteurs négatifs était pair, le produit serait positif et aussi grand qu'on le voudrait.

Notre raisonnement suppose, en outre, qu'il est possible de rendre égaux tous les facteurs. On doit toujours vérifier cette condition, lorsqu'on veut appliquer le théorème.

315. PROBLÈME IX. *Partager un nombre* a *en deux parties* x, y, *telles que le produit* $x^p y^q$ *soit maximum,* p et q *étant des nombres entiers donnés.*

Les conditions du maximum ne sont pas changées, si l'on substitue au produit $x^p y^q$ la fraction $\frac{x^p y^q}{p^p q^q}$, qui n'est autre que ce produit divisé par un nombre constant $p^p q^q$. Or cette fraction peut s'écrire :

$$P = \frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \ldots . \times \frac{x}{p} \times \frac{y}{q} \times \frac{y}{q} \times \ldots . \times \frac{y}{q};$$

elle est donc un produit de $(p+q)$ facteurs, dont la somme $(x+y)$ est constante et égale à a. Si ces facteurs étaient indépendants entre eux, et n'étaient assujettis qu'à la condition d'avoir une somme constante, si l'on considérait, par exemple,

le produit $P_1 = x_1x_2\ldots x_py_1y_2\ldots y_q$, on obtiendrait (313) le maximum de P_1 en posant :

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = y_1 = y_2 = \ldots = y_q = \frac{a}{p+q};$$

et ce maximum serait : $\left(\frac{a}{p+q}\right)^{p+q}$. Mais certains facteurs de P devant rester égaux, le raisonnement du n° 313 n'est plus applicable. Toutefois, les valeurs de P sont évidemment toutes comprises parmi les valeurs de P_1 ; le maximum de P ne peut donc surpasser celui de P_1. D'ailleurs il lui est égal, si l'on pose $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{a}{p+q}$. Donc le produit x^py^q est maximum lorsque les deux parties x et y de a sont proportionnelles aux exposants p et q.

On prouvera de même que, pour partager a en n parties $x, y, z, \ldots u, t$, telles que le produit $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots u^\varphi t^\psi$ soit maximum, il faut satisfaire aux conditions,

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots \frac{u}{\varphi} = \frac{t}{\psi}.$$

316. PROBLÈME X. *Décomposer un nombre* p *en* n *facteurs positifs, dont la somme soit la plus petite possible.*

Je dis que la somme sera minimum, quand tous les nombres seront égaux à $\sqrt[n]{p}$; car on vient de démontrer (313) que, si la somme de n nombres est égale à $n\sqrt[n]{p}$, leur produit ne peut surpasser $(\sqrt[n]{p})^n$ ou p, c'est-à-dire la puissance n^{me} de la n^{me} partie de la somme. Donc, si cette somme est moindre que $n\sqrt[n]{p}$, le produit ne pourra pas atteindre p. Par conséquent, pour que le produit puisse être égal à p, il faut que la somme soit au moins égale à $n\sqrt[n]{p}$. Donc $n\sqrt[n]{p}$ est le minimum de la somme ; et, dans ce cas, toutes les parties sont égales à $\sqrt[n]{p}$.

317. PROBLÈME XI. *On donne le produit* $x^py^q = P$. *Trouver le minimum de la somme* $x + y$.

Je dis que ce minimum correspondra au cas où $\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$. En effet, désignons par α et β deux nombres satisfaisant aux deux conditions :

$$\alpha^p\beta^q = P, \qquad \frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q}.$$

On vient de démontrer (315) que, parmi tous les nombres x et y qui ont pour somme $(\alpha+\beta)$, les nombres α et β sont ceux qui donnent au produit x^py^q sa plus grande valeur. Si donc deux nombres x et y ont une somme moindre que $(\alpha+\beta)$, le produit x^py^q sera, *à fortiori*, moindre que $\alpha^p\beta^q$, c'est-à-dire que P. Par suite, pour que le produit x^py^q soit égal à P, il faut que $(x+y)$ soit au moins égal à $(\alpha+\beta)$, qui est, par conséquent, sa valeur minimum.

318. Remarque. Les trois problèmes (303), (310), (317), sont, en quelque sorte, réciproques de ceux que nous avons résolus n^{os} **301, 313, 315**. Cette réciprocité, entre certains problèmes de maximum et de minimum, peut être formulée, comme il suit, d'une manière générale.

Si une quantité Y *étant donnée, une autre quantité* X *est maximum dans certaines circonstances;* X *étant donnée à son tour*, Y *sera minimum dans les mêmes circonstances, pourvu que le maximum de* X *diminue, quand la valeur donnée de* Y *diminue elle-même.*

En effet, soient B la valeur donnée de Y, et A la plus grande valeur de X qui puisse se concilier avec B. Si l'on donne à Y une valeur b moindre que B, la valeur maximum correspondante de X sera, par hypothèse, moindre que A. Donc, pour que la valeur de X puisse être égale à A, il faut que celle de Y soit au moins égale à B. Par suite, B est la moindre valeur de Y qui puisse correspondre à la valeur $X=A$, c'est-à-dire la valeur minimum de Y correspondant à la valeur A de X.

Exemple. On démontre, en géométrie, que la circonférence de cercle est la courbe qui, sous une longueur donnée, renferme la plus grande surface. Il en résulte qu'elle est la courbe qui, avec une aire donnée, a le plus petit périmètre.

319. Problème XII. *Inscrire, dans une sphère de rayon donné* R, *un cylindre dont le volume soit maximum.*

Lorsque le rayon de base du cylindre est très-petit, le volume a une très-petite valeur. Cette valeur augmente à mesure que le rayon croît. Mais cet accroissement a une limite; car, lorsque le rayon devient à peu près égal à R, la hauteur devient très-petite, et par suite le volume est presque nul.

Désignons par x le rayon de base, et par $2y$ la hauteur d'un des cylindres inscrits; son volume V aura pour expression $2\pi x^2y$. D'ailleurs la géométrie donne, entre x et y, la relation :

$$x^2+y^2=R^2. \qquad [1]$$

On en conclut, en éliminant x,

$$V=2\pi y(R^2-y^2). \qquad [2]$$

Or le maximum de cette expression correspond à la même valeur de y, que celui de $y(R^2-y^2)$. Mais ce produit n'est pas du second degré; et il n'est pas possible d'appliquer la méthode ordinaire (**311**) à la recherche de son maximum. On ne peut pas non plus décomposer l'expression en facteurs, et l'écrire : $y(R+y)(R-y)$, ou en la doublant, $y(R+y)(2R-2y)$; car, bien que les trois facteurs aient alors une somme constante et égale à $3R$, il n'est pas possible de les rendre égaux entre eux. Mais, si l'on élève le produit au carré, ce qui donne $y^2(R^2-y^2)^2$, on remarque que l'on peut considérer y^2 comme la variable, et que la somme des deux facteurs y^2 et (R^2-y^2) est constante et égale à R^2. Par suite, en vertu du théorème (**315**), si l'on peut choisir pour y une valeur satisfaisant à la proportion :

$$\frac{y^2}{1}=\frac{R^2-y^2}{2}, \qquad [3]$$

cette valeur correspondra au maximum cherché. Or de l'équation [3] on tire :

$$y^2=\frac{R^2}{3};$$

et, par suite,
$$x^2=\frac{2R^2}{3}.$$

Ces valeurs de x et de y sont admissibles; car elles sont réelles et inférieures au rayon R. Le volume maximum du cylindre a donc pour valeur : $V=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

320. Il a quelquefois avantage à ramener la recherche du minimum d'une fonction à la recherche du maximum de la fonction inverse.

Problème XIII. *Circonscrire à une sphère, de rayon* R, *un cône dont la base repose sur un plan diamétral, et dont le volume soit minimum.*

Désignons par x et par y le rayon de base et la hauteur d'un des cônes circonscrits. Son volume V est égal à $\frac{1}{3}\pi x^2 y$. D'ailleurs la géométrie donne aisément la relation :

$$x^2=\frac{R^2y^2}{y^2-R^2}. \qquad [1]$$

L'expression du volume est donc :

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\frac{y^3}{y^2-R^2}. \qquad [2]$$

Comme le facteur $\frac{1}{3}\pi R^2$ est constant, il suffit de déterminer le minimum de la fraction $\frac{y^3}{y^2-R^2}$. Or ce minimum correspond évidemment au maximum de la

fraction renversée $\frac{y^2-R^2}{y^3}$, ou au maximum de son carré $\frac{(y^2-R^2)^2}{y^6}$. Et, comme on a identiquement :

$$\frac{(y^2-R^2)^2}{y^6}=\frac{1}{y^2}\left(\frac{y^2-R^2}{y^2}\right)^2=\frac{1}{y^2}\left(1-\frac{R^2}{y^2}\right)^2=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{R^2}{y^2}\left(1-\frac{R^2}{y^2}\right)^2,$$

on voit que, abstraction faite du facteur constant $\frac{1}{R^2}$, la somme des deux facteurs $\frac{R^2}{y^2}$ et $\left(1-\frac{R^2}{y^2}\right)$ est constante; si donc on peut choisir pour y la valeur fournie par la relation (**315**) :

$$\frac{R^2}{y^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{R^2}{y^2}\right), \qquad [3]$$

cette valeur correspondra au maximum de $\frac{y^2-R^2}{y^3}$, c'est-à-dire au minimum de $\frac{y^3}{y^2-R^2}$. Or on tire de l'équation [3], $y^2=3R^2$: et, par suite l'équation [1] donne : $x^2=\frac{3R^2}{2}$. Ces valeurs de x et de y, étant plus grandes que R, sont admissibles; et, par conséquent, le volume minimum du cône circonscrit a pour valeur :

$$V=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}.$$

321. Extension de la méthode fournie par le théorème (**313**). Pour rendre maximum un produit de facteurs variables, on cherche à rendre constante la somme de ces facteurs, puis à les égaler entre eux. On peut, si cela est nécessaire, multiplier d'abord ces facteurs par certains nombres constants, convenablement choisis; car cette multiplication n'altère pas les conditions du maximum. Mais il n'est pas toujours facile de découvrir, *a priori*, les nombres que l'on doit employer. On désigne alors ces nombres par des lettres; et, les considérant comme des inconnues, on cherche à les déterminer, de manière à satisfaire aux deux conditions du maximum (**313**).

322. Problème XIV. *On donne, dans un trapèze isocèle, la petite base* a, *et la longueur commune* c *des deux côtés non parallèles. On demande le maximum de l'aire du trapèze.*

Désignons par x la demi-différence des deux bases du trapèze; la grande base sera $(a+2x)$; la hauteur sera $\sqrt{c^2-x^2}$; par suite, l'aire du trapèze aura pour expression :

$$S=(a+x)\sqrt{c^2-x^2};$$

et le maximum de cette aire aura lieu pour la même valeur de x que le maximum du carré,

$$S^2 = (a+x)^2 (c^2 - x^2),$$

expression que l'on peut écrire :

$$S^2 = (a+x)(a+x)(c+x)(c-x). \qquad [1]$$

Il serait facile de rendre constante la somme des quatre facteurs; il suffirait de multiplier le dernier par 3 : mais on ne pourrait pas rendre ensuite ces facteurs égaux. Multiplions donc tous les facteurs *distincts*, à l'exception d'un, par des nombres indéterminés α, β; et écrivons :

$$\alpha\beta S^2 = (a+x)(a+x)(\alpha c + \alpha x)(\beta c - \beta x).$$

Nous pourrons exiger d'abord, que la somme des facteurs soit constante, en égalant à zéro le coefficient de x; ce qui donnera :

$$2 + \alpha - \beta = 0. \qquad [2]$$

Puis nous pourrons égaler les divers facteurs; ce qui donnera :

$$a + x = \alpha c + \alpha x, \qquad [3]$$
$$a + x = \beta c - \beta x. \qquad [4]$$

Ces trois équations [2], [3], [4], suffiront pour déterminer les coefficients α et β, et la valeur cherchée de x. Mais il n'est pas nécessaire de connaître α et β; il suffit de les éliminer, à l'aide des trois équations, pour obtenir x. On a ainsi, d'après les équations [3] et [4] :

$$\alpha = \frac{a+x}{c+x}, \quad \beta = \frac{a+x}{c-x};$$

et, substituant ces valeurs dans l'équation [2], on a :

$$2 + \frac{a+x}{c+x} - \frac{a+x}{c-x} = 0,$$

ou, en simplifiant :

$$2x^2 + ax - c^2 = 0. \qquad [5]$$

La racine positive, qui seule convient ici, est :

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8c^2}}{4}. \qquad [6]$$

C'est la valeur de x, qui correspond au maximum.

On peut remarquer que l'équation [5], mise sous la forme

$$x(2x+a)=c^2,$$

prouve que le côté c est moyenne proportionnelle entre x et la grande base ; et que, par conséquent, la grande base est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, qui aurait pour côtés de l'angle droit le côté c et la diagonale du trapèze.

Si l'on a : $c=a$, on en conclut : $x=\frac{a}{2}$; et la grande base est égale à $2a$. Le trapèze maximum devient un demi-hexagone régulier.

323. Il faut remarquer que, si l'expression renferme n facteurs distincts, on emploie $(n-1)$ indéterminées, qui, avec x, forment n inconnues. Or, en exigeant que la somme des facteurs soit constante, on obtient une première équation : et en égalant les n facteurs, on forme $(n-1)$ équations. La méthode fournit donc autant d'équations que d'inconnues : elle est générale.

§ III. Maximum ou minimum de quelques fonctions de plusieurs variables.

324. Problème XV. *Trouver entre quelles limites peut varier le polynome :*

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F, \qquad [1]$$

lorsque les variables x *et* y *prennent toutes les valeurs possibles.*

Cherchons à rendre ce polynome égal à une quantité donnée m, en posant :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=m.$$

Si l'on considère y comme inconnue, on tire de cette équation :

$$y=\frac{-(Bx+D)\pm\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)+4Am}}{2A}. \qquad [2]$$

Or, pour qu'une valeur, assignée à m, soit compatible avec des valeurs réelles de x et de y, il faut que, pour cette valeur de m, on puisse avoir, en choisissant x convenablement :

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF+4Am>0. \qquad [3]$$

Distinguons trois cas :

1° (B^2-4AC) est positif. Dans ce cas, quel que soit m, l'iné-

galité [3] est toujours possible; car on peut toujours choisir pour x une infinité de valeurs telles, que le trinome, qui forme le premier membre de l'inégalité, prenne le signe de son premier terme (269).

2° (B^2-4AC) est négatif. Dans ce cas, l'inégalité [3] est possible, si les racines du trinome sont réelles; car en donnant à x des valeurs comprises entre ces racines, on rendra le trinome de signe contraire à son premier terme. Mais elle n'est possible qu'à cette condition: car, si les racines étaient imaginaires, le trinome conserverait, pour toute valeur attribuée à x, le signe de son premier terme; il serait constamment négatif (268). Ainsi on doit, dans ce cas, choisir m de telle manière que les racines du trinome soient réelles. Or, cette condition est exprimée (246) par l'inégalité

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF+4Am)>0. \quad [4]$$

Comme cette inégalité est du premier degré en m, on en déduira (210) la limite de cette quantité: il y aura, par suite, un maximum ou un minimum, si cette limite est admissible.

Or, cette valeur limite de m annule le premier membre de l'inégalité [4]; elle rend donc égales les racines du trinome [3]. Ce trinome peut, en conséquence, s'écrire: $(B^2-4AC)(x-x')^2$, en désignant par x' la valeur de la racine double. Il en résulte que la valeur [2] de y devient, dans cette hypothèse,

$$y=\frac{-(Bx+D)\pm(x-x')\sqrt{B^2-4AC}}{2A};$$

et, comme (B^2-4AC) est négatif, y n'est réel que pour $x=x'$. Il faut donc donner à x cette valeur; ce qui exige que y reçoive la valeur correspondante

$$y'=-\frac{Bx'+D}{2A}.$$

Ces valeurs de x et de y sont admissibles: ce sont donc celles qui fournissent le maximum ou le minimum de m.

3° $(B^2-4AC)=0$. Dans ce cas, l'inégalité [3] est du premier degré en x: quelle que soit la valeur attribuée à m, il est toujours possible de vérifier cette inégalité, en choisissant x convenablement. Il n'y a, par suite, ni maximum ni minimum.

Si, cependant, $(BD - 2AE)$ était nul en même temps que $(B^2 - 4AC)$, l'inégalité [3] se réduirait à

$$D^2 - 4AF + 4Am > 0;$$

et l'on en déduirait une limite de m, savoir :

$$m > \frac{4AF - D^2}{4A}, \quad \text{ou} \quad m < \frac{4AF - D^2}{4A},$$

selon que A serait positif ou négatif. Le polynome aurait donc un minimum dans le premier cas, un maximum dans le second.

On étendrait aisément cette théorie au cas de plus de deux variables indépendantes.

Appliquons-la à l'exemple suivant.

325. PROBLÈME XVI. *Trouver le minimum de l'expression* $x^2 + y^2 + z^2$, *sachant que* x, y, z, *sont liés par la relation,*

$$ax + by + cz = d. \qquad [1]$$

Posons :

$$x^2 + y^2 + z^2 = m.$$

Nous pouvons éliminer une des variables, z, par exemple. Car on tire de l'équation [1],

$$z = \frac{d - ax - by}{c};$$

et par suite,

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{d - ax - by}{c}\right)^2 = m,$$

ou

$$(a^2 + c^2)x^2 + 2abxy + (b^2 + c^2)y^2 - 2adx - 2bdy + d^2 - c^2m = 0. \qquad [2]$$

En résolvant l'équation [2] par rapport à y, on trouve, après quelques réductions :

$$y = \frac{b(d - ax) \pm c\sqrt{-(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2adx - d^2 + (b^2 + c^2)m}}{b^2 + c^2}. \qquad [3]$$

Comme le coefficient de x^2, dans le trinome placé sous le radical, est négatif, il faut choisir la valeur de m, de telle sorte que les racines de ce trinome soient réelles ; ce qui exige que l'on ait ;

$$a^2d^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(-d^2 + \{b^2 + c^2\}m) > 0,$$

ou

$$-(b^2 + c^2)d^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2)m > 0,$$

ou, en divisant par $(b^2 + c^2)$, et transposant :

$$m > \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Si donc on peut donner à m la valeur

$$m = \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

ce sera le minimum cherché. Or, pour cette valeur de m, le trinome, placé sous le radical, devient :

$$-(a^2+b^2+c^2)\left(x-\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)^2.$$

Par suite, la valeur [3] de y s'écrit :

$$y=\frac{b\,(d-ax)\pm\left(x-\dfrac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)\sqrt{-(a^2+b^2+c^2)}}{b^2+c^2}$$

Elle n'est réelle que si l'on pose :

$$x=\frac{ad}{a^2+b^2+c^2};$$

et elle devient alors $\qquad y=\dfrac{bd}{a^2+b^2+c^2}.$

Par suite: $\qquad z=\dfrac{cd}{a^2+b^2+c^2}$

Ces valeurs sont admissibles; et, par conséquent, ce sont celles qui rendent minimum l'expression $x^2+y^2+z^2$.

EXERCICES.

I. Parmi tous les carrés que l'on peut inscrire dans un carré donné, de manière que chaque côté contienne un sommet, quel est le plus petit ?

On trouve le carré qui a pour sommets les milieux des côtés du carré donné.

II. Inscrire dans un cercle, de rayon R, le triangle maximum.

On voit aisément que l'on n'a à comparer entre eux que les triangles isocèles; et, en appliquant le théorème (315), on trouve, comme maximum, le triangle équilatéral.

III. On suppose qu'un triangle isocèle, inscrit dans un cercle, de rayon R, tourne autour de sa base : on demande le maximum du volume décrit.

On trouve, en appliquant le théorème (315), que la hauteur du triangle tournant doit être égale à $\frac{5R}{3}$. Le volume maximum est $\frac{50\pi R^3\sqrt{5}}{81}$.

IV. Parmi tous les cônes droits de même volume $\frac{1}{3}\pi a^3$, quel est celui dont la surface latérale est minimum ?

On applique le théorème (317); et l'on trouve pour la hauteur, $y=a\sqrt[3]{2}$, et pour le rayon de base, $x^2=\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$.

V. Parmi tous les cônes droits de même surface latérale πa^2, quel est celui dont le volume est maximum ?

On applique le théorème (315); et l'on trouve que le rayon de base $x=\frac{a}{\sqrt[4]{3}}$, et que la hauteur $y=a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

VI. Parmi les parallélipipèdes rectangles de même surface, quel est celui qui a le plus grand volume; et parmi ceux de même volume, quel est celui dont la surface est minimum?

Le cube (application des théorèmes **312** et **316**).

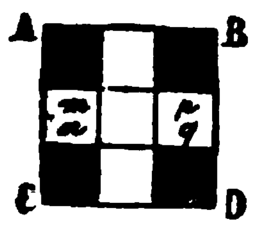
VII. Quelle est la zone sphérique, à une base, qui contient le plus grand volume parmi celles qui ont même surface πa^2; et quelle est la zone de plus petite surface, parmi celles qui contiennent le même volume πa^3?

On applique le théorème (**315**); et l'on trouve que la hauteur et le rayon de base de la zone de volume maximum, sont, l'un et l'autre, égaux à $\frac{a}{\sqrt{2}}$: le segment maximum est donc un hémisphère.

On trouve aussi un hémisphère pour le minimum (**317**).

VIII. Parmi tous les cylindres de même volume V, quel est celui qui est inscrit dans la plus petite sphère?

En s'appuyant sur les formules du n° **319**, et sur la remarque (**318**), on trouve que le rayon de la sphère minimum est égal à $\sqrt[3]{\frac{3V\sqrt{3}}{4\pi}}$. On en conclut, pour le rayon de base du cylindre, $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi\sqrt{2}}}$, et, pour la hauteur, $h=\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$.



IX. On donne une feuille de carton carrée ABCD dont le côté est a, aux quatre coins de laquelle on supprime les carrés égaux qui sont ombrés dans la figure ci-jointe. Déterminer le côté de ces carrés, par la condition que la boîte, qui aurait pour fond $mnpq$ et pour faces latérales les rectangles restants qui ont tous même hauteur, ait un volume maximum.

On trouve que le côté du carré ombré est $\frac{a}{6}$, et le volume maximum $\frac{2a^3}{27}$.

X. On marque sur une droite des points équidistants, que l'on numérote 1, 2, 3,...n. Trouver, sur la droite, un point tel, que la somme des carrés de ses distances aux points donnés, multipliés par le numéro correspondant, soit un minimum.

Pour résoudre la question, il faut savoir que la somme des n premiers nombres est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, la somme de leurs carrés à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et la somme de leurs cubes à $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. En désignant par a la distance de deux points consécutifs, et par x la distance du point cherché au premier point, on exprime en x la somme indiquée, on applique la méthode (**311**), et l'on trouve $x=\frac{2}{3}(n-1)a$.

XI. Même question, en supposant que les points soient numérotés 1, 3, 6, 10,... $\frac{n(n+1)}{2}$.

La même méthode conduit à $x=\frac{3}{4}(n-1)a$.

XII. Trouver le maximum de l'aire d'un triangle rectangle, sachant que la somme de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante est égale à a.

On trouve l'aire maximum égale à $\frac{a^2}{9}$. L'hypoténuse est $\frac{2a}{3}$, et la hauteur est $\frac{a}{3}$. Les deux côtés de l'angle droit sont égaux à $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

XIII. Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre $2p$, quel est celui dans lequel la somme des deux côtés de l'angle droit et de la hauteur abaissée sur l'hypoténuse est maximum?

On trouve, en appliquant la méthode générale, que le triangle est isocèle, que son hypoténuse est égale à $2p(\sqrt{2}-1)$, sa hauteur à $p(\sqrt{2}-1)$, et chaque côté de l'angle droit à $p(2-\sqrt{2})$.

XIV. Inscrire, dans un cercle, de rayon r, un trapèze dont les côtés non parallèles soient égaux à a, et dont la surface soit maximum.

On trouve que le trapèze maximum est un rectangle, dont les bases sont égales à $\sqrt{4r^2-a^2}$.

XV. Inscrire, dans une sphère, de rayon R, un cône dont la surface totale soit maximum.

On applique la méthode (**221**); et l'on trouve que la hauteur du cône est égale à $\frac{R(23-\sqrt{17})}{16}$.

XVI. On circonscrit à une sphère, de rayon R, un tronc de pyramide régulière, dont les bases sont des octogones réguliers. On demande le minimum du volume du tronc, lorsqu'on fait varier l'inclinaison α des faces latérales sur la grande base.

On trouve, pour expression du volume,

$$V=\frac{16(\sqrt{2}-1)R^3}{3}\left(\frac{4}{\sin^2\alpha}-1\right);$$

dans le cas du minimum, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $V=16(\sqrt{2}-1)R^3$.

XVII. Une petite surface blanche est posée horizontalement sur une table, et éclairée par une lampe, dont la distance à cette surface, estimée par sa projection horizontale, est constante et égale à d. A quelle hauteur x doit se trouver la flamme, pour que la surface soit éclairée le plus possible?

On sait que l'intensité de la lumière, que reçoit la surface, est proportionnelle au sinus de l'inclinaison des rayons, et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare le point lumineux de la surface. Si l'on désigne par α l'inclinaison, on trouve, pour le cas du maximum, en appliquant la méthode (**215**) :

$$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \text{d'où}\quad x=\frac{d}{\sqrt{2}}.$$

On construira la solution.

XVIII. Trouver la valeur minimum de $\frac{\tan 3a}{\tan^3 a}$, quand a varie de $0°$ à $30°$.

En posant : $\tan a=x$, et en remplaçant $\tan 3a$ par sa valeur en x, on trouve,

en appliquant la méthode ordinaire (**311**), un maximum $(17-12\sqrt{2})$, qui ne convient pas, car il correspond à $x=\sqrt{2}+1$; puis un minimum $(17+12\sqrt{2})$ qui convient, et qui correspond à $x=\sqrt{2}-1$, c'est-à-dire à $a=\frac{\pi}{8}$.

XIX. Deux corps, de masses m et m', animés, dans le même sens, de vitesses v et v', viennent à se choquer. Trouver la vitesse commune x qu'ils prendront après le choc, sachant que la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse par le carré du changement de vitesse est la moindre possible.

La quantité à rendre minimum est un trinome du second degré en x; et, en appliquant la règle (**307**), on trouve :

$$x=\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

XX. Si l'on donne $x+y=a$, la règle (**315**), qui fournit le maximum de x^py^q, s'étend au cas où p et q sont fractionnaires.

Comme on peut toujours poser : $p=\frac{p'}{d}$, $q=\frac{q'}{d}$, il suffit de remarquer qu'alors $x^py^q=\sqrt[d]{x^{p'}y^{q'}}$.

XXI. Trouver le minimum de $x^p+\frac{1}{x^q}$, p et q étant entiers ou fractionnaires, et x étant positif.

En posant $x^p=y$, $\frac{1}{x^q}=z$, on trouve (**317** et XX), $\frac{y}{z}=\frac{q}{p}$; d'où $x=\sqrt[p+q]{\frac{q}{p}}$.

XXII. On donne l'équation :

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0;$$

on demande de trouver les limites extrêmes des valeurs que peut prendre l'une des trois variables, x par exemple.

On suivra une marche analogue à celle du n° **310**.

XXIII. Trouver le minimum de $x^2+y^2+z^2+u^2$, sachant que l'on a :

$$ax+by+cz+du=k.$$

Marche analogue à celle du n° **325**.

XXIV. Trouver le maximum de l'expression $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$.

On trouve (**306**) : $x=\frac{2ab}{a-b}$, et $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}=\frac{(a+b)^2}{4ab}$.

XXV. L'expression $a+x+\frac{(a+x)^2}{a-x}$ peut passer par tous les états de grandeur.

XXVI. Trouver le minimum de $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}$.

On trouve $x=0$; et le minimum est 2.

XXVII. Deux nombres positifs variables x, y, sont tels, que leur différence est un nombre positif a. On demande si l'expression $\frac{x^m}{y^n}$ est susceptible d'un maximum ou d'un minimum, m et n étant des nombres positifs donnés.

Si l'on a : $x < y$, $m < n$, on trouve (315) un maximum, quand $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

Si l'on a : $x > y$, $m > n$, on trouve un minimum, quand $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

Mais si l'on a : $x < y$, $m > n$; ou $x > y$, $m < n$, il n'y a ni maximum ni minimum.

LIVRE IV.

DES PROGRESSIONS ET DES LOGARITHMES.

CHAPITRE I.

DES PROGRESSIONS.

§ 1. Des progressions par différence.

326. Définitions. Une *progression arithmétique* ou *par différence* est une suite de nombres tels que chacun d'eux surpasse celui qui le précède ou en est surpassé d'une quantité constante, qu'on appelle la *raison* de la progression.

Lorsque les termes vont en augmentant, la progression est dite *croissante*; elle est *décroissante* quand ils vont en diminuant.

Pour indiquer que des nombres font partie d'une progression, on les écrit les uns à la suite des autres, en les séparant par un point, et en les faisant précéder du signe $\div$; ainsi les suites

$$\div 3 . 7 . 11 . 15 . 19 . 23 . 27 \ldots ,$$
$$\div 48 . 45 . 42 . 39 . 36 . 33 . 30 \ldots ,$$

sont deux progressions par différence, l'une croissante, l'autre décroissante : les raisons sont respectivement 4 et 3.

On supprime la distinction que nous venons d'indiquer entre les progressions croissante et décroissante, en *convenant* que *la raison est l'excès d'un terme sur le terme précédent*. Si la progression est décroissante, cet excès est négatif. Par exemple, la seconde des deux progressions indiquées a pour raison -3.

En général, nous désignerons les termes d'une progression par différence par les lettres $a, b, c, \ldots i, k, l, \ldots$, la raison positive ou négative par r, et le nombre qui exprime le rang du terme l par n. Nous aurons :

$$\div a . b . c . d \ldots i . k . l \ldots \qquad [1]$$

327. Valeur du terme de rang n. D'après la définition, un terme, dans une progression croissante, se forme en ajoutant la raison au terme précédent. Le second est donc égal à $a+r$, le troisième à $a+2r$, le quatrième à $a+3r$, ..., le n^{me} à $a+(n-1)r$. Donc *un terme de rang quelconque se forme en ajoutant au premier autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui que l'on considère.* C'est ce que l'on exprime par la formule:

$$l=a+(n-1)r. \qquad [2]$$

Cette formule s'applique au cas où la progression est décroissante, pourvu que la lettre r représente un nombre négatif (326).

328. Corollaire. La formule [2], étant une relation entre les quatre nombres, a, l, r, n, permet de déterminer l'un d'eux, quand les trois autres sont donnés : il suffit de résoudre l'équation par rapport à la quantité inconnue. Elle fournit donc la solution de quatre problèmes faciles à énoncer, et dont les formules sont :

$$\left.\begin{array}{ll} l=a+(n-1)r, & a=l-(n-1)r, \\ r=\dfrac{l-a}{n-1}, & n=1+\dfrac{l-a}{r}. \end{array}\right\} \qquad [3]$$

329. Insertion de moyens arithmétiques. Insérer m moyens arithmétiques entre deux nombres donnés a et b, c'est former une progression, dont a et b soient les termes extrêmes, et dont ces m moyens soient les termes intermédiaires.

Il suffit évidemment, pour résoudre cette question, de trouver la raison de la progression ; car, en l'ajoutant au premier terme, on aura le second ; en l'ajoutant au second, on aura le troisième ; et ainsi de suite. Or on connaît, dans la progression cherchée, le premier terme a, le dernier b, et le nombre des termes $(m+2)$. On appliquera donc la formule [2], qui donnera :

$$r=\frac{b-a}{m+1}. \qquad [4]$$

Exemple. Insérer 10 moyens entre 5 et 38. La raison est : $r=\dfrac{38-5}{11}$ ou 3 ; et la progression cherchée est :

÷5.8.11.14.17.20.23.26.29.32.35.38.

330. PROBLÈME. *Déterminer la condition pour que trois nombres donnés,* a, b, c, *fassent partie d'une même progression.*

Supposons ces nombres rangés par ordre de grandeur : ils seront séparés, dans la progression inconnue, par des termes intermédiaires, qui pourront être considérés comme des moyens insérés entre a et b, et entre b et c. Par suite, si l'on désigne ces nombres de moyens par $(m-1)$ et par $(n-1)$, la raison devra être égale (329) à $\frac{b-a}{m}$ et à $\frac{c-b}{n}$; on devra donc avoir :

$$\frac{b-a}{m}=\frac{c-b}{n}. \qquad [5]$$

C'est la condition cherchée ; *il faudra qu'il existe deux nombres entiers,* m *et* n, *proportionnels aux différences* (b — a) *et* (c — b).

Cette condition est toujours remplie, quand les nombres a, b, c, sont commensurables : car, si les nombres $(b-a)$ et $(c-b)$ sont fractionnaires, il suffira de les réduire au même dénominateur, et de prendre m et n égaux aux numérateurs. En multipliant les deux résultats par un même nombre entier quelconque, on aura d'autres valeurs pour m et n; de sorte que le problème a, dans ce cas, une infinité de solutions.

331. THÉORÈME. *Si l'on insère, entre les termes consécutifs d'une progression* [1], *pris deux à deux, un même nombre* m *de moyens arithmétiques, on obtient une progression unique, dont la raison est le quotient de la division de la raison primitive par* (m + 1).

En effet, les raisons des diverses progressions partielles sont (329) :

$$\frac{b-a}{m+1},\ \frac{c-b}{m+1},\ \frac{d-c}{m+1},\ldots;$$

elles sont donc toutes égales à $\frac{r}{m+1}$ (326). D'ailleurs le dernier terme de chacune est le premier de la suivante. On peut donc les considérer comme n'en faisant qu'une seule.

332. THÉORÈME. *Dans toute progression limitée, la somme de deux termes également distants des extrêmes est constante et égale à la somme des extrêmes.*

Soit, en effet, la progression :

$$\div a.b.c.d\ldots.i.k.l;$$

le second terme b est égal à $a+r$, et l'avant-dernier k est égal à $l-r$; donc leur somme $b+k=a+l$.

En général, le terme x, qui en a p avant lui, est égal (327) à $a+pr$, et le terme y, qui en a p après lui, est égal à $l-pr$; donc leur somme $x+y$ est égale à $a+l$.

333. Somme des termes d'une progression. Désignons par S la somme des termes de la progression qui commence par a, qui finit par l, et dont n est le nombre des termes. On a :

$$S=a+b+c+d\ldots.+i+k+l.$$

On n'altère pas cette somme en renversant les termes; si on les écrit de manière que les termes à égale distance des extrêmes se correspondent verticalement dans les deux lignes, on a :

$$S=l+k+i+\ldots.+d+c+b+a.$$

Qu'on ajoute maintenant les termes de ces deux suites par colonnes verticales, et l'on aura :

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)\ldots.+(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

Mais toutes les sommes, renfermées entre parenthèses, sont égales (332) à $(a+l)$; d'ailleurs leur nombre est celui des termes de la progression. On a donc :

$$2S=(a+l)n;$$

d'où l'on déduit :

$$S=\frac{(a+l)n}{2}. \qquad [6]$$

La somme des termes d'une progression par différence est la moitié du produit de la somme des extrêmes par le nombre des termes.

Exemple. La somme des 12 termes de la progression (329) est $\frac{(5+38)\times 12}{2}$ ou 258.

Remarque. Si l'on ne connaissait que le premier terme a, la raison r, et le nombre n des termes, il faudrait, pour appliquer la formule précédente, commencer par calculer le dernier terme l, à l'aide de la formule [2]. En substituant sa valeur dans la formule [6], on a :

$$S=\frac{\{2a+(n-1)r\}n}{2}. \qquad [7]$$

334. Applications. 1° Trouver la somme des n premiers nombres entiers,

$$1+2+3+\ldots.+n.$$

Comme ils forment une progression dont la raison est 1, leur somme est :

$$S=\frac{(1+n)n}{2}, \quad \text{ou} \quad S=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad [8]$$

Donc, *pour avoir la somme des* n *premiers nombres entiers, on multiplie le dernier par celui qui le suivrait immédiatement, et l'on divise le produit par* 2.

2° Trouver la somme des n premiers nombres impairs,

$$1+3+5+7\ldots.$$

Ils forment une progression dont la raison est 2; en appliquant la formule [7] on a :

$$S=\frac{\{2+2(n-1)\}n}{2}, \quad \text{ou} \quad S=n^2. \qquad [9]$$

Ainsi *la somme des* n *premiers nombres impairs est égale au carré de* n.

335. Problèmes. Les formules [2] et [6] fournissent deux relations entre les quantités a, l, r, n, S, relations qui permettent de déterminer deux de ces quantités, quand les trois autres sont données. De là dix problèmes à résoudre :

1°	Étant donnés	a, l, r,	déterminer	n, S ;
2°	»	a, l, n,	»	r, S;
3°	»	a, l, S,	»	r, n;
4°	»	a, r, n,	»	l, S;
5°	»	a, r, S,	»	l, n;
6°	»	a, n, S,	»	l, r;
7°	»	l, r, n,	»	a, S;
8°	»	l, r, S,	»	a, n;
9°	»	l, n, S,	»	a, r;
10°	»	r, n, S,	»	a, l.

Parmi ces problèmes, le cinquième et le huitième sont du second degré ; les huit autres sont du premier degré.

§ II. Des progressions par quotient.

336. Définitions. Une progression *géométrique* ou *par quotient* est une suite de nombres, dont chacun est égal au précédent multiplié par un nombre constant que l'on nomme la *raison* de la progression.

Lorsque la raison est plus grande que l'unité, les termes vont en croissant, la progression est *croissante;* lorsque la raison est moindre que l'unité, les termes vont en diminuant, et la progression est *décroissante.*

Pour indiquer que des nombres font partie d'une progression par quotient, on les écrit à la suite les uns des autres, en les séparant par deux points, et en les faisant précéder du signe $\div\!\div$.

Exemples. Les suites :

$$\div\!\div\, 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972 : \ldots.,$$

$$\div\!\div\, 528 : 264 : 132 : 66 : 33 : 16\tfrac{1}{2} : \ldots.,$$

sont deux progressions par quotient, l'une croissante et l'autre décroissante ; les raisons sont 3 et $\frac{1}{2}$.

En général, nous désignerons les termes d'une progression par quotient par a, b, c, d, ..., i, k, l, ..., la raison par q, et le rang du terme l par n. Nous aurons :

$$\div\!\div\, a : b : c : d : \ldots. : i : k : l : \ldots. \qquad [1]$$

337. Valeur du terme de rang n. D'après la définition, un terme d'une progression par quotient se forme en multipliant le précédent par la raison. Le second est donc égal à aq, le troisième à aq^2, le quatrième à aq^3, ..., le n^{me} à aq^{n-1}. Donc *un terme de rang quelconque est égal au premier multiplié par une puissance de la raison, dont l'exposant est égal au nombre des termes qui précède celui que l'on considère.* C'est ce qu'exprime la formule :

$$l = aq^{n-1}. \qquad [2]$$

338. Corollaire. La formule [2], étant une relation entre les quatre nombres, a, l, q, n, permet de déterminer l'un d'eux, quand les trois autres sont donnés. On trouve aisément, en résolvant l'équation [2] par rapport à chacune des quatre quantités successivement :

$$\left.\begin{array}{ll} l = aq^{n-1}, & a = \dfrac{l}{q^{n-1}}, \\ q = \sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}, & n = 1 + \dfrac{\log l - \log a}{\log q}. \end{array}\right\} \qquad [3]$$

La dernière formule suppose connues les propriétés fondamentales des logarithmes (365 et suiv.).

339. Théorème. *Si une progression est croissante, on peut la prolonger assez, pour que ses termes dépassent toute limite donnée.*

En effet, si l'on considère les trois termes consécutifs i, k, l, de la progression [1], on a, par définition,

$$k = iq, \qquad l = kq;$$

et, par soustraction, $l - k = (k - i)q$.

Or la raison q est supérieure à l'unité; donc la différence $(l-k)$ est plus grande que la différence $(k-i)$. L'excès d'un terme sur le précédent va donc en croissant. Or, si cet excès restait constant, comme dans la progression par différence, on pourrait, en l'ajoutant au premier terme a, un nombre suffisant de fois, obtenir un résultat aussi grand qu'on le voudrait. Il en sera donc de même, *a fortiori*, si, comme nous l'avons reconnu, cet excès va en augmentant.

340. Théorème. *Si une progression est décroissante, on peut la prolonger assez, pour que ses termes décroissent au-dessous de toute limite.*

En effet, si la progression [1] a une raison q inférieure à l'unité, les termes $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots \frac{1}{i}, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \ldots$ forment une autre progression par quotient, dont la raison $\frac{1}{q}$ est supérieure à l'unité, puisque, des égalités

$$b = a \times q, \quad c = b \times q, \quad d = c \times q, \ldots$$

on déduit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{c} \times \frac{1}{q}, \ldots$

Il résulte donc, du théorème précédent, que les fractions $\frac{1}{i}, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}$, peuvent devenir aussi grandes que l'on voudra, et par suite, leurs dénominateurs i, k, l, peuvent devenir aussi petits que l'on voudra. C'est ce qu'il fallait démontrer.

341. Insertion de moyens géométriques. Insérer m moyens géométriques entre deux nombres donnés a et b, c'est former une progression par quotient, dont a et b soient les termes extrêmes, et dont ces m moyens soient les termes intermédiaires.

Il suffit évidemment, pour résoudre cette question, de trouver la raison de la progression : car, en multipliant le premier terme

par la raison, on aura le second; en multipliant le second par la raison, on aura le troisième, et ainsi de suite. Or, on connaît, dans cette progression, le premier terme a, le dernier b, et le nombre des termes $(m+2)$. On appliquera donc la formule [2], qui donnera :

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}. \qquad [4]$$

Exemple. Insérer 3 moyens entre 7 et 112. La raison est :

$$q=\sqrt[4]{\frac{112}{7}} \text{ ou } 2;$$

et la progression cherchée est :

$$\div\div 7:14:28:56:112.$$

342. Théorème. *Si l'on insère, entre les termes consécutifs d'une progression par quotient, pris deux à deux, un même nombre* m *de moyens par quotient, on obtient une progression unique, dont la raison est la racine, d'indice* $(m+1)$, *de la raison primitive.*

En effet, les raisons des diverses progressions partielles sont :

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}, \ldots;$$

elles sont donc toutes égales à $\sqrt[m+1]{q}$. D'ailleurs le dernier terme de chacune est le premier de la suivante. On peut donc les considérer comme n'en faisant qu'une seule.

343. Problème. *Déterminer la condition, pour que trois nombres,* a, b, c, *fassent partie d'une même progression.*

Si, en considérant a comme étant le premier terme, on désigne par $(m+1)$ et par $(n+1)$ les rangs inconnus de b et de c, on a (337) :

$$b=aq^m, \qquad c=aq^n,$$

q étant la raison inconnue. Si l'on élève la première équation à la puissance n, et la seconde à la puissance m, on aura :

$$b^n=a^nq^{mn}, \qquad c^m=a^mq^{mn};$$

d'où, en éliminant q :

$$\frac{b^n}{a^n}=\frac{c^m}{a^m}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n=\left(\frac{c}{a}\right)^m. \qquad [5]$$

C'est la condition cherchée. Cette condition se simplifie, si l'on

suppose que a, b, c soient commensurables; car alors, en réduisant les rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ à leur plus simple expression, et en désignant par $\frac{g}{h}$ et $\frac{k}{l}$ les fractions irréductibles équivalentes, on a :

$$\left(\frac{g}{h}\right)^n=\left(\frac{k}{l}\right)^m, \quad \text{ou} \quad \frac{g^n}{h^n}=\frac{k^m}{l^m}.$$

Or, ces fractions, étant aussi irréductibles, ne peuvent être égales, que si l'on a :

$$g^n=k^m, \quad h^n=l^m;$$

ce qui exige, d'une part, que g et k soient composés des mêmes facteurs premiers, ainsi que h et l; et, d'autre part, que les exposants d'un même facteur, dans g et k, et dans h et l, soient dans un rapport constant $\frac{m}{n}$. Si ces conditions sont remplies, elles déterminent le rapport $\frac{m}{n}$. Mais elles laissent m et n indéterminés; de sorte que a, b, c peuvent faire partie d'une infinité de progressions.

344. Application. *Quels sont les nombres commensurables qui peuvent faire partie d'une progression par quotient, ayant pour termes* 1 *et* 10?

Désignons par $\frac{p}{q}$ l'un des nombres cherchés ; on doit avoir, d'après ce qui précède :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m=(10)^n, \quad \text{ou} \quad \frac{p^m}{q^m}=10^n;$$

m et n étant des nombres entiers. Or le second membre étant entier, le premier doit l'être aussi ; et comme $\frac{p^m}{q^m}$ est irréductible, par hypothèse, il faut que l'on ait : $q=1$, et, par suite, $p^m=10^n$. Mais pour que cette dernière égalité ait lieu, il faut que p ne contienne que les facteurs premiers 2 et 5 de 10, c'est-à-dire que l'on ait : $p=2^\alpha\times5^\beta$: il faut donc que $2^{\alpha m}\times5^{\beta m}=2^n\times5^n$, et que, par conséquent, $\alpha m=\beta m=n$. Il faut donc que $\alpha=\beta=\frac{n}{m}$. Ainsi les exposants de 2 et de 5, dans p, doivent être égaux; ou, en d'autres termes, p doit être une puissance de 10.

Les puissances de 10 sont donc les seuls nombres commensurables qui puissent figurer dans une progression par quotient, dont 1 et 10 font partie.

345. Théorème. *Dans toute progression par quotient, le produit*

de deux termes également distants des extrêmes est constant et égal au produit des extrêmes.

Soit, en effet, la progression limitée :

$$\div\!\div a : b : c : d : \ldots\ldots : i : k : l ;$$

le second terme b est égal à aq, et l'avant-dernier k est égal à $\frac{l}{q}$; donc leur produit $bk=al$. En général, le terme x, qui en a p avant lui, est égal à q^p; et le terme y, qui en a p après lui, est égal à $\frac{l}{q^p}$; donc le produit $xy=al$.

346. Produit des termes d'une progression. Désignons par P le produit des termes d'une progression, qui commence par a, qui finit par l, et dont n est le nombre des termes. Nous avons :

$$P=abcd\ldots\ldots ikl.$$

On n'altère pas ce produit en renversant l'ordre des facteurs, et en écrivant :

$$P=lki\ldots\ldots dcba.$$

Si l'on multiplie ces deux produits égaux l'un par l'autre, en groupant deux par deux les facteurs de même rang, il vient :

$$P^2=(al)\,(bk)\,(ci)\ldots\ldots(ic)\,(kb)\,(la).$$

Or tous les produits renfermés entre parenthèses sont égaux (345) à al. D'ailleurs leur nombre est celui des termes de la progression ; donc :

$$P^2=(al)^n;$$

d'où l'on tire :

$$P=\sqrt{(al)^n}. \qquad [6]$$

Ainsi, *le produit des termes d'une progression est égal à la racine carrée d'une puissance du produit des extrêmes, dont l'exposant est le nombre des termes.*

347. Somme des termes d'une progression par quotient. Désignons par S la somme des termes de la progression précédente ; de sorte que l'on a :

$$S=a+b+c+d+\ldots\ldots+i+k+l.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par q, on obtient :

$$Sq = aq + bq + cq + dq + \ldots\ldots + iq + kq + lq.$$

Mais, par hypothèse, $aq = b$, $bq = c$, $cq = d, \ldots\ldots$, $iq = k$, $kq = l$; donc l'égalité précédente devient :

$$Sq = b + c + d + \ldots\ldots + k + l + lq.$$

Si l'on suppose $q > 1$, et qu'on retranche S de Sq, on a évidemment, en supprimant les termes qui se détruisent :

$$Sq - S = lq - a, \quad \text{ou} \quad S(q-1) = lq - a;$$

d'où

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}. \qquad [7]$$

Ainsi, *la somme des termes d'une progression croissante par quotient se forme, en multipliant le dernier terme par la raison, en retranchant du produit le premier terme, et en divisant la différence par l'excès de la raison sur l'unité.*

Si l'on suppose $q < 1$, on ne peut plus retrancher S de Sq; on retranche alors Sq de S, et l'on a :

$$S - Sq = a - lq, \quad \text{ou} \quad S(1-q) = a - lq;$$

d'où

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}. \qquad [8]$$

Ainsi, *la somme des termes d'une progression décroissante se forme, en retranchant du premier terme le produit du dernier par la raison, et en divisant la différence par l'excès de l'unité sur la raison.*

Mais les conventions faites sur les nombres négatifs rendent cette seconde forme équivalente à la première.

Remarque. Si l'on ne connaissait que le premier terme a, la raison q, et le nombre n des termes, il faudrait, pour faire usage des formules précédentes, commencer par calculer le dernier terme l à l'aide de la formule [2]. En substituant sa valeur dans les formules [7] et [8], on a :

$$[9] \qquad S = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \quad \text{et} \quad S = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \qquad [10].$$

348. Limite de la somme des termes d'une progression

DÉCROISSANTE. La formule [8], qui donne la somme des termes d'une progression décroissante, peut s'écrire :

$$S = \frac{a}{1-q} - \frac{lq}{1-q}.$$

Or, si le nombre des termes va en augmentant indéfiniment, l'expression $\frac{a}{1-q}$, qui ne dépend que du premier terme et de la raison, conserve constamment la même valeur ; mais le produit $l\frac{q}{1-q}$, composé d'un facteur l qui décroît sans limite (340), et d'un facteur $\frac{q}{1-q}$ qui reste constant, peut devenir aussi petit que l'on voudra. Par conséquent la somme des termes, toujours inférieure à $\frac{a}{1-q}$, peut différer de $\frac{a}{1-q}$ aussi peu que l'on voudra, si le nombre des termes est suffisamment grand : en d'autres termes, $\frac{a}{1-q}$ est la limite vers laquelle tend la somme, lorsque le nombre des termes croît indéfiniment. En désignant cette limite par s, on a :

$$s = \frac{a}{1-q}. \qquad [11].$$

349. APPLICATION. Une fraction décimale périodique peut être considérée comme une progression décroissante ; et la formule [11] lui est applicable.

Soit, par exemple, la fraction périodique

$$0{,}35353535\ldots\ldots\ldots$$

Si on la sépare en tranches de deux chiffres, à partir de la virgule, on peut la regarder comme la limite de la somme des termes d'une progression décroissante à l'infini :

$$\div \frac{35}{100} : \frac{35}{10000} : \frac{35}{1000000} : \frac{35}{100000000} : \ldots,$$

dont la raison est $\frac{1}{100}$. D'après la formule [11], cette limite est égale

$$\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}, \quad \text{ou à } \frac{35}{99};$$

ce qui est précisément le résultat qu'on obtient, en arithmétique, dans la théorie des fractions périodiques.

EXERCICES.

I. Quelles sont les progressions par différence dans lesquelles la somme de deux termes quelconques fait partie de la progression ?

Ce sont celles dont le premier terme est un multiple de la raison.

II. Quelles sont les progressions par quotient, dans lesquelles le produit de deux termes fait partie de la progression ?

Ce sont celles dont le premier terme est une puissance de la raison.

III. Si, dans une suite de nombres, chacun est la demi-somme de ceux qui le comprennent, ces nombres forment une progression par différence. Si chacun est moyen proportionnel entre les deux qui le comprennent, ils forment une progression par quotient.

On ramène immédiatement cet énoncé aux définitions (**326** et **336**).

IV. Dans quelles progressions par différence existe-t-il un rapport, indépendant de n, entre la somme des n premiers termes et la somme des n suivants ?

Ce sont celles où la raison est double du premier terme (liv. II, chap. VII, exerc. 1).

V. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$ peuvent-ils faire partie d'une même progression par différence ou par quotient ?

Non. On s'appuiera sur les n^{os} **330** et **343**.

VI. Si l'on prend la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7..., et qu'on la sépare en groupes, dont le premier ait un terme, le deuxième deux termes, le troisième trois termes, etc., la somme des termes d'un même groupe est un cube.

On formera le premier et le dernier terme de n^{me} groupe, et on appliquera la formule [6] du n° **333** : on trouvera n^3 pour somme.

VII. Si l'on considère la suite 1, 2, 4, 6, 8, 10..., la somme des n premiers termes est impaire; et, quand on ajoute au nombre ainsi obtenu les $(n-1)$ nombres impairs qui le suivent, on obtient un cube.

On trouve pour résultat n^3, en suivant la même marche.

VIII. Dans une progression géométrique de six termes, la différence des termes extrêmes est plus grande que cinq fois la différence des termes du milieu

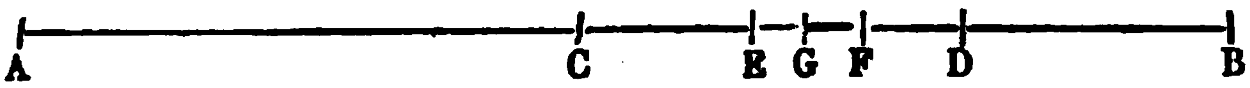
On exprime le rapport des deux différences en fonction de la raison, et l'on trouve que le minimum du rapport est 5.

IX. On forme une suite de termes tels, que chacun soit la demi-somme des deux précédents ; connaissant les deux premiers termes a, b de cette suite, trouver de quelle limite on s'approche, lorsqu'on en forme un nombre de plus en plus grand.

La limite est $\frac{a+2b}{3}$.

X. Soit AB une ligne quelconque ; on marque son milieu C, puis le milieu D de CB, puis le milieu E de DC, puis le milieu F de ED, le milieu G de FE, et

ainsi de suite indéfiniment; trouver de quelle limite les points C, D, E, F, G,



s'approchent de plus en plus, lorsqu'on en marque un nombre de plus en plus grand.

Le point limite est au tiers de AB, à partir du point B.

XI. Trouver la limite de la somme des fractions

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots,$$

dont les numérateurs forment une progression par différence, et les dénominateurs une progression par quotient.

On décompose cette série en plusieurs progressions géométriques décroissantes, et l'on trouve que la limite est 2.

XII. On forme la suite des nombres

$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15,\quad 21,\quad \text{etc.},$$

tels que la différence de deux termes consécutifs va sans cesse en augmentant d'une unité; trouver la somme des n premiers termes de cette suite.

On trouve que le n^{me} terme est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, et que la somme est égale à $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

XIII. Dans une progression par quotient, dont le nombre des termes est impair, la somme des carrés des termes est égale à la somme des termes, multipliée par l'excès de la somme des termes de rang impair sur la somme des termes de rang pair.

On forme les différentes sommes indiquées, et on vérifie aisément l'égalité.

XIV. Dans une progression par différence, dont les termes sont entiers, si p est un nombre premier avec la raison, et que l'on divise p termes consécutifs par p, on obtiendra pour restes tous les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots (p-1)$.

On prouve que deux restes ne peuvent pas être égaux.

XV. Un triangle étant donné, on forme un second triangle qui ait pour côtés les médianes du premier, un troisième triangle avec les médianes du second, et ainsi indéfiniment. On demande la limite de la somme des aires de tous ces triangles.

Cette limite est quatre fois l'aire du triangle donné.

CHAPITRE II.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES LOGARITHMES.

§ I. Définition des logarithmes.

350. Définition. — Lorsque l'on considère deux progressions, l'une par quotient et commençant par l'unité, l'autre par différence et commençant par zéro, les termes de la seconde sont appelés les *logarithmes* des termes qui ont le même rang dans la première. Ainsi, soient les deux progressions :

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots : q^m : \ldots\ldots : q^n : \ldots\ldots : q^p : \ldots\ldots, \\ \div 0 . r . 2r . 3r . 4r \ldots\ldots mr \ldots\ldots nr \ldots\ldots pr \ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

mr est le logarithme de q^m.

Remarque. — Le logarithme d'un nombre considéré isolément est tout à fait arbitraire. Si l'on demande quel est le logarithme de 3, cette question n'a aucun sens, tant qu'on n'a pas choisi les progressions qui définissent le *système* des logarithmes dont on veut parler.

Dans tous les systèmes le logarithme de 1 est 0.

351. Extension de la définition. — D'après la définition précédente, lorsque l'on a choisi les deux progressions qui définissent un système de logarithmes, il semble que les nombres qui ne font pas partie de la progression par quotient, n'ont pas de logarithmes ; nous allons voir comment, en étendant cette définition, on est conduit à regarder chaque nombre plus grand que l'unité comme ayant un logarithme.

Concevons que l'on insère entre deux termes consécutifs de chacune des progressions [1] un même nombre de moyens ; nous obtiendrons (**331**, **342**) deux nouvelles progressions, commençant encore l'une par 1, l'autre par 0, et dans lesquelles les termes correspondants des progressions primitives se correspondront encore. Nous dirons donc que les termes nouvellement introduits, dans la progression par différence, sont les logarithmes des termes de même rang, introduits dans la progression par quotient.

352. Théorème. — Pour que cette extension de la définition soit admissible, il faut prouver que, si, en insérant des nombres différents de moyens, on amène un même nombre, de deux manières différentes, à faire partie de la progression par quotient, on lui trouvera, des deux manières, le même logarithme.

Supposons que l'on insère d'abord $(p-1)$ moyens entre les termes consécutifs des progressions [1], la raison de la progression par quotient sera (341), $\sqrt[p]{q}$; et la raison de la progression par différence sera (329) $\frac{r}{p}$. En sorte que le terme, de rang $(k+1)$, dans la première, sera $(\sqrt[p]{q})^k$; et le terme correspondant, dans la seconde, sera $k\frac{r}{p}$.

Supposons maintenant que l'on insère, entre les termes consécutifs des progressions [1], un autre nombre $(p'-1)$ de moyens; un terme, de rang $(k'+1)$, dans la première, sera $(\sqrt[p']{q})^{k'}$, et le terme correspondant, dans la seconde, sera $k'\frac{r}{p'}$.

Nous voulons prouver que, si l'on a :

$$(\sqrt[p]{q})^k = (\sqrt[p']{q})^{k'}, \qquad [2]$$

on aura aussi : $\quad k\frac{r}{p} = k'\frac{r}{p'}, \quad$ ou $\quad \frac{k}{p} = \frac{k'}{p'}.$

Si, en effet, nous élevons les deux membres de l'égalité [2] à la puissance pp', nous aurons :

$$(\sqrt[p]{q})^{kpp'} = (\sqrt[p']{q})^{k'pp'}, \quad \text{ou} \quad q^{kp'} = q^{k'p};$$

et cette dernière égalité entraîne évidemment :

$$kp' = k'p, \quad \text{ou} \quad \frac{k}{p} = \frac{k'}{p'}.$$

Donc, *si l'on peut introduire un même nombre, de deux manières différentes, dans la progression par quotient, on lui trouvera, des deux manières, le même logarithme.*

353. Théorème. — *Si l'on calcule des logarithmes en insérant un certain nombre de moyens entre les termes consécutifs des deux progressions, puis que l'on en calcule d'autres en insérant un autre*

nombre de moyens, ces divers logarithmes peuvent être considérés comme faisant partie d'un seul et même système.

Pour le prouver, remarquons que si, entre les termes consécutifs de la progression par quotient, on insère d'abord $(p-1)$ moyens, puis $(p'-1)$ moyens, tous les termes obtenus, dans l'un et l'autre cas, font partie d'une seule et même progression, que l'on obtiendrait en insérant $(pp'-1)$ moyens. En effet, si l'on insère $(pp'-1)$ moyens entre deux termes consécutifs a et b d'une progression, le terme b aura, après cette insertion, le $(pp'+1)^{me}$ rang. Si donc, dans la progression ainsi formée, on compte les termes de p' en p', à partir du second, c'est-à-dire le $(p'+1)^{me}$, le $(2p'+1)^{me}$, le $(3p'+1)^{me}$....., b se trouvera le p^{me} de cette suite. Or, q étant la raison de la progression nouvelle, les termes ainsi désignés sont respectivement égaux à $aq^{p'}$, $aq^{2p'}$, $aq^{3p'}$.....; ils sont donc en progression; et l'on peut les considérer comme formant $(p-1)$ moyens entre a et b. De même, si l'on compte les termes de p en p, à partir du second, b se trouvera le p'^{me} de cette autre suite; et ces termes pourront être considérés comme formant $(p'-1)$ moyens entre a et b.

La même remarque s'applique à la progression par différence: on voit donc que les deux systèmes obtenus, en insérant séparément $(p-1)$ moyens et $(p'-1)$ moyens, sont compris dans le système unique, qui correspond à $(pp'-1)$ moyens.

Par exemple, si a et b désignent deux termes consécutifs quelconques d'une progression par quotient ou par différence, et que l'on insère entre a et b, d'abord trois moyens, puis ensuite cinq moyens, de manière à former les progressions

$$a,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad b,$$

$$a,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ b;$$

si l'on insère ensuite $(4\times6-1)$ ou 23 moyens, on formera une progression nouvelle, dans laquelle A_1, A_2, A_3 figureront aux rangs 7, 13, 19, et B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, aux rangs 5, 9, 13, 17, 21.

354. THÉORÈME. — *On peut insérer, entre les termes consécutifs de la progression par quotient, un assez grand nombre de moyens, pour que deux termes consécutifs quelconques de la progression nouvelle diffèrent aussi peu qu'on voudra.*

En effet, soit q la raison, et soient A et Aq deux termes consécutifs quelconques de la progression donnée. Si l'on insère

$(m-1)$ moyens entre ces deux termes, la raison de la progression nouvelle sera $\sqrt[m]{q}$; par suite, deux termes consécutifs de cette progression, compris entre A et Aq, seront $A(\sqrt[m]{q})^k$ et $A(\sqrt[m]{q})^{k+1}$, et leur différence sera :

$$A(\sqrt[m]{q})^{k+1} - A(\sqrt[m]{q})^k, \quad \text{ou} \quad A(\sqrt[m]{q})^k(\sqrt[m]{q}-1).$$

Comme k est inférieur à m, $(\sqrt[m]{q})^k$ est inférieur à q; la différence est donc plus petite que

$$Aq(\sqrt[m]{q}-1).$$

Or, quand m croît indéfiniment, $(\sqrt[m]{q}-1)$ tend vers zéro. Car, pour vérifier que l'on a, pour une valeur suffisamment grande de m,

$$\sqrt[m]{q}-1<\varepsilon,$$

quelque petit que soit ε, il suffit de prouver que l'on a, dans les mêmes circonstances :

$$\sqrt[m]{q}<1+\varepsilon, \quad \text{ou} \quad q<(1+\varepsilon)^m;$$

et cette dernière inégalité est évidente, puisque l'on sait (339) que les puissances d'un nombre plus grand que 1 croissent, sans limites, avec leur exposant.

Ainsi le facteur $(\sqrt[m]{q}-1)$ tend vers zéro; d'ailleurs le facteur Aq est fixe : donc le produit $Aq(\sqrt[m]{q}-1)$ peut devenir aussi petit que l'on voudra, si l'on donne à m une valeur suffisamment grande; et il en est de même, *a fortiori*, de la différence considérée.

355. Remarque. — Il résulte du théorème (354), que les nombres dont les logarithmes sont définis dans les paragraphes précédents, croissent par degrés aussi rapprochés que l'on veut. Si l'on se bornait cependant à cette définition, il y aurait une infinité de nombres qui devraient être regardés comme n'ayant pas de logarithmes. On sait, par exemple (344), que, quel que soit le nombre des moyens insérés entre les termes de la progression par quotient,

$$\div\!\div 1:10:100:1000\ldots,$$

aucun de ces moyens n'est commensurable. Tous les nombres

commensurables peuvent, au contraire, s'introduire, comme moyens, dans la progression par différence,

$$\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots .$$

Par conséquent, dans le système de logarithmes que définissent ces deux progressions, *les nombres commensurables qui ne sont pas entiers, sont tous des logarithmes de nombres incommensurables, et les nombres commensurables qui ne sont pas des puissances de* 10, *ne pouvant pas faire partie de la progression par quotient, devraient être regardés comme n'ayant pas de logarithmes.*

356. Définition des logarithmes des nombres qui ne peuvent pas faire partie de la progression par quotient. — Quand un nombre ne peut pas être introduit dans la progression par quotient, son logarithme, qui ne peut être commensurable (355), se définit de la manière suivante :

Le logarithme d'un nombre N, *qui ne peut pas faire partie de la progression par quotient, est plus grand que les nombres commensurables qui sont les logarithmes de nombres inférieurs à* N, *et plus petit que les nombres commensurables qui sont les logarithmes de nombres supérieurs à* N.

Par exemple, dans le système défini par les progressions du nº 355, le nombre 37 ne peut pas faire partie de la progression par quotient. Pour définir son logarithme, concevons que l'on insère entre 10 et 100 un nombre considérable de moyens par quotient, et entre 1 et 2 le même nombre de moyens par différence; on trouvera, dans la progression par quotient, deux termes consécutifs qui comprendront 37, et dont les logarithmes commensurables, très-peu différents l'un de l'autre, comprendront, par définition, le logarithme de 37. La valeur de ce logarithme sera, d'ailleurs, parfaitement déterminée : car elle sera la limite commune, vers laquelle convergeront les logarithmes des deux nombres qui comprennent 37, lorsque le nombre des moyens insérés croîtra indéfiniment.

357. Théorème. — Il résulte de tout ce qui précède, que *tout nombre, plus grand que 1, a un logarithme.*

§ II. Généralités sur les nombres incommensurables.

358. DÉFINITION GÉNÉRALE DES NOMBRES INCOMMENSURABLES. — Nous venons (356) de définir le logarithme d'un nombre, en disant quels sont les nombres commensurables qui sont plus grands que lui, et quels sont ceux qui sont plus petits que lui. Cette manière est le moyen ordinaire de définition pour les nombres incommensurables. Quelques explications sur ce sujet ne seront pas inutiles.

Il existe des grandeurs qui n'ont pas de commune mesure. On sait, par exemple, que la diagonale d'un carré n'a pas de commune mesure avec son côté; il en est de même de la diagonale d'un cube et de son arête. Dans ce cas, le rapport des deux grandeurs ne peut être représenté par aucun nombre, entier ou fractionnaire : on dit qu'il est incommensurable.

Pour définir un nombre incommensurable, on ne peut qu'indiquer comment la grandeur qu'il exprime peut se former au moyen de l'unité. Veut-on, par exemple, définir $\sqrt{2}$, nombre incommensurable qui représente une *grandeur bien déterminée*, savoir la longueur de la diagonale du carré construit sur un côté égal à l'unité? On dira qu'un nombre est plus grand ou plus petit que $\sqrt{2}$, selon que son carré est plus grand ou plus petit que 2. Et, cela posé, après avoir adopté une certaine unité de longueur, on regardera tous les nombres comme exprimant des longueurs portées sur une même ligne droite, dans le même sens, à partir d'une même origine. Une portion de cette ligne recevra les extrémités des longueurs mesurées par des nombres moindres que $\sqrt{2}$; et une autre portion recevra celles des longueurs mesurées par des nombres plus grands que $\sqrt{2}$. Entre ces deux régions, il ne pourra exister aucun intervalle d'étendue finie; car les nombres de l'une des séries diffèrent, aussi peu qu'on veut, des nombres de l'autre. Il n'y aura donc entre elles qu'un *point de démarcation;* et la distance à laquelle ce point se trouve de l'origine, est, par définition, mesurée par $\sqrt{2}$.

Nous nous sommes bornés à définir la grandeur dont $\sqrt{2}$ est la mesure. Et, en effet, il ne paraît pas possible de définir directement un nombre abstrait. Si l'on réfléchit aux définitions

données, même dans les cas simples des nombres entiers fractionnaires, on verra qu'elles ne sont que l'indication de l'opération à l'aide de laquelle la grandeur, dont ils sont la mesure, dérive de l'unité.

359. ADDITION ET SOUSTRACTION. Ajouter ou soustraire des nombres incommensurables, c'est trouver un nombre exprimant la somme ou la différence des grandeurs que mesurent les nombres proposés.

360. MULTIPLICATION. Si le multiplicateur est commensurable, il n'y a aucun changement à apporter à la définition. Ainsi, multiplier $\sqrt{2}$ par 7, c'est trouver un nombre exprimant une grandeur 7 fois plus grande que celle qu'exprime $\sqrt{2}$. Multiplier $\sqrt{2}$ par $\frac{3}{4}$, c'est trouver un nombre exprimant une grandeur égale aux $\frac{3}{4}$ de celle que mesure $\sqrt{2}$.

Mais si le multiplicateur est incommensurable, il faut une définition nouvelle. Nous appellerons produit d'un nombre A par un nombre incommensurable B, un nombre moindre que le produit de A par un nombre commensurable quelconque supérieur à B, et plus grand que le produit de A par un nombre commensurable quelconque moindre que B.

361. DIVISION. Diviser un nombre A par un nombre B, c'est trouver un troisième nombre qui, multiplié par le diviseur B, reproduise le dividende A. Cette définition s'applique, quels que soient les nombres A et B, commensurables ou incommensurables.

362. RACINES. La racine m^{me} d'un nombre incommensurable est un nombre qui, pris m fois comme facteur, donne un produit égal au nombre proposé.

On voit que la seule opération qui exige une définition véritablement nouvelle, est celle de la multiplication; toutes les autres se rattachent à celle-là.

363. THÉORÈME. *On peut toujours trouver deux nombres commensurables, ayant une différence aussi petite qu'on le voudra, et qui comprennent entre eux un nombre incommensurable donné.*

En effet, soit n un nombre entier quelconque; si l'on considère la suite :

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \frac{4}{n},\ \frac{5}{n},\ldots,$$

on voit que ses termes augmentent sans limite; comme ils commencent à zéro, le nombre incommensurable donné, quel qu'il soit, est nécessairement compris entre deux d'entre eux, $\frac{x}{n}$ et $\frac{x+1}{n}$. Et l'on peut prendre n assez grand pour que leur différence, qui est $\frac{1}{n}$, soit aussi petite que l'on voudra.

364. Extension des théorèmes démontrés pour les nombres commensurables, au cas des nombres incommensurables. Le théorème précédent permet évidemment d'étendre aux nombres incommensurables les théorèmes suivants, qui ont été démontrés pour les nombres commensurables.

1° *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs.*

2° *Pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, on peut le multiplier successivement par ces divers facteurs.*

3° *Pour multiplier un produit par un nombre, il suffit de multiplier un de ses facteurs par ce nombre.*

4° *Pour multiplier un produit par un autre, il suffit de former un produit unique avec les facteurs du multiplicande et ceux du multiplicateur.*

5° *Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter les exposants.*

§ III. Propriétés des logarithmes.

365. Théorème I. *Le logarithme d'un produit de deux facteurs est la somme des logarithmes des facteurs.*

Soient les deux progressions :

$$\left.\begin{array}{l} \div\!\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots : q^m \ldots\ldots : q^n \ldots\ldots, \\ \div\ 0\ .\ r\ .\ 2r\ .\ 3r\ \ldots\ldots\ .\ mr \ldots\ldots : nr \ldots\ldots, \end{array}\right\} \quad [1]$$

qui définissent un système de logarithmes. Les termes de la pre-

mière sont les puissances successives de la raison q; ceux de la seconde sont les multiples consécutifs de la raison r.

Si l'on multiplie l'un par l'autre deux termes de la progression par quotient, q^m et q^n, on aura un produit q^{m+n} qui, évidemment, est le $(m+n+1)^{me}$ terme de la même progression; si l'on ajoute les logarithmes de q^m et q^n, qui sont mr et nr, on aura une somme $(m+n)r$, qui est évidemment le $(m+n+1)^{me}$ terme de la progression par différence, et, par conséquent, le logarithme de q^{m+n}; la proposition est donc démontrée.

366. Généralisation. La démonstration précédente suppose que les nombres considérés font partie de la même progression par quotient. Elle est en défaut pour les logarithmes incommensurables définis (356). Pour démontrer que, dans ce cas, la proposition est encore exacte, remarquons que, si l'on donne deux nombres quelconques N et N′, on peut toujours insérer dans les progressions assez de moyens, pour que les termes croissent par degrés insensibles, et que, par conséquent, il s'y trouve deux termes N_1 et N'_1, qui diffèrent, aussi peu qu'on le voudra, de N et de N′. Or on aura (365) :

$$\log (N_1 \times N'_1) = \log N_1 + \log N'_1.$$

Le premier membre diffère, aussi peu que l'on veut, de $\log (N \times N')$, et le second, aussi peu que l'on veut, de $\log N + \log N'$; il est donc impossible, que $\log (N \times N')$ et $\log N + \log N'$ aient une différence déterminée quelconque; par conséquent, ces deux quantités sont égales. C'est ce qu'il fallait démontrer.

367. Extension au cas de plus de deux facteurs. *Le théorème précédent s'étend à un nombre quelconque de facteurs.* Soit, par exemple, un produit de quatre facteurs $abcd$; on a évidemment :

$$[1] \quad \log (abcd) = \log (abc \times d) = \log (abc) + \log d$$
$$= \log (ab) + \log c + \log d = \log a + \log b + \log c + \log d.$$

368. Théorème II. *Le logarithme d'une puissance entière et positive d'un nombre est le produit du logarithme du nombre par l'exposant de la puissance.*

Ce théorème est une conséquence du précédent. Soit, en effet, a^4 la puissance considérée; on a :

$$\log a^4 = \log(a\times a\times a\times a)$$
$$= \log a + \log a + \log a + \log a = 4\log a.$$

La démonstration s'applique évidemment, quel que soit l'exposant entier et positif.

Ainsi, $$\log a^m = m\log a. \qquad [2]$$

369. Théorème III. *Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende, moins celui du diviseur.*

Soient un quotient $\frac{a}{b}$, que je désignerai par q; on aura :

$$a = b\times q;$$

donc : $$\log a = \log b + \log q;$$

d'où : $$\log q = \log a - \log b, \quad \text{ou} \quad \log\frac{a}{b} = \log a - \log b. \qquad [3]$$

Remarque. On suppose, dans le théorème précédent, que le quotient $\frac{a}{b}$ est plus grand que 1; car les logarithmes des nombres plus grands que 1 ont seuls été définis jusqu'à présent.

370. Théorème IV. *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme du nombre divisé par l'indice de la racine.*

Soit la racine $\sqrt[m]{a}$, que je désigne par r; on a, par définition :

$$a = r^m,$$

d'où l'on conclut (368) :

$$\log a = m\log r;$$

et, par suite,

$$\log r = \frac{\log a}{m}, \quad \text{ou} \quad \log\sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}. \qquad [4]$$

371. Remarque. Les quatre théorèmes précédents montrent, qu'une *multiplication* de plusieurs facteurs peut être remplacée par l'*addition* de leurs logarithmes; une *division*, par la *soustraction* de deux logarithmes; une *formation de puissance*, par la *multiplication* du logarithme du nombre par l'exposant; et enfin, une *extraction de racine*, par la *division* du logarithme du nombre par l'indice de la racine.

Mais il faut, pour profiter de ces simplifications, avoir une table de logarithmes, et savoir y trouver le logarithme d'un

nombre donné, et le nombre correspondant à un logarithme donné.

§ IV. Construction et disposition des tables de logarithmes.

372. LOGARITHMES VULGAIRES. Dans les calculs numériques, on emploie exclusivement le système de logarithmes défini par les deux progressions :

$$\because\!\because\ .\ : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots.$$
$$\div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ \ldots..$$

Dans ce système, *une puissance de* 10 *a pour logarithme son exposant*. Car, le logarithme de 10 étant 1, on a :

$$\log 10^m = m \log 10 = m.$$

Les logarithmes de tous les autres nombres, entiers ou fractionnaires, sont incommensurables (355).

373. CARACTÉRISTIQUE. On nomme *caractéristique* du logarithme d'un nombre la partie entière de ce logarithme. Les nombres compris entre 1 et 10, c'est-à-dire ayant une partie entière composée d'un seul chiffre, ont pour logarithmes des nombres compris entre 0 et 1; la caractéristique est zéro. Les nombres compris entre 10 et 100, c'est-à-dire ayant une partie entière composée de deux chiffres, ont des logarithmes compris entre 1 et 2 ; la caractéristique est 1. En général, les nombres compris entre 10^{n-1} et 10^n ont une partie entière composée de n chiffres; et leurs logarithmes, étant compris entre $(n-1)$ et n, ont pour caractéristique $(n-1)$.

Donc *la caractéristique du logarithme d'un nombre contient autant d'unités qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre, moins un.*

374. THÉORÈME. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise un nombre par une puissance de* 10, *la partie décimale de son logarithme n'est pas altérée; mais la caractéristique est augmentée ou diminuée d'autant d'unités qu'il y en a dans l'exposant de la puissance.*

En effet, on a (365 et 368) :

$$\log (a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n;$$

et (369) : $$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

375. Construction des tables. On ne calcule et on n'inscrit dans les tables que les logarithmes des nombres entiers. Comme tous ces logarithmes sont incommensurables (355), on ne peut les calculer qu'avec une certaine approximation ; on se contente, en général, des sept ou huit premières décimales.

La définition, que nous avons donnée (350), conduit à la valeur approchée du logarithme d'un nombre. Car, si l'on insère dans les progressions un nombre considérable de moyens, il y aura deux termes consécutifs de la progression par quotient, qui comprendront le nombre donné, et dont les logarithmes seront des valeurs approchées de son logarithme.

Mais ce procédé serait fort long et très-pénible ; et nous allons montrer, par un exemple, combien il exigerait d'opérations. On donne, d'ailleurs, dans la seconde partie de l'algèbre, pour le calcul des logarithmes, des méthodes beaucoup plus rapides.

Exemple. *On demande le logarithme de* 1855.

Comme 1855 est compris entre 1000 et 10000, son logarithme est compris entre 3 et 4. Si l'on insère un moyen entre 1000 et 10000 dans la progression par quotient, et un moyen entre 3 et 4 dans la progression par différence, on trouve

$$a=\sqrt{1000\times 10000}=3162,27766$$

pour valeur du premier, et 3,5 pour valeur du second. Ainsi

$$3,5=\log a=\log 3162,27766.$$

Comme 1855 est compris entre 1000 et a, son logarithme est compris entre 3 et 3,5. Si l'on insère un moyen entre 1000 et a dans la progression par quotient, et un moyen entre 3 et 3,5 dans la progression par différence, on trouve, pour le premier,

$$b=\sqrt{1000\,a}=1778,2794,$$

et pour le second, $\dfrac{3+3,5}{2}$ ou 3,25

Ainsi : $3,25=\log b=\log 1778,2794.$

Comme 1855 est compris entre a et b, son logarithme est compris entre 3,25 et 3,5. Si l'on insère deux nouveaux moyens, on trouve, en désignant le premier par c :

$$3,375=\log\sqrt{ab}=\log\ 2371,3737=\log\ c.$$

De même, comme 1855 est compris entre b et c, son logarithme est compris entre 3,25 et 3,375. Une nouvelle opération donne :

$$3,3125=\log\sqrt{bc}=\log 2053,5250=\log d.$$

En continuant ainsi les calculs, on forme le tableau suivant :

$$
\begin{array}{rll}
3,5 = \log a & & = \log 3162,\ 27766 \\
3,25 = \log \sqrt{1000a} & = \log b & = \log 1778,\ 2794 \\
3,375 = \log \sqrt{ab} & = \log c & = \log 2371,\ 3737 \\
3,3125 = \log \sqrt{bc} & = \log d & = \log 2053,\ 5250 \\
3,28125 = \log \sqrt{bd} & = \log e & = \log 1910,\ 95294 \\
3,265625 = \log \sqrt{be} & = \log f & = \log 1843,\ 42296 \\
3,2734375 = \log \sqrt{ef} & = \log g & = \log 1876,\ 8843 \\
3,26953125 = \log \sqrt{fg} & = \log h & = \log 1860,\ 0784 \\
3,26757812 = \log \sqrt{fh} & = \log i & = \log 1851,\ 7321 \\
3,26855469 = \log \sqrt{hi} & = \log k & = \log 1855,\ 9005 \\
3,26806641 = \log \sqrt{ik} & = \log l & = \log 1853,\ 8151 \\
3,26831055 = \log \sqrt{kl} & = \log m & = \log 1854,\ 8575 \\
3,26843262 = \log \sqrt{km} & = \log n & = \log 1855,\ 3789.
\end{array}
$$

En comparant d'une part n et m, et de l'autre k et m, on a :

$$
\begin{array}{lrlr}
 & n = 1855,3789 & & k = 1855,9005 \\
 & m = \underline{1854,8575} & & m = \underline{1854,8575} \\
\text{d'où :} & n - m = \quad 0,5214, & & k - m = \quad 1,0430;
\end{array}
$$

et l'on voit que $(n - m)$ est à peu près la moitié de $(k - m)$.

En comparant, en même temps, d'une part, $\log n$ et $\log m$, de l'autre, $\log k$ et $\log m$, on a :

$$
\begin{array}{lrr}
 & \log n = 3,26843262 & \log k = 3,26855469 \\
 & \log m = \underline{3,26831055} & \log m = \underline{3,26831055} \\
\text{d'où} & \log n - \log m = 0,00012207, & \log k - \log m = 0,00024414;
\end{array}
$$

et l'on voit que $(\log n - \log m)$ est la moitié de $(\log k - \log m)$. Ainsi, les différences entre les nombres sont entre elles comme les différences entre leurs logarithmes. Si l'on admet que, pour des nombres aussi rapprochés, cette proportion soit exacte, on en conclura immédiatement le logarithme de 1855. On dira, en effet : si pour une différence entre n et m, égale à 0,5214, il y a, entre leurs logarithmes, une différence égale à 12207 unités du huitième ordre, quelle sera, pour une différence de 0,1425 entre 1855 et 1854, 8575, la différence x des logarithmes? et l'on trouvera :

$$x = \frac{12207 \times 1425}{5214} = 3336 \text{ unités du } 8^e \text{ ordre.}$$

En ajoutant ce nombre au logarithme de m, on a :

$$\log 1855 = 3,26834391.$$

376. Disposition des tables de logarithmes de Callet. La première table est toute simple ; elle contient les nombres entiers

depuis 1 jusqu'à 1200, disposés suivant leur ordre, en plusieurs colonnes, au haut desquelles on voit la lettre N, initiale du mot *nombre;* à côté et à droite de ces colonnes, on en remarque d'autres, au haut desquelles est écrit Log., initiales du mot *logarithme;* de manière que chaque colonne de nombres est immédiatement suivie d'une colonne de logarithmes, et que chaque logarithme est placé à droite et dans l'alignement du nombre auquel il appartient. On n'a pas mis de caractéristique aux logarithmes, parce qu'on la connaît aisément à la seule inspection du nombre (373). Chaque logarithme est donné avec huit décimales.

Cette table est nommée *Chiliade* I, parce qu'en effet elle contient les logarithmes du premier mille. (*Chiliade* est un mot grec francisé, qui signifie assemblage de mille unités.)

Les tables suivantes sont un peu plus composées : elles s'étendent depuis 1020 jusqu'à 108000. La première colonne, qu'on y remarque vers la gauche, et qui est intitulée N, contient les nombres entiers depuis 1020 jusqu'à 10800. La colonne suivante, marquée 0, offre les parties décimales des logarithmes qui appartiennent à ces nombres ; en sorte que l'assemblage de ces deux colonnes forme la suite de la table première et donne sur-le-champ les logarithmes des nombres depuis 1020 jusqu'à 10800. Chacun de ces logarithmes n'a que sept décimales.

Si l'on observe la colonne intitulée N, on remarque que les nombres qui la composent ne sont pas tous écrits en totalité ; les deux derniers chiffres à droite de chacun d'eux sont seuls inscrits à leur rang ; quant aux autres, on ne les voit indiqués qu'une fois sur cinq. Mais il est facile de les rétablir, à la lecture.

Si l'on observe la colonne marquée 0, on voit, vers la gauche de cette colonne, certains nombres isolés, de trois chiffres chacun, qui vont toujours en augmentant d'une unité, et qui ne sont pas à des distances tout à fait égales les uns des autres. Vers la droite de la même colonne sont des nombres, de quatre chiffres chacun, qui ne laissent point d'intervalle entre eux ; en sorte qu'on pourrait croire que certains logarithmes n'ont que quatre chiffres, tandis que d'autres en ont sept.

Mais qu'on ne s'y trompe pas ; chaque nombre isolé est censé écrit au-dessous de lui-même, et vis-à-vis chacun des nombres de quatre chiffres qui sont dans la même colonne, autant de fois

qu'il est nécessaire pour que chaque ligne soit remplie : lors donc qu'on ne trouve, vis-à-vis un certain nombre, que quatre chiffres dans la colonne marquée 0, il faut écrire, vers la gauche de ces quatre chiffres, le nombre isolé de trois chiffres le plus prochain en montant. Au delà de 10000, les nombres isolés ont quatre figures, et les logarithmes ont huit décimales.

Lorsque deux nombres sont décuples l'un de l'autre, leurs logarithmes ont pour différence le logarithme de 10 qui est 1, et, par conséquent, leur partie décimale est la même (374). Ainsi l'assemblage des deux premières colonnes, dont nous venons de parler, donne aussi, de dix en dix, les logarithmes des nombres compris entre 10200 et 108000. Pour trouver les logarithmes des nombres intermédiaires, il faut avoir recours aux colonnes marquées 1, 2, 3, 4, etc. Ces colonnes contiennent les quatre dernières décimales des logarithmes des nombres terminés par les chiffres qui sont en tête de ces colonnes. Ainsi la colonne marquée 0 contient les quatre dernières décimales des logarithmes des nombres, compris entre 10200 et 108000, qui sont terminées par un zéro, et en outre les nombres isolés dont nous avons parlé, et qui sont aussi censés placés à la gauche des chiffres que contiennent les autres colonnes. La colonne marquée 1 contient les quatre derniers chiffres des logarithmes de tous les nombres terminés par 1 ; la colonne marquée 2, ceux des logarithmes de tous les nombres terminés par 2 ; la colonne marquée 3, ceux des logarithmes de tous les nombres terminés par 3 ; et ainsi de suite jusqu'à 9. On a, par ce moyen, une table à double entrée, dans laquelle on consulte d'abord la première colonne, marquée N ; et, lorsqu'on y a trouvé les quatre premiers chiffres du nombre dont on veut avoir le logarithme, on suit de l'œil la ligne sur laquelle ils se trouvent, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la colonne au haut de laquelle se trouve le cinquième chiffre du nombre donné ; alors on a sous les yeux les quatre derniers chiffres décimaux du logarithme cherché. Quant aux trois premiers, ils sont exprimés par le nombre isolé qui se trouve, dans la seconde colonne, le plus prochain en montant.

La dernière colonne contient les différences des logarithmes de deux nombres consécutifs de cinq chiffres et les parties de ces différences, c'est-à-dire les produits de ces mêmes différences multipliées par $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc., jusqu'à $\frac{9}{10}$. Ces produits for-

ment autant de petites tables qu'il y a de différences. Chacune de ces petites tables se trouve placée immédiatement au-dessous de la différence dont elle indique les parties. Elle est divisée en deux colonnes par une ligne verticale : à gauche sont les nombres de dixièmes depuis 1 jusqu'à 9 ; à droite et en regard sont les parties correspondantes. On verra plus loin quel est l'usage de ces tables.

Mais comme, vers le commencement des tables, ces différences se trouvent trop nombreuses, et, par conséquent, trop près les unes des autres, elles n'auraient pas permis, si elles n'eussent occupé qu'une colonne, de placer les petites tables des parties proportionnelles dans l'intervalle qui se serait trouvé entre elles. C'est pourquoi on les a disposées d'abord sur deux colonnes : la première de ces différences occupe la première colonne ; les deux suivantes, sans sortir de la ligne horizontale où elles doivent être placées, sont repoussées à droite, et occupent la seconde colonne ; les deux différences qui suivent se trouvent sur la première colonne, et les deux suivantes sur la seconde ; ainsi de suite. Dans les quatre premières pages on n'a placé les tables des parties de ces différences que de deux en deux.

Pour rendre ces explications plus claires, nous reproduisons ici l'une des pages de la table de Callet.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	DIFF.
7680	885.3612	3669	3725	3782	3838	3895	3951	4008	4065	4121	57
81	4178	4234	4291	4347	4404	4460	4517	4573	4630	4686	1 | 6
82	4743	4800	4856	4913	4969	5026	5082	5139	5195	5252	2 | 11
83	5308	5365	5421	5478	5534	5591	5647	5704	5761	5817	3 | 17
84	5874	5930	5987	6043	6100	6156	6213	6269	6326	6382	4 | 23
7685	6439	6495	6552	6608	6665	6721	6778	6834	6891	6947	5 | 29
86	7004	7060	7117	7173	7230	7286	7343	7399	7456	7512	6 | 34
87	7569	7625	7682	7738	7795	7851	7908	7964	8021	8077	7 | 40
88	8134	8190	8247	8303	8360	8416	8473	8529	8586	8642	8 | 46
89	8699	8755	8812	9868	8925	8981	9037	9094	9150	9207	9 | 51
7690	9263	9320	9376	9433	9489	9546	9602	9659	9715	9772	
91	9828	9885	9941	9998							
	886.				0054	0110	0167	0223	0280	0336	
92	0393	0449	0506	0562	0619	0675	0732	0788	0844	0901	
93	0957	1014	1070	1127	1183	1240	1296	1352	1409	1465	
94	1522	1578	1635	1691	1748	1804	1860	1917	1973	2030	
7695	2086	2143	2199	2256	2312	2368	2425	2481	2538	2594	
96	2651	2707	2763	2820	2876	2933	2989	3046	3102	3158	
97	3215	3271	3328	3384	3441	3497	3553	3610	3666	3723	
98	3779	3835	3892	3948	4005	4061	4118	4174	4230	4287	
99	4343	4400	4456	4512	4569	4625	4682	4738	4794	4851	
7700	4907	4964	5020	5076	5133	5189	5246	5302	5358	5415	
01	5471	5528	2584	5640	5697	5753	5810	5866	5922	5979	
02	6035	6092	6148	6204	6261	6317	6373	6430	6486	6543	
03	6599	6655	6712	6768	6824	6881	6937	6994	7050	7106	
04	7163	7219	7275	7332	7388	7445	7501	7557	7614	7670	
7705	7726	7783	7839	7896	7952	8008	8065	8121	8177	8234	
06	8290	8346	8403	8459	8515	8572	8628	8685	8741	8797	
07	8854	8910	8966	9023	9079	9135	9192	9248	9304	9361	
08	9417	9473	9530	9586	9642	9699	9755	9811	9868	9924	
09	9980										
	887.	0037	0093	0149	0206	0262	0318	0375	0431	0487	
7710	0544	0600	0656	0713	0769	0825	0882	0938	0994	1051	
11	1107	1163	1220	1276	1332	1389	1445	1501	1558	1614	
12	1670	1727	1783	1839	1895	1952	2008	2064	2121	2177	
13	2233	2290	2346	2402	2459	2515	2571	2627	2684	2740	
14	2796	2853	2909	2965	3022	3078	3134	3190	3247	3303	
7715	3359	3416	3472	3528	3584	3641	3697	3753	3810	3866	
16	3922	3978	4035	4091	4147	4204	4260	4316	4372	4429	
17	4485	4541	4598	4654	4710	4766	4823	4879	4935	4991	
18	5048	5104	5160	5217	5273	5329	5385	5442	5498	5554	
19	5610	5667	5723	5779	5835	5892	5948	6004	6060	6117	
7720	6173	6229	6286	6342	6398	6454	6511	6567	6623	6679	
21	6736	6792	6848	6904	6961	7017	7073	7129	7185	7242	
22	7298	7354	7410	7467	7523	7579	7635	7692	7748	7804	
23	7860	7917	7973	8029	8085	8142	8198	8254	8310	8366	
24	8423	8479	8535	8591	8648	8704	8760	8816	8872	8929	
7725	8985	9041	9097	9154	9210	9266	9322	9378	9435	9491	
26	9547	9603	9659	9716	9772	9828	9884	9941	9997		
	888									0053	
27	0109	0165	0222	0278	0334	0390	0446	0503	0559	0615	
28	0671	0727	0784	0840	0896	0952	1008	1064	1121	1177	
29	1233	1289	1345	1402	1458	1514	1570	1626	1683	1739	
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

On voit dans la table, à gauche de la colonne N, deux autres colonnes, que nous n'avons pas reproduites, parce qu'elles n'ont aucun rapport avec la théorie des logarithmes.

§ V. Usage des tables de logarithmes.

377. Problème I. *Un nombre quelconque étant donné, trouver son logarithme, par le moyen des tables.*

Le nombre donné peut être entier et plus petit que 108000; ou bien, il peut être décimal, ses chiffres formant, abstraction faite de la virgule, un nombre moindre que 108000. On ramène ce second cas au premier; et l'on considère d'abord le nombre comme s'il était entier, sauf à donner ensuite à son logarithme une caractéristique convenable.

1er Cas. Si le nombre donné est moindre que 1200, on le trouvera dans la première chiliade, parmi les nombres naturels qui sont dans les colonnes marquées N. Le nombre qu'on trouvera à sa droite, sur la même ligne, et dans la colonne suivante, intitulée Log., sera la partie décimale de son logarithme; quant à la caractéristique qui convient à ce logarithme, elle est toujours égale à 0, 1, 2 ou 3, selon que le premier chiffre significatif du nombre exprime des unités simples, des dizaines, des centaines ou des mille.

2e Cas. Si le nombre donné est compris entre 1020 et 10800, on le cherchera dans la table qui vient après la chiliade I; et l'ayant trouvé dans la colonne intitulée N, on consultera la colonne suivante, marquée 0. Si l'on y voit sept chiffres de front dans l'alignement du nombre naturel, on aura tout d'un coup la partie décimale du logarithme cherché. Mais, si l'on n'y trouve que quatre figures, elles donneront les quatre derniers chiffres de la même partie décimale; ensuite on remarquera qu'il règne, à leur gauche, une marge ou espace blanc; on suivra cette marge en montant; et le premier nombre de trois chiffres qu'on y rencontrera, exprimera les trois premières figures de la partie décimale du logarithme cherché. Écrivant donc ce nombre vers la gauche des quatre chiffres qu'on a déjà trouvés, on aura un nombre de sept chiffres comme ci-dessus: enfin on y joindra une caractéristique convenable. Par exemple, à côté de

7680, je trouve 8853612 sur la même ligne et dans la colonne marquée 0; j'ai donc, tout d'un coup, la partie décimale du logarithme que je cherche; il ne me reste plus qu'à y joindre la caractéristique 3. Si le nombre était 7,680, la caractéristique serait zéro; elle serait 1, si le nombre était 76,80; 2, s'il était 768,0. A côté de 7695, dans la colonne marquée 0, je ne trouve que 2086; mais, en suivant la marge, le premier nombre que je rencontre, en montant, est 886; mon logarithme est donc 3,8862086. Si le nombre avait cinq figures, et qu'il fût moindre que 108000, on trouverait de même son logarithme.

3ᵉ Cas. Si le nombre est compris entre 10800 et 108000, il a le plus ordinairement cinq chiffres significatifs; on fera, pour un instant, abstraction du dernier, et l'on cherchera, comme ci-dessus, le nombre qu'expriment les quatre premiers. On suivra de l'œil la ligne sur laquelle on l'aura trouvé, en la parcourant de gauche à droite, jusqu'à ce qu'on soit dans la colonne, en haut de laquelle est écrit le cinquième chiffre dont on a fait abstraction. Les quatre figures qui sont, tout à la fois, dans l'alignement des quatre premiers chiffres du nombre donné, et dans la colonne qui répond au cinquième, exprimeront les quatre dernières décimales du logarithme de ce nombre. Quant aux trois premières, on les trouvera, comme ci-dessus, en remontant le long de la marge de la colonne intitulée 0. Soit, par exemple, 772,37 dont on veut le logarithme; je cherche 7723 dans la colonne N, je ne vois rien dans son alignement à la marge de la colonne 0; mais un peu plus haut, je rencontre 887 dans cette marge, je parcours la ligne du nombre 7723, et je m'arrête à la colonne marquée 7, sur laquelle (dans l'alignement de 7723) je trouve 8254. La partie décimale de mon logarithme est donc 0,8878254; et ce logarithme est 2,8878254. Si le nombre était compris entre 100000 et 108000 on trouverait de même son logarithme.

378. Cas où le nombre donné n'est pas dans la table. Les explications très-détaillées, qui précèdent, donnent le moyen de trouver le logarithme d'un nombre entier moindre que 108000, et celui d'un nombre décimal, dont les chiffres, abstraction faite de la virgule, expriment un nombre inférieur à cette limite. Pour trouver les logarithmes des nombres plus grands,

on remarque qu'en divisant ces nombres par une puissance convenable de 10, on pourra toujours les réduire à être compris dans les limites de la table. Or, une pareille division diminue un logarithme d'un nombre entier d'unités (374), et ne change pas, par conséquent, sa partie décimale. Le problème se réduit donc à trouver le logarithme d'un nombre qui n'est pas entier et qui est inférieur à 108000.

Pour cela, *on admet que, dans des limites peu éloignées, l'accroissement des logarithmes est proportionnel à celui des nombres.*

Soit, par exemple, un nombre 76807,753; on dira:

le logaritme de 76807 est 4,8854008;

celui de 76808 est 4,8854065;

leur différence, indiquée dans la table, est 57 (unités décimales du septième ordre); par conséquent, lorsque le nombre augmente d'une unité, son logarithme augmente de 57; si donc le nombre augmente seulement de 0,753, son logarithme augmentera d'une quantité x, déterminée par la proportion

$$\frac{1}{0{,}753}=\frac{57}{x};$$

d'où

$$x=57\times 0{,}753.$$

Ainsi, *pour avoir* x, *on multiplie la différence tabulaire par la partie décimale du nombre donné.*

Dans la multiplication de 57 par 0,753, il ne faudra prendre que la partie entière du produit; car la partie décimale exprimerait au plus des dixièmes d'unités du septième ordre, c'est-à-dire des unités du huitième ordre, que l'on néglige dans la valeur des logarithmes.

Pour multiplier 57 par 0,753, on le multipliera successivement par 7, 5 et 3; ces produits se trouvent tout calculés dans le tableau placé au-dessous de 57, dernière colonne à droite de la table. Ils sont réduits aux chiffres que l'on doit conserver, en supposant que le multiplicateur exprime des dixièmes. Ainsi vis-à-vis de 7, on trouve 40, au lieu de 39,9 qui serait le produit exact; vis-à-vis de 5, on trouve 29 au lieu de 28,5; vis-à-vis de 3, on trouve 17 au lieu de 17,1. Dans le cas actuel, 5 exprimant des centièmes, le produit correspondant sera 2,9, auquel on substituera 3: 3 exprimant des millièmes, le produit corres-

pondant devra être divisé par 100; il exprimera alors 0,17, et on le négligera.

La valeur de x sera, d'après cela, 43; et, pour avoir le logarithme demandé, il faudra ajouter au logarithme de 76807, 43 unités du septième ordre; ce qui fera 4,8854051.

Si l'on voulait le logarithme de 76807753, il serait évidemment 7,8854051. En général, pourvu que l'on conserve les mêmes chiffres, dans le même ordre, à quelque place que l'on mette la virgule, la partie décimale du logarithme reste la même.

Remarque. On dispose les calculs de la manière suivante:

Nombre.	Logarithme.	
76807.........	8854008	
7........	40	
5.......	2	9
3......		17

Log 76807,753 = 4,8854051

Dans l'addition, on n'écrit pas les sommes partielles provenant des chiffres situés à droite de la ligne verticale; on ne conserve que les retenues qu'elles peuvent donner pour le septième ordre.

379. Problème II. *Un logarithme étant donné, trouver, par le moyen des tables, le nombre auquel il appartient.*

1er Cas. Si le logarithme, abstraction faite de la caractéristique, se trouve parmi ceux de la première chiliade, on aura sur-le-champ le nombre qui lui correspond; ce nombre sera dans la colonne marquée N, qui précède immédiatement celle qui contient le logarithme donné, et dans l'alignement de ce logarithme. Après l'avoir écrit, on placera la virgule, de manière que le nombre ait un chiffre entier de plus qu'il n'y a d'unités à la caractéristique (**373**).

Exemples: 2,17026172 = log 148;
0,06781451 = log 1,169.

2e Cas. Si le logarithme ne se trouve pas dans la première table, on cherchera les trois premières décimales de ce logarithme parmi les nombres isolés que l'on voit dans la colonne, marquée 0, de la seconde table; et les ayant trouvées, on cher-

chera les quatre dernières figures du logarithme parmi les nombres de quatre chiffres, qui sont dans cette même colonne, en descendant. Si l'on trouve ces quatre dernières figures, on verra le nombre cherché dans la colonne marquée N, et sur leur alignement. On écrira ce nombre, et l'on donnera à la virgule la place que lui assigne la caractéristique du logarithme.

EXEMPLES : $4,8872796 = \log 77140,$
$2,8863779 = \log 769,8.$

3e CAS. Si l'on ne trouve pas, dans la colonne marquée 0, les quatre dernières figures du logarithme donné, on s'arrêtera à celles qui en approchent le plus *en moins;* on suivra la ligne sur laquelle on se sera arrêté, en la parcourant de gauche à droite; et, si l'on trouve dans cette ligne les quatre dernières figures du logarithme donné, on suivra, en montant ou en descendant, la colonne dans laquelle on les aura trouvées; le chiffre qu'on verra à la tête et au pied de cette colonne, sera la cinquième figure du nombre cherché, dont les quatre premières se trouveront, comme ci-dessus, dans la colonne marquée N.

Veut-on savoir, par exemple, à quel nombre appartient le logarithme qui a, pour partie décimale, 8871276? je cherche 887 parmi les nombres isolés de la colonne marquée 0; je parcours, en descendant, la même colonne, et je trouve que 1107 approche le plus *en moins* de 1276; je suis la ligne qui commence par 1107, et je trouve 1276 sur cette ligne; je monte dans la colonne qui contient 1276, je trouve le chiffre 3 à la tête de cette colonne; je viens à 1276, et je vois que la ligne, où il se trouve, répond au nombre 7711; j'écris ce nombre, et à sa droite le chiffre 3 que j'ai déjà trouvé : ce qui me donne 77113. C'est le nombre qu'il fallait trouver. Je place ensuite convenablement la virgule, d'après la valeur de la caractéristique.

EXEMPLES : $4,8871276 = \log 77113;$
$2,8871276 = \log 771,13.$

4e CAS. Si le logarithme donné ne se trouve dans aucun des cas précédents, pour avoir le nombre auquel il appartient, on cherchera, comme ci-dessus (3e Cas), le logarithme qui en approche le plus *en moins*. On cherchera le nombre entier correspondant; ce nombre et le suivant comprendront le nombre

demandé, et l'on cherchera la différence avec un de ces nombres entiers, à l'aide de la proportion admise (378).

Exemple. Soit à chercher le nombre dont le logarithme a, pour partie décimale, 8870282. On trouvera, comme il a été dit, que ce logarithme est compris entre 8870262 et 8870318, qui correspondent aux nombres 77095 et 77096; la différence de ces deux logarithmes, indiquée dans la table, est 57 unités du dernier ordre; et le logarithme donné surpasse le plus petit des deux de 20 unités du même ordre. On dira donc: à une différence 57 entre les logarithmes correspond une différence 1 entre les nombres; donc, à une différence 20 entre les logarithmes doit correspondre, entre les nombres, une différence x déterminée par la proportion

$$\frac{57}{20}=\frac{1}{x};$$

d'où l'on conclut, $x=\frac{20}{57}$; et, par suite, le nombre cherché est

$77095+\frac{20}{57}$, ou, en réduisant en décimales, 77095,35.

Ainsi, *pour avoir* x, *il faut diviser la différence entre le logarithme donné et le plus petit de ceux qui le comprennent par la différence tabulaire.*

Remarque I. Si l'on retranche l'un de l'autre les deux logarithmes consécutifs 8870262 et 8870318, on trouve pour différence 56 et non 57. On peut adopter néanmoins la différence 57 donnée par Callet, qui, à cause des chiffres décimaux non écrits dans la table, est peut-être aussi près de la véritable que 56.

Remarque II. On peut, à l'aide de la petite table des parties proportionnelles, effectuer la réduction de x en décimales. On y cherche, dans la colonne de droite, le nombre qui approche le plus de 20 *en moins;* on trouve 17, qui correspond à 3; 3 est le chiffre des dixièmes du nombre cherché. Comme il reste encore (de 17 à 20) 3 unités du septième ordre, on les convertit en 30 unités du huitième ordre; on cherche de nouveau, dans la colonne de droite, le nombre qui approche le plus de 30, et le chiffre 5, qui est à gauche de 29, est le chiffre des centièmes.

REMARQUE III. On dispose le calcul de la manière suivante :

Logarithme.	Nombre.
8870282	
8870262..........	77095
20..........	35

$$4{,}8870282 = \log 77095{,}35.$$

Si l'on voulait le nombre qui a pour logarithme 5,8870282, il serait évidemment 770953,5. En général, après avoir trouvé, comme ci-dessus, les sept chiffres consécutifs du nombre demandé, en faisant abstraction de la caractéristique du logarithme, on place la virgule, de manière à séparer, sur la gauche, un nombre de chiffres supérieur d'une unité à cette caractéristique.

380. REMARQUE IV. Nous ne pouvons pas indiquer ici la limite de l'erreur que l'on peut commettre, én supposant l'accroissement des logarithmes proportionnel à celui des nombres. Nous ferons observer seulement, que l'inspection des tables montre que cette proportionnalité est à peu près exacte dans des limites assez écartées. La différence de deux logarithmes consécutifs varie, en effet, très-lentement; et, au degré d'approximation que donnent les tables, elle reste souvent constante pendant plusieurs pages; il en résulte évidemment que, pour les nombres entiers compris dans ces pages, l'accroissement des logarithmes est proportionnel à celui des nombres.

Lorsque l'on emploie cette proportion pour compléter le logarithme d'un nombre (**378**), l'erreur ne porte que sur les unités décimales d'un ordre inférieur au septième. Lorsqu'on l'applique à la recherche du nombre correspondant à un logarithme donné (**379**), elle ne peut fournir, au degré d'approximation des tables, que deux chiffres au plus, en sus des cinq chiffres que donne la lecture directe.

§ VI. Application de la théorie des logarithmes.

381. MOYEN D'EFFECTUER LA MULTIPLICATION, LA DIVISION, ETC. Lorsqu'un nombre inconnu résulte de multiplications, divisions, élévations aux puissances ou extractions de racines, effec-

tuées sur des nombres donnés, pour déterminer sa valeur, on cherche celle de son logarithme, qui résulte d'opérations beaucoup plus simples. Le logarithme étant connu, on détermine le nombre correspondant, comme il a été dit (379).

Exemple. Calculer l'expression :

$$x=\frac{\sqrt[7]{36926,5^3}\times\sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{6258,96^2}}.$$

On a, d'après les principes (365) et suiv. :

$$\log x=\frac{3}{7}\log 36926,5+\frac{1}{5}\log 2629-\frac{2}{3}\log 6258,96.$$

On cherche les trois logarithmes dans les tables, et on effectue le calcul :

1°

$$\begin{array}{rll}
36926 & \ldots\ldots 5673323 & \\
5 & \ldots\ldots\quad 59 & \\
\log 36926,5 = & 4,5673382 & \\
3\log 36926,5 = & 13,7020146 & \\
\frac{3}{7}\log 36926,5 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1,9574307
\end{array}$$

2°

$$\begin{array}{rll}
\log 2629 = & 3,4197906 & \\
\frac{1}{5}\log 2629 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0,6839581
\end{array}$$

3°

$$\begin{array}{rll}
62589 & \ldots\ldots 7964980 & \\
6 & \ldots\ldots\quad 42 & \\
\log 6258,96 = & 3,7965022 & \\
2\log 6258,96 = & 7,5930044 & \\
\frac{2}{3}\log 6258,96 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2,5310015 \\
\hline
\log x = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0,1103873
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
1103873 & \\
1103540 & 12893 \\
\hline
333 & 99
\end{array}$$

Donc : $x=1,289399.$

382. Cas où quelques uns des nombres donnés sont plus petits que l'unité. D'après nos définitions, les nombres plus grands que l'unité ont seuls des logarithmes. Il est donc essentiel que les nombres, sur lesquels on opère, remplissent tous cette condition. Or on pourra toujours faire en sorte que cela ait lieu ; car, si l'on a à multiplier un nombre par un nombre a inférieur à l'unité, on pourra le diviser par le nombre $\frac{1}{a}$, qui

est plus grand que 1; et, si l'on a à le diviser par a, on pourra le multiplier, au contraire, par $\frac{1}{a}$.

EXEMPLE. Calculer l'expression :

$$x = \left(\sqrt[3]{13572 \times \frac{1}{11}}\right)^2.$$

On écrit :
$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{13572}{11}}\right)^2;$$

et l'on a :
$$\log x = \frac{2}{3}(\log 13572 - \log 11).$$

Or on trouve :

$$\begin{array}{r} \log 13572 = 4{,}1326439 \\ \log 11 = \underline{1{,}0413927} \\ \log 13572 - \log 11 = 3{,}0912512 \\ 2\ (\log 13572 - \log 11) = 6{,}1825024 \\ \log x = \frac{2}{3}\ (\log 13572 - \log 11) = 2{,}0608341 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 0608341 & & \\ \underline{0608111} \ldots\ldots\ldots & 11503 & \\ 230 \ldots\ldots\ldots & & 608 \end{array}$$

Donc :
$$x = 115{,}03608.$$

383. CAS OU LE NOMBRE A CALCULER EST MOINDRE QUE L'UNITÉ. Si le nombre à calculer était lui-même moindre que 1, nos définitions ne lui assigneraient pas de logarithme. Dans ce cas, on le multiplierait, au préalable, par une puissance de 10 assez grande, pour que le produit surpassât l'unité; on appliquerait alors la méthode précédente, et l'on diviserait le résultat par cette puissance de 10.

EXEMPLE. Calculer l'expression :

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{375} \times 0{,}5142}.$$

Comme x est plus petit que 1, on le multipliera par 10^n, n devant être déterminé plus tard; et l'on aura :

$$10^n \times x = 10^n \times \sqrt[5]{\frac{1}{375} \times \frac{5142}{10000}} = \frac{10^n}{\sqrt[5]{\frac{375 \times 10000}{5142}}};$$

et, par suite,

$$\log (10^n \times x) = n - \frac{1}{5}(\log 375 + \log 10000 - \log 5142).$$

Or on trouve :

$$\log 375 = 2,5740313$$
$$\log 10000 = 4,$$
$$\log 5142 = 3,7111321$$
$$\log 375 + \log 10000 - \log 5142 = 2,8628992$$
$$\frac{1}{5}(\log 375 + \log 10000 - \log 5142) = 0,5725798.$$

On voit qu'il suffira de prendre $n=1$, pour que la soustraction puisse s'effectuer. On aura donc :

$$\log 10x = 1 - 0,5725798 = 0,4274202.$$

On calcule ensuite le nombre correspondant :

$$\begin{array}{ll} 0,4274202 & \\ 0,4274050\ldots\ldots & 26755 \\ \underline{}\ 152 & 94 \end{array}$$

Ainsi : $10x = 2,675594$; d'où $x = 0,2675594$.

§ VII. Des caractéristiques négatives.

384. Définition de la caractéristique négative. Nos définitions n'assignent pas de logarithmes aux nombres plus petits que l'unité ; et, pour étendre jusqu'à eux le bénéfice de ce procédé abrégé de calcul, nous venons de voir (383), qu'on doit les rendre supérieurs à 1, en les multipliant par une puissance convenable de 10. Mais ce n'est pas ainsi que l'on procède ordinairement dans la pratique. On ne change pas les nombres moindres que l'unité ; on définit, par une convention formelle, les logarithmes de ces nombres, et l'on démontre que les propriétés, dont jouissent les logarithmes ordinaires (nos 365 et suiv.), s'étendent sans modifications aux logarithmes nouveaux.

Pour définir le logarithme d'un nombre A inférieur à l'unité, nous remarquerons qu'on peut toujours multiplier A par une certaine puissance n de 10, choisie de telle manière que le produit soit plus grand que 1, et ait par conséquent un logarithme (357). Or on a vu (374) que, lorsque l'on divise par 10^n un nombre plus grand que 10^n, la partie décimale de son logarithme ne change pas, mais la caractéristique (qui est au moins égale à n), est diminuée de n unités. On *convient* d'étendre ce théorème aux nombres plus petits que 10^n, lesquels, par la division, deviennent inférieurs à l'unité, et de *nommer logarithme de* A *le logarithme de* $(A \times 10^n)$ *diminué de* n *unités*.

Exemple. Quel est le logarithme de 0,0076807753?

Si, pour fixer les idées, on multiplie ce nombre par 1000, de manière à le rendre plus grand que 1 et plus petit que 10, le produit est 7,6807753, et son logarithme est (378) 0,8854051.

On devra retrancher 3 du résultat pour avoir le logarithme cherché. Ainsi, par définition :

$$\log 0{,}0076807753 = 0{,}8854051 - 3.$$

Comme 3 est un nombre entier, on le retranche de la caractéristique qui devient négative, et la partie décimale reste positive. On écrit d'ailleurs ainsi le résultat :

$$\log 0{,}0076807753 = \bar{3}{,}8854051.$$

Si pour rendre un nombre A plus grand que 1 et plus petit que 10, il faut le multiplier par 10^n, la caractéristique du produit, qui est zéro, devient $-n$ après la soustraction. On en conclut aisément, que *la caractéristique négative du logarithme d'un nombre inférieur à l'unité, contient un nombre d'unités égal au rang qu'occupe, à partir de la virgule, le premier chiffre significatif du nombre.*

385. Calculs relatifs aux nombres moindres que l'unité. Il résulte de la convention, qui sert de définition aux logarithmes des nombres inférieurs à l'unité, que *l'on calcule la partie décimale de ces logarithmes d'après les règles posées* (**377** *et* **378**), *c'est-à-dire en faisant abstraction de la virgule, et que l'on donne ensuite au résultat une caractéristique négative, dont la valeur est égale au rang du premier chiffre significatif du nombre après la virgule.*

Inversement, *on calcule les chiffres du nombre correspondant à un logarithme dont la caractéristique est négative, d'après les règles posées* (**379** *et* **380**), *c'est-à-dire en faisant abstraction de la caractéristique; et l'on place ensuite la virgule, de manière que le rang du premier chiffre significatif, à partir de la virgule, soit égal au nombre d'unités de la caractéristique.*

386. Extension des propriétés des logarithmes au cas où les nombres sont moindres que l'unité. La propriété fondamentale des logarithmes consiste en ce que *le logarithme d'un produit de deux facteurs est égal à la somme des logarithmes des deux facteurs.* Nous allons montrer que cette propriété s'étend au cas où les facteurs sont moindres que l'unité.

Soient deux nombres, A, B, tous deux inférieurs à 1 : soient 10^p et 10^q les puissances de 10, par lesquelles on doit les multiplier, pour qu'ils deviennent plus grands que 1 et plus petits que 10. Les logarithmes des deux produits seront compris entre 0 et 1 (373) ; de sorte qu'en les désignant par $0,a$ et $0,b$, on aura :

$$\log(\mathrm{A}\times 10^p)=0,a, \qquad \log(\mathrm{B}\times 10^q)=0,b.$$

Il résulte alors de la définition (384), que :

$$\log \mathrm{A}=0,a-p, \qquad \log \mathrm{B}=0,b-q;$$

et par conséquent,

$$\log \mathrm{A}+\log \mathrm{B}=0,a+0,b-p-q. \qquad [1]$$

D'un autre côté, la propriété fondamentale (365), appliquée aux nombres $(\mathrm{A}\times 10^p)$ et $(\mathrm{B}\times 10^q)$, plus grands que 1, donne :

$$\log\{(\mathrm{A}\times 10^p)(\mathrm{B}\times 10^q)\}=\log(\mathrm{A}\times 10^p)+\log(\mathrm{B}\times 10^q),$$

ou $$\log(\mathrm{AB}\times 10^{p+q})=0,a+0,b;$$

et par suite, si l'on applique au nombre AB, qui est plus petit que 1, la convention (384), c'est-à-dire,

$$\log \mathrm{AB}=\log(\mathrm{AB}\times 10^{p+q})-(p+q),$$

on en conclut :

$$\log \mathrm{AB}= 0,a+0,b-(p+q). \qquad [2]$$

Comparant enfin les égalités [1] et [2], on en tire :

$$\log \mathrm{AB}=\log \mathrm{A}+\log \mathrm{B}. \qquad [3]$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. On démontrerait la proposition, dans le cas où l'un des nombres A, B, serait plus grand que 1, en suivant une marche analogue.

La propriété fondamentale étant ainsi étendue à tous les cas, les autres propriétés des logarithmes (368, 369, 370), se trouvent, par cela même, généralisées : car elles sont des conséquences de la première.

387. Règles de calcul pour les opérations a effectuer sur les logarithmes a caractéristique négative. Un logarithme, à caractéristique négative, doit être regardé comme un binome de la forme $(-a+b)$, dans lequel $-a$ représente la caractéristique et b la partie décimale. Par conséquent, si l'on rencontre un pareil nombre dans une addition, on devra additionner la

partie décimale, et soustraire la caractéristique. Si l'on a, au contraire, à le soustraire, on devra retrancher la partie décimale, et ajouter la caractéristique.

EXEMPLES.

Addition.

$$\begin{array}{r} 2,7396452 \\ \bar{3},6854386 \\ \bar{2},6734895 \\ \hline \bar{1},0985733 \end{array}$$

Soustraction.

$$\begin{array}{r} \bar{3},5236729 \\ \bar{2},7854831 \\ \hline \bar{2},7381898 \end{array}$$

Si l'on a à multiplier un nombre, à caractéristique négative, par un nombre entier, on multiplie séparément la partie décimale et la caractéristique par le multiplicateur, et l'on fait ensuite la réduction.

EXEMPLE.

Multiplication.

$$\begin{array}{r} \bar{3},89367386 \\ 24 \\ \hline 357469544 \\ 178734772 \\ \hline 21,44817264 \\ -\ 72 \\ \hline \end{array}$$

Le produit est : $\overline{51},44817264$.

S'il s'agit d'une division par un nombre entier, on divise d'abord la caractéristique négative du dividende par le diviseur ; et si la division se fait exactement, on achève l'opération, en divisant la partie décimale. Mais, si la caractéristique du dividende n'est pas exactement divisible par le diviseur, pour conserver au quotient la forme qu'a le dividende, on prend le quotient par excès ; on obtient ainsi la caractéristique négative du quotient, et un reste positif, que l'on ajoute à la partie décimale du dividende ; et en divisant la somme par le diviseur, on trouve la partie décimale positive du quotient.

EXEMPLES.

Division : 1er cas.

$$\begin{array}{r|l} \overline{12},7328642 & 6 \\ \cline{2-2} 2 & \bar{2},1221440 \end{array}$$

Division : 2e cas.

$$\begin{array}{r|l} \overline{13},2672958 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & \bar{3},4534591 \end{array}$$

Le premier cas n'a pas besoin d'explication. Quant au second, on remarque que, 13 n'étant pas divisible par 5, et le plus petit nombre, supérieur à 13 et divisible par 5, étant 15, on peut écrire le dividende sous la forme $-15+2{,}2672958$; que le quotient de -15 par 5 est -3, et que celui de $2{,}2672958$ par 5 est $0{,}4534591$; que par suite, le quotient complet est $\bar{3}{,}4534591$. Ce résultat s'obtient évidemment par la règle énoncée plus haut.

388. Application. Ces conventions nous permettent d'appliquer les procédés ordinaires du calcul des logarithmes, dans le cas où certains nombres sont moindres que l'unité, sans qu'il soit nécessaire de les rendre, au préalable, plus grands que 1. Reprenons, en effet, le calcul du n° **383**. On demande de calculer l'expression :

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{375}\times 0{,}5142.}$$

On a :
$$\log x = \frac{1}{5}\left(\log\frac{1}{375} + \log\ 0{,}5142\right).$$

Or :
$$\log\frac{1}{375} = \log 1 - \log 375 = 0 - 2{,}5740313 = \bar{3}{,}4259687\,;$$

puis
$$\log 0{,}5142 = \bar{1}{,}7111321\,;$$

donc :
$$\log\frac{1}{375} + \log\ 0{,}5142 = \bar{3}{,}1371008,$$

et
$$\frac{1}{5}\left(\log\frac{1}{375} + \log 0{,}5142\right) = \bar{1}{,}4274202.$$

Par suite, le nombre correspondant est : $x = 0{,}2675594$.

§ VIII. Emploi des compléments.

389. Définition. On appelle *complément* d'un nombre N à 10, la différence $10-N$. Si le nombre N est positif et plus petit que 10, les chiffres du complément sont les compléments à 9 des chiffres de N, à l'exception du dernier chiffre significatif de droite, qui est le complément à 10 du dernier chiffre de N.

Exemples.
$$C^t\,3{,}72543 = 6{,}27457,$$
$$C^t\,7{,}28540 = 2{,}71460.$$

Si le nombre est positif et plus grand que 10, on obtient la partie décimale du complément d'après la même règle ; et pour

avoir la partie entière, on retranche 10 de la partie entière du nombre, on ajoute 1, et on donne au résultat le signe —.

EXEMPLE. $\quad C^t\, 12,7258 = \bar{3},2742.$

Car on a à soustraire de 10 le nombre 12,7258 (387).

Si le nombre N a une caractéristique négative, on ajoute à 10 cette caractéristique, changée de signe, en la diminuant d'une unité, et l'on écrit, à la suite, le complément de la partie décimale.

EXEMPLE. $\quad C^t\, \bar{3},74652 = 12,25348.$

Car on a à exécuter l'opération $10 + 3 - 0,74652$.

390. USAGE DES COMPLÉMENTS. Lorsque, dans les calculs logarithmiques, on est conduit à faire une soustraction, on la transforme le plus souvent en addition, à l'aide des compléments. On a, en effet, identiquement :

$$a - b = a + (10 - b) - 10.$$

Il suffit donc, pour calculer la différence $(a - b)$, d'ajouter à a le complément de b, et de retrancher 10 du résultat.

En général, pour calculer l'expression $(a - b + c - d + e - f)$, on la remplace par l'expression équivalente

$$(a + C^t b + c + C^t d + e + C^t f - 30);$$

dont la valeur s'obtient par une addition.

EXEMPLE. Calculer la cinquième puissance de $\frac{2}{37}$. On a :

$$\begin{array}{lr}
\log 2 = \ldots\ldots\ldots & 0,30103000 \\
\log 37 = 1,56820172 & \\
c^t \log 37 = \ldots\ldots\ldots & 8,43179828 \\
\hline
\log \frac{2}{37} = \ldots\ldots\ldots & \bar{2},73282828;
\end{array}$$

$$\log \left(\frac{2}{37}\right)^5 = 5 \log \frac{2}{37} = \bar{7},66414140.$$

$$\begin{array}{lr}
6641414 & \\
6641341 \ldots\ldots & 46146 \\
\hline
73 & 77
\end{array}$$

Donc $\quad \left(\frac{2}{37}\right)^5 = 0,0000004614677.$

§ IX. Des différents systèmes de logarithmes.

391. Il y a un nombre infini de systèmes de logarithmes. On peut choisir à volonté deux progressions, l'une par différence et commençant par zéro, l'autre par quotient et commençant par 1; elles fourniront un système de logarithmes, qui jouira de toutes les propriétés démontrées (nos 365 et suiv.). Ces systèmes sont donc en nombre infini. Ils sont liés les uns aux autres par une loi très-simple, qui résulte du théorème suivant.

392. Théorème. *Le rapport des logarithmes de deux nombres est le même dans tous les systèmes.*

En effet, soient A et B deux nombres quelconques; et soit $\frac{m}{n}$ la fraction, à termes entiers, qui, dans un certain système, représente le rapport de leurs logarithmes. Nous aurons :

$$\frac{\log A}{\log B} = \frac{m}{n}; \quad \text{d'où} \quad n \log A = m \log B. \qquad [1]$$

Or cette dernière égalité équivaut à :

$$\log A^n = \log B^m; \quad \text{d'où} \quad A^n = B^m. \qquad [2]$$

Mais, si l'on considère un autre système de logarithmes, dans lequel les logarithmes soient indiqués par la notation log', on pourra prendre, dans ce système, les logarithmes des deux membres de l'égalité [2], et l'on aura :

$$n \log' A = m \log' B, \quad \text{d'où} \quad \frac{\log' A}{\log' B} = \frac{m}{n}. \qquad [3]$$

Par suite :

$$\frac{\log' A}{\log' B} = \frac{\log A}{\log B}. \qquad [4]$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. La démonstration précédente suppose, que le rapport des deux logarithmes considérés est commensurable. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait en considérer deux autres, aussi peu différents qu'on voudrait des premiers, et qui rempliraient cette condition : le théorème s'y appliquant, quelque rapprochés qu'ils soient des deux logarithmes proposés, nous regardons, comme évident, qu'il s'applique également à ceux-ci.

393. Corollaire. On tire de l'égalité [4] :

$$\frac{\log' A}{\log A} = \frac{\log' B}{\log B}. \qquad [5]$$

Ainsi, *le rapport des logarithmes d'un même nombre, dans deux systèmes différents, est le même pour tous les nombres.*

394. Module. Si, pour deux systèmes déterminés, on représente ce rapport constant par M, on a :

$$\log' A = M \log A. \qquad [6]$$

Par conséquent, *lorsqu'on connaît les logarithmes de tous les nombres dans un certain système, pour avoir les logarithmes dans un autre système, il faut multiplier les premiers par un nombre constant* M. Ce nombre constant s'appelle le *module* du nouveau système par rapport au premier.

395. Base. Il résulte du théorème précédent, qu'une table de logarithmes étant construite, on pourra en construire une seconde, pourvu que l'on connaisse un seul des logarithmes du nouveau système. Car on tire de l'égalité [4] :

$$\log' A = \log A \times \frac{\log' B}{\log B}. \qquad [7]$$

Si donc on connaît $\log' B$, pour avoir le nouveau logarithme de A, il suffira de multiplier $\log A$ par le rapport connu $\frac{\log' B}{\log B}$.

Pour définir un système de logarithmes, on donne ordinairement le nombre qui a pour logarithme l'unité. Ce nombre se nomme la *base* du système.

La base du système vulgaire est 10.

396. Calcul du logarithme d'un nombre dans un système quelconque. D'après ce qui précède, les tables de logarithmes vulgaires, calculées pour le cas où la base est 10, permettent de calculer le logarithme d'un nombre dans un système quelconque. Proposons-nous, par exemple, de calculer le logarithme de 7698, dans le système dont la base est 12. On trouve, dans les tables de Callet, que, dans le système dont la base est 10,

$$\log 7698 = 3{,}8863779, \qquad \log 12 = 1{,}07918125.$$

Dans le système dont la base est 12, on a :

$$\log' 7698 = x, \qquad \log' 12 = 1.$$

Donc (395) : $$x = 3{,}8863779 \times \frac{1}{1{,}07918125},$$

ou $$x = 3{,}60122815.$$

397. Calcul de la base d'un système dans lequel on connait le logarithme d'un nombre. Proposons-nous, par exemple, de trouver la base du système, dans lequel le logarithme de 25 est 0,78321. On a, dans ce système, en désignant la base par x :

$$\log' x = 1, \qquad \log' 25 = 0{,}78321.$$

Mais, dans le système vulgaire, on a :

$$\log 25 = 1{,}39794001,$$

Donc (395) : $$\log x = \frac{1{,}39794001}{0{,}78321} = 1{,}7848853,$$

et, par suite, $$x = 60{,}93759.$$

EXERCICES.

I. Quelle est la raison q d'une progression par quotient de 11 termes, dont le premier terme est 10, et dont le dernier est 100 ? Quelle est la somme S de cette progression ?

On trouve : $q = 1{,}258925, \quad S = 447{,}5910.$

II. Quelle est la base x d'un système de logarithmes dans lequel 6 est le logarithme de 729 ?

On trouve : $x = 3.$

III. Quelles sont les bases commensurables, telles que le logarithme de 20 soit commensurable ?

On trouve que la base est égale à 20^p, p étant entier.

IV. Quelle est la base x du système dans lequel un nombre entier donné a est égal à son logarithme ?

On trouve : $x = \sqrt[a]{a}.$

V. Résoudre le système :

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad \log x + \log y = \frac{m}{n}.$$

On remarque que la seconde équation équivaut à $xy = \sqrt[n]{10^m}$; et l'on est ramené à un problème connu

VI. Résoudre le système :

$$x^4+y^4=a^4, \quad \log x+\log y=\frac{p}{q}.$$

Même méthode.

VII. Calculer l'expression :

$$x=\frac{(\sqrt[5]{3226727})^6}{(\sqrt[7]{10732872})^4}.$$

On trouve : $x=6208,157.$

VIII. Calculer l'expression :

$$x=\frac{(\sqrt[12]{0,0000782567})^{25}}{(\sqrt[16]{0,000389672})^{26}}.$$

On trouve : $x=0,006875045.$

IX. Calculer l'expression :

$$x=\frac{\sqrt[4]{(b^2-a^2)^6\times c^2}}{\sqrt[3]{a+d\sqrt{e}}},$$

dans laquelle $a=4,528627$, $b=21,72857$, $c=\frac{30}{59}$, $d=0,00875$, $e=4839$.

On trouve : $x=3966,30.$

X. Calculer l'expression : $x=\dfrac{\sqrt[3]{a^2+b\sqrt{c}}}{10\sqrt[4]{d-ae^2}}$,

dans laquelle $a=27,35825$, $b=3,2782$, $c=\frac{52}{79}$, $d=38,54$, $e=0,003528$.

On trouve : $x=0,3648341.$

CHAPITRE III.

DES INTÉRÊTS COMPOSÉS ET DES ANNUITÉS.

§ I. Des intérêts composés.

308. Définitions. Lorsqu'un *capital* est prêté pendant un certain temps, il produit un bénéfice que l'on nomme son *intérêt*. Le *taux* est l'intérêt que rapporte un capital de 100 fr. prêté pendant un an. Ordinairement le prêteur reçoit, à la fin

de chaque année, les intérêts *simples* de son capital. Mais lorsque, au lieu de toucher ses intérêts, il les ajoute au capital, à mesure qu'ils sont *échus*, le capital augmente, les intérêts grandissent chaque année; et l'on dit alors que le capital est placé à *intérêts composés*.

Dans les formules que nous allons démontrer, nous représenterons le capital prêté par C, le capital accru de ses intérêts composés par A, et la durée du prêt (évaluée en années) par n. Nous désignerons par r l'intérêt rapporté par 1 franc en un an; de sorte que r sera le centième du taux.

399. Formule générale des intérêts composés. Puisque 1^f rapporte r^f par an, et devient, par suite $(1+r)$, au bout d'une année, un capital C deviendra, au bout du même temps, $C(1+r)$. Ainsi, pour calculer ce que devient un capital, placé pendant un an, il faut le multiplier par $(1+r)$.

Ce capital $C(1+r)$, placé au commencement de la seconde année, pour un an, deviendra donc $C(1+r)(1+r)$, ou $C(1+r)^2$. Cette nouvelle somme, placée pendant une troisième année, se multiplie encore par $(1+r)$, et devient $C(1+r)^3$. Et, en général, la somme placée, se multipliant chaque année par $(1+r)$, devient après n années :

$$A=C(1+r)^n. \qquad [1]$$

C'est la formule des intérêts composés.

400. Cas où le temps du placement comprend une fraction d'année. Si la durée du prêt se compose de n années et de k jours, on calcule d'abord ce que devient le capital C, après n années, par la formule [1]. Puis, remarquant que 1 franc rapporte $\frac{kr}{t}$ en k jours, à intérêts simples (t est le nombre de jours de l'année), on en conclut, que 1 franc devient, après ce temps $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$, et que A devient $A\left(1+\frac{kr}{t}\right)$. Donc, en désignant par A' le capital cherché, et en remplaçant A par sa valeur [1], on a :

$$A'=C(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right). \qquad [2]$$

401. Problèmes. Ces formules servent à résoudre quelques

problèmes, pour lesquels l'emploi des logarithmes est indispensable.

1° *Que devient une somme donnée* C, *placée à un taux donné* 100 r, *pendant un temps donné?* On emploie la formule [1] ou la formule [2], selon que le temps donné se compose d'un nombre exact n d'années, ou qu'il renferme, en outre, un nombre k de jours.

2° *Quelle somme faut-il placer aujourd'hui, à un taux donné* 100r, *pour obtenir une somme déterminée* A, *après un temps donné?* On emploie encore l'une des formules [1] et [2]; et l'on a, suivant les cas :

$$[3] \qquad C=\frac{A}{(1+r)^n}, \quad \text{ou} \quad C=\frac{A}{(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right)}. \qquad [4]$$

3° *Un capital donné* C *a été placé aujourd'hui; il a produit une somme donnée* A, *après un temps donné. Quel est le taux de l'intérêt?* Si le temps est un nombre entier d'années, on tire de la formule [1] :

$$(1+r)=\sqrt[n]{\frac{A}{C}}. \qquad [5]$$

Mais, si le temps se compose de n années et de k jours, il faut employer l'équation [2], qui est du $(n+1)^{me}$ degré par rapport à r, et dont la résolution appartient à l'algèbre supérieure. On peut, cependant, par quelques tâtonnements convenablement dirigés, obtenir promptement une valeur approchée du taux. On remarque, en effet, que, d'après la formule,

$$A=C(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right), \qquad [2]$$

le capital A augmente avec le taux r, et diminue avec lui. Si donc on donne à r une première valeur arbitraire r', et qu'on calcule, par logarithmes, la valeur du second membre, on trouvera une valeur A', plus grande que A, si r' est trop grand, et plus petite que A, si r' est trop petit. En comparant la valeur trouvée A' avec la valeur donnée A, on saura donc, si r' est plus grand ou plus petit que le taux inconnu. On choisira, d'après cela, une autre valeur pour r, laquelle donnera lieu à un nouveau calcul et à une nouvelle comparaison; et, à l'aide de quel-

ques essais, on resserrera aisément r entre deux limites, qui en fourniront promptement une valeur approchée.

4° *Pendant combien de temps faut-il placer un capital donné* C, *pour qu'il produise une somme déterminée* A, *à un taux donné* $100r$? Comme on ne sait pas si le temps inconnu est ou n'est pas composé d'un nombre entier d'années, on n'a pas le droit d'employer la formule [1], qui a été construite pour le cas où n est entier. Cependant, si l'on en fait usage, on a :

$$(1+r)^n=\frac{A}{C};$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes des deux membres, et en divisant ensuite par $\log(1+r)$.

$$n=\frac{\log A-\log C}{\log(1+r)}. \qquad [6]$$

Si le quotient de $(\log A-\log C)$ par $\log(1+r)$ est un nombre entier, il est évidemment le nombre d'années cherché; car la formule [6] entraîne la formule [1]. Si le quotient n'est pas entier, il faut en conclure que le temps inconnu n'est pas un nombre entier d'années. Cependant on peut prouver que, dans ce cas, *la partie entière du quotient est la partie entière du temps inconnu*. Car désignons par p et $(p+1)$ les deux nombres entiers consécutifs qui comprennent la fraction [6]; nous aurons :

$$p<\frac{\log A-\log C}{\log(1+r)}<p+1;$$

d'où l'on tire :

$$p\log(1+r)<\log A-\log C<(p+1)\log(1+r),$$

ou

$$\log(1+r)^p<\log\frac{A}{C}<\log(1+r)^{p+1}.$$

De là, revenant aux nombres, on conclut :

$$(1+r)^p<\frac{A}{C}<(1+r)^{p+1}, \quad \text{ou} \quad C(1+r)^p<A<C(1+r)^{p+1}, \quad [7]$$

inégalités qui prouvent le théorème énoncé.

Si l'on veut maintenant connaître le nombre k de jours qui complètent le temps cherché, on remarquera que la formule [2],

que l'on aurait dû appliquer dans ce cas, donne, en y remplaçant n par p :

$$\log A = \log C + p \log(1+r) + \log\left(1+\frac{kr}{t}\right) :$$

d'où :

$$\frac{\log A - \log C}{\log(1+r)} = p + \frac{\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)}{\log(1+r)}.$$

Or p est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{\log A - \log C}{\log(1+r)}$. Si donc on désigne par R le reste de cette division, l'égalité précédente pourra s'écrire :

$$p + \frac{R}{\log(1+r)} = p + \frac{\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)}{\log(1+r)};$$

donc

$$\log\left(1+\frac{kr}{t}\right) = R. \qquad [8]$$

On connaîtra donc le logarithme de $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$, et il sera facile d'en tirer $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$, et, par suite, k.

Donnons maintenant quelques applications numériques.

402. Applications numériques. Exemple I. *Calculer ce que devient un capital de* 8000 *francs, au bout de* 39 *ans, au taux de* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par an.*

Formule [1] : $\log A = \log C + n \log(1+r)$.

$$\begin{aligned} \log C = \log 8000 = \ldots\ldots\ldots\ldots &= 3,9030900 \\ \log(1+r) = \log(1,045) = 0,0191162904 & \\ n\log(1+r) = 39 \log(1,045) = \ldots\ldots\ldots\ldots &= \underline{0,7455353} \\ \log A = \ldots\ldots\ldots\ldots &= 4,6486253; \end{aligned}$$

d'où $A = 44527^{f},19$.

Exemple II. *Si l'on avait placé* 1 *centime à* 5 *pour* 100, *au commencement de l'ère chrétienne, que serait-il devenu, au commencement de l'année* 1863, *c'est-à-dire pendant* 1862 *ans ?*

Formule [1] : $\log A = \log C + n \log(1+r)$.

$$\begin{aligned} \log C = \log(0,01) = \ldots\ldots\ldots\ldots &= \bar{2} \\ \log(1+r) = \log(1,05) = 0,02118929907 & \\ n\log(1+r) = 1862 \log(1,05) = \ldots\ldots\ldots\ldots &= \underline{39,3234475} \\ \log A = \ldots\ldots\ldots\ldots &= 37,3234475; \end{aligned}$$

d'où : $A = 21059472 \times 10^{30}$ francs (approximativement),

nombre de 38 chiffres.

Afin de représenter cette somme énorme sous une forme plus appréciable, calculons les dimensions d'une sphère en or, qui équivaut à la somme indiquée. La densité de l'or est 19,5, et le prix du kilogramme d'or est $\frac{31000}{9}$ de franc. Désignons, pour cela, par x le rayon de la sphère en mètres; son volume sera $\frac{4\pi x^3}{3}$; son poids sera donc $\frac{4\pi x^3}{3} \times 19500$ kilogrammes; et, par suite, sa valeur en francs sera $\frac{4\pi x^3}{3} \times 19500 \times \frac{31000}{9}$. On aura donc :

$$A = \frac{4\pi x^3 \times 19500 \times 31000}{27};$$

et, par suite :
$$x^3 = \frac{27A}{4\pi \times 19500 \times 31000}.$$

$$\begin{aligned}
\log 27 &= 1,43136376 \\
\log A &= 37,32344749 \\
C^t \log 4 - 10 &= \bar{1},39794001 \\
C^t \log \pi - 10 &= \bar{1},50285013 \\
C^t \log 19500 - 10 &= \bar{5},70996539 \\
C^t \log 31000 - 10 &= \bar{5},50863831 \\
\hline
\log x^3 &= 28,87420509, \\
\log x &= 9,6247350;
\end{aligned}$$

d'où : $x = 4214392 \times 10^3$ mètres.

Ainsi le rayon de la sphère vaut à peu près 4214392 kilomètres; et son volume serait, par conséquent, plus de 290 millions de fois le volume de la terre.

EXEMPLE III. *Quelle est la valeur actuelle d'une somme de 7220 fr. payable dans 33 ans, l'intérêt étant à 5 pour 100 par an?*

Formule [3] : $\log C = \log A - n \log (1 + r)$.

$$\begin{aligned}
\log A = \log 7220 &= \ldots\ldots\ldots\ldots = 3,85853720 \\
\log (1+r) = \log (1,05) &= 0,021189299 \\
n \log (1+r) = 33 \log (1,05) &= \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,69924687 \\
\hline
\log C &= \ldots\ldots\ldots\ldots = 3,15929033;
\end{aligned}$$

d'où $C = 1443^f,08$.

Et cette somme deviendra, par accumulation des intérêts à 5 pour 100, et pendant 33 ans, 7220 fr.

EXEMPLE IV. *Une somme de 28895 fr. a été placée, il y a 73 ans : elle a produit 250000 fr. Quel était le taux de l'intérêt?*

Formule [5] : $\log (1 + r) = \frac{\log A - \log C}{n}$.

$$\log A = \log 250000 = 5,3979400$$
$$\log C = \log \ \ 28895 = 4,4608227$$
$$\log A - \log C = 0,9371173;$$
$$\log(1+r) = 0,01283722;$$

d'où :
$$1+r = 1,03000.$$

Le taux de l'intérêt est donc 3 pour 100.

Exemple V. *En combien de temps un capital de 7700 fr. devient-il 42850 fr., l'intérêt étant à 4 pour 100 par an ?*

Formule [6] :
$$n = \frac{\log A - \log C}{\log(1+r)}.$$

$$\log A = \log 42850 = 4,6319508$$
$$\log C = \log \ 7700 \ = 3,8864907$$
$$\log A - \log C = 0,7454601,$$
$$\log(1+r) = \log(1,04) = 0,0170333.$$

Donc n est la partie entière du quotient $\frac{0,7454601}{0,0170333}$. On trouve :

$$n = 43 \text{ ans}, \quad \text{et} \quad R = 0,0130282.$$

Donc, formule [8] : $\log\left(1+\frac{kr}{t}\right) = 0,0130282.$

Par suite :
$$1+\frac{kr}{t} = 1,030453.$$

De là : $\frac{kr}{t} = 0,030453,$ et $k = \frac{0,030453 \times 365}{0,04} = 278.$

Ainsi le temps cherché est 43 ans, 278 jours.

§ II. Des annuités.

403. Définition. Une personne emprunte aujourd'hui une somme C, pour n années, au taux r pour un franc : pour s'acquitter, elle paye, à la fin de chaque année, une somme déterminée a, calculée de manière qu'après n payements égaux à a, elle a tout remboursé, capital et intérêts composés. La somme a, qu'elle donne ainsi annuellement, se nomme *annuité*.

404. Formule générale des annuités. Proposons-nous de trouver la formule qui lie le capital C, l'annuité a, le taux r et la durée n du prêt.

Première méthode. Si l'emprunteur attendait, pour opérer le remboursement de sa dette, la fin de la n^e année, il devrait, à

cette époque (399), $C(1+r)^n$. Mais il paye, à la fin de la première année, une première somme a; en avançant ainsi de $(n-1)$ années ce remboursement partiel, il se libère d'une somme dont la valeur, dans le compte final, doit être égale à $a(1+r)^{n-1}$; car elle aurait porté intérêt, pendant $(n-1)$ années, entre ses mains, s'il l'avait gardée. De même la somme a, payée à la fin de la seconde année, équivaut à une somme $a(1+r)^{n-2}$, payée à la fin des n années. On verra, de la même manière, que la somme a, payée à la fin de l'avant-dernière année, doit être comptée pour une valeur égale à $a(1+r)$; et que la somme a, payée à la fin de la n^e année, entre dans le compte final pour sa valeur a. On doit donc avoir l'équation :

$$C(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots\ldots + a(1+r) + a.$$

Comme le second membre, étant renversé, est la somme des n termes d'une progression géométrique croissante, dont le premier terme est a, et la raison $(1+r)$, on applique la formule [7] du n° 347, et l'on a :

$$C(1+r)^n = \frac{a(1+r)^n - a}{r},$$

ou, en chassant le dénominateur r,

$$a\{(1+r)^n - 1\} = Cr(1+r)^n. \qquad [1]$$

Telle est la formule générale des annuités.

405. Deuxième méthode. On peut obtenir cette formule d'une autre manière. L'emprunteur, recevant aujourd'hui une somme C, doit, à la fin de la première année, $C(1+r)$; comme il rembourse alors une somme a, sa dette se réduit à $C(1+r)-a$. A la fin de la seconde année, cette dette s'est accrue des intérêts d'un an; elle est donc devenue $\{C(1+r)-a\}(1+r)$, ou $C(1+r)^2 - a(1+r)$; mais alors il rembourse une nouvelle somme a; ce qui réduit la dette à $C(1+r)^2 - a(1+r) - a$. Il est évident, qu'à la fin de la troisième année, cette dette qui s'est augmentée des intérêts d'un an, mais qui s'est diminuée d'une nouvelle annuité a, est égale à $C(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a$. Et, à la fin de la n^{me} année, elle est égale à

$$C(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - \ldots. - a(1+r) - a.$$

Or, à cette époque, elle doit être nulle; il faut donc que l'expres-

sion précédente soit égale à zéro; et, par suite, que l'on ait l'équation :

$$C(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r) + a,$$

comme dans la première méthode.

406. Remarque. On peut enfin arriver à la formule [1], sans avoir à sommer une progression par quotient. Supposons, en effet, qu'un individu prête à un autre une somme $\frac{a}{r}$, pour n années. Le débiteur devra payer, chaque année, l'intérêt simple $\frac{a}{r} \times r$ ou a; et, à la fin, il devra encore la somme empruntée $\frac{a}{r}$. Or, concevons que cet intérêt soit versé, au moment où il est dû, entre les mains d'une personne tierce, chargée de le faire valoir, cette dernière recevra ainsi, par annuités, n sommes égales à a; et elle aura entre les mains, après les n années, tout ce dont le capital $\frac{a}{r}$ s'est *bonifié* pendant ce temps. Or cette augmentation du capital est $\frac{a}{r}(1+r)^n - \frac{a}{r}$. Donc cette expression représente le total des annuités remboursées; et comme, par hypothèse, ces remboursements doivent acquitter la dette, on doit avoir :

$$\frac{a}{r}(1+r)^n - \frac{a}{r} = C(1+r)^n,$$

formule qui ne diffère pas de l'équation [1].

407. Problèmes. La formule [1] sert à résoudre quatre problèmes différents, suivant que l'on prend pour inconnue l'une ou l'autre des quatre lettres qui y entrent.

1° *Quelle annuité* a *faut-il payer, à la fin de chaque année, pour amortir, en* n *années, un emprunt donné* C, *et ses intérêts composés, le taux étant* r *pour* 1 *franc?* La formule [1] donne :

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}. \qquad [2]$$

Pour appliquer cette formule, on calcule d'abord $(1+r)^n$ par

logarithmes; on en retranche l'unité, ce qui donne le dénominateur. Puis, à l'aide de la formule :

$$\log a = \log Cr + n \log(1+r) - \log\{(1+r)^n - 1\},$$

on calcule log a, et, par suite, a.

2° *Quelle somme* C *peut-on emprunter aujourd'hui, en offrant de la rembourser, en* n *années, par* n *annuités égales à* a, *le taux étant* r *pour un franc?* La formule [1] donne :

$$C = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r(1+r)^n}. \qquad [3]$$

Même observation que ci-dessus pour le calcul par logarithmes.

3° *On emprunte aujourd'hui une somme* C, *au taux* r; *on se propose de la rembourser, au moyen d'annuités égales à* a; *pendant quel temps devra-t-on payer l'annuité?* La formule [1] donne, en la résolvant par rapport à $(1+r)^n$:

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Cr},$$

d'où l'on conclut :

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)}. \qquad [4]$$

Le problème n'est possible, que lorsque $(a - Cr)$ est positif; car les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels. On voit, d'ailleurs, *a priori*, qu'il doit en être ainsi; car Cr représente l'intérêt simple du capital prêté; et il est évident que l'annuité a doit être supérieure à cet intérêt, pour qu'on arrive à rembourser la dette.

Si la formule [4] donne pour n un nombre entier, ce nombre résoudra la question. Mais si la division ne se fait pas exactement, le problème est impossible. Cependant, on peut prouver que, dans ce cas, *si l'on désigne par* p *et* (p + 1) *les deux nombres entiers consécutifs qui comprennent la fraction* [4], *un nombre* p *d'annuités n'acquitterait pas la dette, tandis qu'une annuité de plus serait plus que suffisante.* En effet, puisque l'on a :

$$p < \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)} < p + 1,$$

on aura aussi :

$$p \log(1+r) < \log a - \log(a - Cr) < (p+1)\log(1+r),$$

ou $$\log(1+r)^p < \log\frac{a}{a-Cr} < \log(1+r)^{p+1};$$

et, par suite, $$(1+r)^p < \frac{a}{a-Cr} < (1+r)^{p+1}.$$

On peut encore chasser le dénominateur, puisqu'il est positif ; et il vient : $(a - Cr)(1+r)^p < a < (a - Cr)(1+r)^{p+1}$;

d'où l'on tire aisément :

$$\frac{a\{(1+r)^p - 1\}}{r} < C(1+r)^p, \quad \frac{a\{(1+r)^{p+1} - 1\}}{r} > C(1+r)^{p+1}.$$

Ces deux inégalités prouvent la proposition énoncée.

On appliquera donc, dans tous les cas, la formule [4]; elle donnera le nombre p des annuités à payer; s'il y a un reste, on calculera facilement la différence, $C(1+r)^p - \frac{a\{(1+r)^p - 1\}}{r}$, due au commencement de la $(p+1)^{me}$ année; et l'on en fera l'objet d'un payement spécial, ou d'une convention particulière.

4° *On emprunte aujourd'hui une somme* C, *et l'on se propose de la rembourser, avec ses intérêts composés, en payant, pendant* n *années une annuité* a; *quel est le taux de l'intérêt?*

La formule [1] est, par rapport à r, une équation du $(n+1)^{me}$ degré, qu'on ne peut résoudre qu'à l'aide de procédés particuliers. On arrive promptement à une valeur approchée de r, en s'appuyant sur la remarque suivante.

Lorsque C *et* a *sont donnés, le nombre* n *des annuités augmente ou diminue, quand le taux* r *augmente ou diminue lui-même.* Il suffit, en effet, pour s'en assurer, de reprendre la seconde méthode (405), qui fournit la formule générale des annuités; on reconnaît que la dette, à la fin de la première année, $C(1+r) - a$, est d'autant plus grande que r est plus grand ; qu'il en est de même à la fin de chaque année, puisqu'on multiplie chaque fois la dette précédente par $(1+r)$, et qu'on diminue ensuite le produit d'une quantité fixe a. Par conséquent, si n payements suffisent pour annuler la dette, lorsque le taux a une certaine valeur r, ils ne suffiront plus, lorsque le taux sera plus élevé.

Cela posé, reprenons la formule [1] sous la forme :

$$n = \frac{\log a - \log (a - Cr)}{\log (1 + r)}, \qquad [4]$$

formule dans laquelle r est l'inconnue. Si l'on donne arbitrairement à r une valeur r', et que cette valeur soit moindre que celle que l'on cherche, la valeur correspondante n' de la fraction [4] sera moindre que la valeur donnée n; et au contraire, n' sera plus grand que n, si r' est plus grand que r. On saura donc, en comparant n' à n, si la valeur, attribuée arbitrairement à r, est trop forte ou trop faible ; et l'on pourra, par suite, à l'aide de quelques tâtonnements convenablement dirigés, obtenir rapidement une valeur suffisamment approchée de r.

408. Applications numériques. Exemple I. *Quelle est l'annuité qui amortit, en 51 ans, une somme de 34 600 fr., l'intérêt étant à 4 pour 100 par an ?*

Formule [2] : $\log a = \log Cr + n \log (1+r) - \log \{ (1+r)^n - 1 \}$.

$$\log (1+r) = \log (1{,}04) = 0{,}0170333393$$

$$n \log (1+r) = 51 \log (1{,}04) = 0{,}8687003;$$

d'où : $$(1+r)^n = 7{,}390950.$$

Cela posé :

$$\begin{aligned}
&\log Cr = \log 1384 \ldots\ldots\ldots\ldots = 3{,}1411361\\
&n \log (1+r) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}8687003\\
&\log \{ (1+r)^n - 1 \} = \log 6{,}39095 = 0{,}8055654\\
&C^t \log \{ (1+r)^n - 1 \} - 10 = \ldots\ldots = \bar{1}{,}1944346\\
&\log a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3{,}2042710.
\end{aligned}$$

Donc : $$a = 1600^f{,}556.$$

Exemple II. *On place, au commencement de chaque année, une somme de 50 fr. au taux de 6 pour 100 : quelle somme x devra-t-on recevoir au bout de 24 ans ?*

Formule : $$x = \frac{a \{ (1+r)^{n+1} - (1+r) \}}{r}.$$

$$\log (1+r) = \log (1{,}06) = 0{,}0253058653$$

$$(n+1) \log (1+r) = 25 \log (1{,}06) = 0{,}6326466;$$

d'où : $$(1+r)^{n+1} = 4{,}29187;$$

or : $$1 + r = 1{,}06$$

donc : $$(1+r)^{n+1} - (1+r) = 3{,}23187.$$

Cela posé :

$$\begin{aligned} \log a = \log 50 &= 1{,}6989700 \\ \log\{(1+r)^{n+1} - (1+r)\} = \log 3{,}23187 &= 0{,}5094539 \\ C^t \log r - 10 = C^t \log 0{,}06 - 10 &= 1{,}2218488 \\ \hline \log s &= 3{,}4302727 \end{aligned}$$

Donc :

$$s = 2693^f{,}225.$$

Exemple III. *Quelle somme C peut-on emprunter aujourd'hui, en offrant de payer, pendant* 37 *ans, une annuité de* 825 *fr. le taux étant à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 ?

Formule [3] :

$$\log C = \log a + \log\{(1+r)^n - 1\} - \log(1+r)^n - \log r.$$

$$\log(1+r) = \log(1{,}045) = 0{,}01911629$$

$$n \log(1+r) = 37 \log(1{,}045) = 0{,}7073027;$$

d'où :

$$(1+r)^n = 5{,}09686.$$

Cela posé :

$$\begin{aligned} \log a = \log 825 &= 2{,}9164540 \\ \log\{(1+r)^n - 1\} = \log 4{,}09686 &= 0{,}6124512 \\ C^t \log(1+r)^n - 10 = \ldots\ldots\ldots &= \bar{1}{,}2926973 \\ C^t \log r - 10 = C^t \log 0{,}045 - 10 &= 1{,}3467875 \\ \hline \log C &= 4{,}1683900; \end{aligned}$$

d'où

$$C = 14736^f{,}35.$$

Exemple IV. *En combien de temps une somme de* 260 000 *fr. sera-t-elle amortie par une annuité de* 10000 *fr., au taux de* $3\frac{1}{4}$ *pour* 100 ?

Formule [4] :

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)};$$

$$\begin{aligned} \log a = \log 10000 &= 4 \\ \log(a - Cr) = \log 1550 &= 3{,}1903317 \\ \hline \log a - \log(a - Cr) &= 0{,}8096683 \end{aligned}$$

$$\log(1+r) = \log(1{,}0325) = 0{,}0138901.$$

Donc :

$$n = \frac{0{,}8096683}{0{,}0138901} = 58\ldots..$$

On devra donc payer 58 annuités de 10 000 fr. Mais, comme la division laisse un reste, la somme donnée ne sera pas amortie entièrement. Pour terminer le compte, il faut calculer, d'une part, ce qui est dû au bout de 58 ans, c'est-à-dire $s = 260000 \times (1{,}0325)^{58}$; calculer, de l'autre, ce qui a été payé par les annuités, c'est-à-dire $p = \dfrac{10000 \times \{(1{,}0325)^{58} - 1\}}{0{,}0325}$; et prendre la différence $(s - p)$.

$$\log 260000 = 5,41497335 \qquad \log 10000 = 4$$

$$58 \log (1,0325) = 0,80562348 \qquad \log 5,391804 = 0,7317341$$

$$\log s = 6,22059683; \qquad C^t \log 0,0325 - 10 = 1,4881166$$

d'où : $s = 1661869^f$. $\log p = 6,2198507;$

De plus $(1,0325)^{58} = 6,391804$. $p = 1659017^f$.

Donc la somme qui reste due, $(s - p) = 2852$ fr.

Exemple V. *On emprunte aujourd'hui une somme de* 35 000 *fr.; on la rembourse, ainsi que ses intérêts composés, par* 52 *annuités de* 1600 *fr. chacune. Quel est le taux de l'intérêt ?*

Formule [4] : $$n = \frac{\log a - \log (a - Cr)}{\log (1 + r)}.$$

Supposons d'abord : $r = 0,04$; il en résulte : $a - Cr = 200$.

$$\log a = \log 1600 = 3,2041200$$
$$\log (a - Cr) = \log 200 = 2,3010300$$
$$\log a - \log (a - Cr) = 0,9030900;$$
$$\log (1 + r) = \log (1,04) = 0,0170333.$$

En divisant 0,9030900 par 0,0170333, on trouve pour quotient 53, nombre plus grand que 52. Donc le taux est moindre que 4.

Supposons $r = 0,035$; alors $a - Cr = 375$.

$$\log a = \log 1600 = 3,2041200$$
$$\log (a - Cr) = \log 375 = 2,5740313$$
$$\log a - \log (a - Cr) = 0,6300887;$$
$$\log (1 + r) = \log (1,035) = 0,0149403.$$

En divisant 0,6300887 par 0,0149403, on trouve pour quotient 42, nombre beaucoup trop faible. Donc le taux est beaucoup plus voisin de 4 que de $3\frac{1}{2}$.

Supposons donc $r = 0,039$; alors $a - Cr = 235$.

$$\log a = \log 1600 = 3,2041200$$
$$\log (a - Cr) = \log 235 = 2,3710679$$
$$\log a - \log (a - Cr) = 0,8330521;$$
$$\log (1 + r) = \log (1,039) = 0,0166155.$$

Le quotient de 0,8330521 par 0,0166155 est 50, nombre trop faible : donc le taux est supérieur à 3,90.

Supposons $r = 0,0395$; alors $a - Cr = 217,50$.

$$\log a = \log 1600 = 3,2041200$$
$$\log (a - Cr) = \log 217,50 = 2,3374593$$
$$\log a - \log (a - Cr) = 0,8666607;$$
$$\log (1 + r) = \log (1,0395) = 0,0168245.$$

Le quotient de 0,8666607 par 0,0168245 donne 51. Le taux est donc supérieur

à $3^f,95$. Il est donc compris entre $3^f,95$ et 4. On le connaît ainsi à $0^f,05$ près ; et l'on peut aisément pousser plus loin l'approximation.

409. Cas des rentes perpétuelles. La valeur de l'annuité a, destinée à acquitter un emprunt C, dans un temps donné n, diminue quand n augmente : car, en divisant les deux termes du second membre par $(1+r)^n$, la formule [2] peut s'écrire :

$$a = \frac{Cr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}};$$

et l'on voit que, plus n est grand, plus $\frac{1}{(1+r)^n}$ est petit ; plus le dénominateur est grand, et plus la valeur de a est petite. Si donc l'époque du remboursement s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire, si n grandit indéfiniment, la valeur de a, toujours supérieure à Cr, puisque le dénominateur est moindre que 1, diminue, et a pour limite Cr, c'est-à-dire l'intérêt simple de la somme prêtée. C'est le cas de la rente perpétuelle.

EXERCICES.

I. Un capital de 8500 francs est placé à $4\frac{1}{2}$ pour 100 : que devient-il au bout de 41 ans ?

On trouve $51663^f,86$.

II. Une population de 200000 âmes augmente par an de $1\frac{1}{4}$ pour 100 : à combien montera-t-elle dans un siècle ?

On trouve 692681.

III. Combien de temps un capital de 3500 francs doit-il être placé, à 5 pour 100, pour s'élever à la même somme que 4300 francs, placés à 4 pour 100, pendant 18 ans ?

On trouve $18^{\text{ans}},75^{\text{jours}}$.

IV. Deux capitaux sont placés à intérêts composés : l'un de 38000 francs, à $\frac{1}{2}$ pour 100 ; l'autre de 99398 francs, à $3\frac{1}{2}$ pour 100 ; en combien de temps s'élèveront-ils à la même somme ?

On trouve 100 ans.

V. Quelle est la valeur actuelle d'une rente annuelle de 1500 francs, payable pendant 36 ans, l'intérêt étant à 5 pour 100, et le premier payement devant se faire dans un an ?

La formule est : $$A = \frac{1500 \times \{(1,05)^{36} - 1\}}{(1,05)^{36} \times 0,05};$$

et l'on trouve $24820^f,32$.

VI. On veut payer une dette de 25000 francs, en 7 payements annuels égaux, l'intérêt étant à 4 pour 100. Quelle doit être la valeur de l'annuité?

On trouve $4165^f,16$.

VII. Quelle est l'annuité qui amortit en 48 ans, un emprunt de 36000 francs, au taux de $3\frac{3}{4}$ pour 100 ?

On trouve $1628^f,14$.

VIII. On veut acheter une rente de 3000 francs pour 91650 francs. Pour combien d'années, à raison de 3 pour 100, doit-on concéder la rente?

On trouve 84 ans.

IX. Quelle est la valeur actuelle, au taux de 5 pour 100, de 24 annuités, dont la première est de 1000 francs, payable dans un an, et qui croissent en progression géométrique dont la raison est $\frac{11}{10}$? Calculer le montant de la dernière annuité.

La formule est : $$S = \frac{a}{1+r} \times \frac{\left(\frac{q}{1+r}\right)^n - 1}{\frac{q}{1+r} - 1},$$

dans laquelle : $a = 1000$, $q = \frac{11}{10}$, $r = 0,05$, $n = 24$.

On trouve : $$S = 50817^f,41.$$

La dernière annuité est de $8954^f,30$.

X. Un ouvrier dépose, au commencement de chaque semaine, une somme a à la caisse d'épargne, pendant n années consécutives. Quel est, après ce temps, le montant M de son livret, le taux étant r pour 1 franc, et les intérêts se capitalisant à la fin de chaque année?

On trouve : $$M = a\left(52 + \frac{53r}{2}\right)\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

XI. Une personne verse, dans une banque de prévoyance, une somme v, au commencement de chaque année, pendant n années consécutives. On demande quelle somme a elle doit recevoir, au commencement de chaque année, pendant les $2n$ années suivantes, pour être entièrement remboursée de ses avances.

On trouve : $$a = \frac{v(1+r)^{2n}}{(1+r)^n + 1}.$$

XII. Les conditions étant les mêmes que dans le problème précédent, quel doit être le nombre n, pour que la somme a soit au moins égale à k fois la somme v?

On trouve la condition :

$$(1+r)^n \geqq \frac{k+\sqrt{k(k+4)}}{2},$$

d'où l'on déduit une limite inférieure pour n.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE QUATRIÈME.

DES PROGRESSIONS ET DES LOGARITHMES.

FIN DE LA TABLE.

Coulommiers. — Typ. Paul BRODARD et Cie.

TRAITÉ

D'ALGÈBRE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR :

12810 — Imprimerie A. Lahure, 9, rue de Fleurus, à Paris.

TRAITÉ

D'ALGÈBRE

PAR

JOSEPH BERTRAND

Membre de l'Institut (Académie des sciences)
Ancien professeur à l'École polytechnique et au Collège de France

ET

HENRI GARCET

Ancien élève de l'École normale
Ancien professeur de mathématiques au lycée Henri IV

DEUXIÈME PARTIE

à l'usage des classes de mathématiques spéciales

NOUVELLE ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET C^{ie}

79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1885

TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

LIVRE PREMIER.

COMPLÉMENT DES ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

1. Nous comprenons sous le titre de *Complément des éléments d'algèbre*, les notions sur les séries et leur convergence, le développement de la formule du binome et ses applications, la théorie algébrique des logarithmes et la résolution des équations exponentielles.

CHAPITRE PREMIER.

DES SÉRIES.

§ I. Notions préliminaires.

2. DÉFINITIONS. Une *série* est une suite illimitée de quantités qui se succèdent suivant une loi déterminée. Ces quantités sont les *termes* de la série.

Nous représenterons les termes d'une série par u_0, u_1, u_2..... u_n,.... On dit que u_n est le *terme général :* sa valeur dépend de

celle de n, et, en y donnant à n les valeurs successives 0, 1, 2,...., on obtient les divers termes.

On désigne par S_n la somme algébrique des n premiers termes de la série ; de sorte que l'on a :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

3. Séries convergentes ou divergentes. On dit qu'une série est *convergente*, lorsqu'il existe une limite finie dont la somme S_n s'approche indéfiniment, à mesure que n croît indéfiniment. La limite S, vers laquelle elle tend, se nomme la *somme* de la série.

Si, au contraire, la somme S_n ne tend pas vers une limite fixe, la série est dite *divergente*. Une série divergente ne représente rien, et ne peut être d'aucun usage en analyse.

4. Exemple. Une progression par quotient est une série convergente, lorsque sa raison est moindre que l'unité. On a vu (I, 370), en effet, qu'en supposant q moindre que 1, la somme

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots$$

s'approche indéfiniment de la limite déterminée $\frac{a}{1-q}$.

Une progression géométrique indéfinie, dont la raison surpasse l'unité, est divergente. Car la somme de ses termes croît indéfiniment avec leur nombre.

5. Remarque. *Pour qu'une série soit convergente, il faut qu'à partir d'un terme suffisamment éloigné, le terme un tende vers zéro, quand* n *augmente indéfiniment*. En effet, si une série est convergente et a pour limite S, on peut prendre n assez grand, pour que les sommes S_n, S_{n+1}, S_{n+2} diffèrent de S aussi peu que l'on voudra. Les différences $S_{n+1} - S_n$, $S_{n+2} - S_{n+1}$, sont alors aussi petites qu'on le veut. Or $S_{n+1} - S_n = u_n$, $S_{n+2} - S_{n+1} = u_{n+1}$. Donc les termes u_n, u_{n+1} tendent vers zéro.

Mais *cette condition nécessaire n'est pas suffisante*. Pour le prouver, nous allons faire voir que la série, dite *harmonique*,

$$[1] \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

dont les termes diminuent indéfiniment, est cependant divergente. Et, en effet, si l'on groupe les termes de la manière suivante :

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\ldots,$$

on reconnaît que chaque partie, renfermée entre parenthèses, est plus grande que $\frac{1}{2}$, car la dernière, par exemple, contient n termes, tous supérieurs ou au moins égaux à $\frac{1}{2n}$. Or la série se compose d'une infinité de groupes semblables ; il est donc évident que la somme peut dépasser toute limite assignée.

6. Caractère général des séries convergentes. Le caractère d'une série convergente consiste dans la condition suivante.

Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit qu'on puisse prendre dans la série un nombre n *de termes assez grand à partir du premier, pour que la somme des* p *suivants,*

[a] $$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p-1},$$

soit, quelque grand que soit p, *inférieure, en valeur absolue, à une quantité donnée, si petite qu'elle soit, et tende vers zéro, quand* n *croît indéfiniment.*

La condition est nécessaire : car, si la série est convergente, on peut donner à n une valeur assez grande, pour que, quel que soit p, les deux sommes S_n et S_{n+p} diffèrent de leur limite commune S aussi peu qu'on voudra (3) : leur différence, c'est-à-dire la somme [a], est donc, pour cette valeur de n, inférieure, en valeur absolue, à un nombre donné, si petit qu'il soit ; et elle tend vers zéro, quand n croît indéfiniment.

La condition est suffisante : car, si elle est remplie, on peut choisir pour n une valeur déterminée n' assez grande, pour que la somme,

[b] $$u_{n'}+u_{n'+1}+u_{n'+2}+\ldots+u_{n'+v},$$

soit, en valeur absolue, inférieure, quelque grand que soit p, à un nombre donné α, si petit qu'il soit; par suite, pour cette valeur n', la somme [b] étant comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$, la somme $S_{n'+p}$ est comprise entre les deux nombres fixes $S_{n'}-\alpha$ et $S_{n'}+\alpha$. Et, cela ayant lieu pour toute valeur de p, il est évident que, *pour toute valeur de* n, *plus grande que* n', *la somme* S_n *sera comprise entre les mêmes limites, et ne pourra pas croître indéfiniment avec* n. D'ailleurs, si l'on donne à n' des valeurs de plus en plus grandes, la somme [b] tend vers zéro; les deux nombres $S_{n'}-\alpha$, $S_{n'}+\alpha$ se rapprochent, par suite, indéfiniment l'un de l'autre; la somme S_n a donc une limite finie et déterminée. La série est convergente.

7. Remarque. Il n'est pas toujours facile d'appliquer le caractère général qui précède, et de décider si une série est convergente ou divergente. Un des procédés les plus élémentaires consiste à comparer la série proposée à une autre série que l'on sait être convergente ou divergente; cette comparaison conduit à quelques règles qui permettent de prononcer dans un grand nombre de cas. Nous nous occuperons d'abord des séries dont tous les termes sont positifs.

§ II. Des séries à termes positifs.

8. Théorème I. *Une série, à termes positifs, est convergente, lorsque, à partir d'une certaine limite, le rapport d'un terme au précédent est constamment moindre qu'un nombre fixe plus petit que l'unité : il ne suffirait pas qu'il fût constamment moindre que l'unité.*

La série est divergente, lorsque, à partir d'une certaine limite, le rapport est plus grand que l'unité.

1° Considérons la série,

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots;$$

et supposons qu'à partir du terme u_n, le rapport d'un terme au

précédent soit constamment plus petit qu'un nombre fixe k inférieur à l'unité; nous aurons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<k,\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<k,\quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}<k,\ldots,$$

ou $$u_{n+1}<ku_n,\quad u_{n+2}<ku_{n+1},\quad u_{n+3}<ku_{n+2},\ldots.$$

On déduit évidemment de ces inégalités :

$$u_{n+1}<ku_n,\quad u_{n+2}<k^2u_n,\quad u_{n+3}<k^3u_n,\ldots;$$

en sorte que les termes de la série proposée, à partir de u_n, sont moindres que ceux de la progression géométrique décroissante,

$$u_n+ku_n+k^2u_n+k^3u_n+\ldots;$$

il est donc impossible que leur somme croisse sans limite. Lors donc qu'on prendra un nombre de termes de plus en plus grand dans la série proposée, la somme, qui va sans cesse en augmentant, puisque tous les termes sont positifs, ne pourra cependant pas surpasser tout nombre donné. Il est, dès lors, évident qu'elle a une limite, précisément égale au plus petit des nombres qu'elle ne peut surpasser.

2° Si, à partir d'une certaine limite, le rapport d'un terme au précédent est plus grand que l'unité, il est évident que les termes vont en croissant, et que, par suite, leur somme augmente sans limite. La série est donc divergente.

Remarque. La démonstration précédente serait en défaut, si l'on avait : $k=1$. Dans ce cas, il y aurait doute; et la série pourrait être convergente ou divergente, comme on va le voir par des exemples.

9. Comment on applique ce théorème. Ordinairement le rapport d'un terme au précédent converge vers une limite l, quand n croît indéfiniment.

Si l est inférieur à l'unité, on peut choisir arbitrairement, entre l et 1, un nombre déterminé k. Puisque le rapport tend vers l, on peut prendre n assez grand, pour que ce rapport soit constamment inférieur à k, qui est plus petit que 1. *La série est* don *convergente.*

Si l est plus grand que l'unité, on peut encore choisir arbitrairement, entre 1 et l, un nombre déterminé k; et le rapport, se rapprochant indéfiniment de l, finira par devenir constamment plus grand que k, qui est supérieur à l'unité. *La série est* donc *divergente.*

Si $l=1$, il y a doute; et le théorème I est insuffisant, pour permettre de prononcer sur la convergence ou la divergence de la série. Cependant, *si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par être toujours au-dessus de sa limite* 1, *la série est divergente;* car alors les termes finissent par aller toujours en croissant; et, comme ils sont tous positifs, leur somme peut devenir plus grande que toute quantité donnée.

10. Limite de l'erreur commise. La démonstration du théorème I fait connaître une limite de l'erreur que l'on commet, lorsque l'on s'arrête, dans la sommation d'une série convergente, à un terme d'un certain ordre. Supposons, en effet, qu'à partir du terme u_i, le rapport d'un terme au précédent soit constamment plus petit qu'un nombre k inférieur à l'unité; les termes u_{i+1}, u_{i+2}, $u_{i+3}, \ldots$ seront (8) respectivement moindres que $ku_i, k^2u_i, k^3u_i, \ldots$; et par suite, la somme des termes que l'on néglige, quand on s'arrête à u_{i-1}, sera moindre que $u_i+ku_i+k^2u_i+k^3u_i+\ldots$, ou que $\frac{u_i}{1-k}$. Ainsi, en désignant par ε l'erreur commise, on a :

$$\varepsilon<\frac{u_i}{1-k}.$$

11. Exemples. 1° Soit la série :

$$[2] \quad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots.n}+\ldots$$

Le rapport du $(n+1)^{me}$ terme au précédent est $\frac{1}{n}$; sa limite est zéro, quand n croît indéfiniment. La série est donc convergente.

Si l'on s'arrête au terme $\frac{1}{1.2.3\ldots.i}$, le rapport de l'un quel-

conque des termes qui le suivent au précédent est toujours inférieur à $\frac{1}{i+1}$; on peut donc prendre $k=\frac{1}{i+1}$; et l'on trouve, pour l'erreur commise :

$$\varepsilon<\frac{1}{1.2.3.\dots i}\left(1+\frac{1}{i}\right).$$

2° Si l'on considère la série harmonique [1] (n° 5), le rapport du n^{me} terme au précédent est $\frac{n-1}{n}$, ou $\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Il est toujours plus petit que 1; mais sa limite est 1, quand n croît indéfiniment. Il y a doute; mais on a démontré (5), par un procédé particulier, que la série est divergente.

3° Soit encore la série :

[3] $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots;$$

le rapport du n^{me} terme au précédent est $\frac{(n-1)^2}{n^2}$, ou $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$: et sa limite est encore l'unité. Le théorème I ne nous apprend donc rien. Mais, que l'on groupe les termes de la manière suivante :

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\dots+\frac{1}{15^2}\right)+\dots,$$

c'est-à-dire, de telle sorte que chaque groupe commence par un terme dont le dénominateur est une puissance de 2; la valeur du premier groupe sera plus petite que 2 fois $\frac{1}{2^2}$ ou que $\frac{1}{2}$; celle du second sera moindre que 4 fois $\frac{1}{4^2}$, ou que $\frac{1}{4}$; celle du troisième sera inférieure à 8 fois $\frac{1}{8^2}$, ou à $\frac{1}{8}$; et ainsi de suite. La somme des termes de la série est donc moindre que celle des

termes de la progression décroissante $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$. L série est donc convergente.

12. Cas ou la série est ordonnée par rapport aux puissances d'une variable. Il arrive souvent qu'une série est ordonnée par rapport aux puissances entières et croissantes d'une variable x. Si le terme général u_n est égal à $A_n x^n$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sera égal à $\frac{A_{n+1}}{A_n}x$; et, si l'on désigne par l la limite vers laquelle tend le rapport des coefficients $\frac{A_{n+1}}{A_n}$, quand n croît indéfiniment, le rapport des deux termes aura lui-même pour limite lx. La série sera donc convergente, si l'on a (9):

$$lx<1, \quad \text{ou} \quad x<\frac{1}{l}.$$

Ainsi la série sera convergente, tant que x sera plus petit que $\frac{1}{l}$, et divergente, quand x sera $>\frac{1}{l}$. Il y aura doute, si l'on donne à x la valeur $\frac{1}{l}$.

Exemples. 1° La série

$$[4] \qquad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

a pour coefficients les termes de la série [2]; le rapport des coefficients $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ est donc égal à $\frac{1}{n}$, et sa limite $l=0$. La série est donc convergente pour toute valeur de x inférieure à $\frac{1}{0}$, c'est-à-dire quel que soit x.

2° La série

$$[5] \qquad \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

a pour coefficients les termes de la série harmonique [1]; le

rapport des coefficients est donc $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, et sa limite est 1. La série est donc convergente pour toute valeur de x plus petite que 1, et divergente pour toute valeur de x plus grande que 1. Il y aurait doute, pour $x=1$: mais nous savons (5), qu'alors la série est divergente.

13. Théorème II. *Une série, à termes positifs, dont le terme général est* u_n, *est convergente, lorsque* $\sqrt[n]{u_n}$ *est, pour une certaine valeur de* n, *et pour toutes les valeurs plus grandes, plus petit qu'un nombre fixe* k, *inférieur à l'unité. Elle est divergente, lorsque* $\sqrt[n]{u_n}$ *est constamment plus grand que l'unité.*

1° Si, à partir d'une certaine valeur de n, on a constamment $\sqrt[n]{u_n}<k$, on en déduit les inégalités suivantes :

$$u_n<k^n,\quad u_{n+1}<k^{n+1},\quad u_{n+2}<k^{n+2}\ldots\ldots;$$

en sorte que les termes de la série proposée, à partir de u_n, sont moindres que ceux de la progression géométrique décroissante

$$k^n+k^{n+1}+k^{n+2}+^{n+3}+\ldots\ldots$$

On en conclut comme au n° 8, que la série est convergente.

2° Si, au contraire, à partir d'une certaine valeur de n, $\sqrt[n]{u_n}$ est constamment supérieur à l'unité, il en est de même de u_n ; par suite les termes vont en augmentant : et leur somme peut dépasser toute grandeur donnée.

Remarque. La démonstration est en défaut, si $k=1$. Dans ce cas, il y a doute ; et l'on ne peut affirmer, en général, si la série est convergente ou divergente.

14. Comment on applique le théorème. On prouve d'ailleurs, comme au n° 9, que si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite l plus petite que 1, la série est convergente ; que si l est supérieur à l'unité, la série est divergente ; et qu'il y a incertitude dans le cas où $l=1$. Cependant si $\sqrt[n]{u_n}$ finit par être constamment au-dessus de sa limite 1, la série est divergente.

15. Limite de l'erreur commise. Dans le cas où la série est

convergente, la démonstration précédente fournit une limite de l'erreur ε que l'on commet, lorsqu'on s'arrête à un terme u_{i-1}. On a évidemment :

$$\varepsilon < \frac{k'^{i}}{1-k'},$$

k étant une limite supérieure de $\sqrt[n]{u_n}$.

16. Remarque. Les limites dont les deux théorèmes I et II font dépendre la convergence sont nécessairement égales entre elles.

Soit en effet la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

et

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = k,$$

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = k',$$

dans la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 \ldots + u_n x^n + \ldots\ldots,$$

le rapport d'un terme au précédent a pour limite k_n, et par conséquent elle est convergente ou divergente suivant que x est plus petit ou plus grand que $\frac{1}{k}$, mais la racine n^{me} de terme général $u_n x^n$ a pour limite $k'x$, et par conséquent en vertu du théorème II, elle est convergente ou divergente suivant que n est plus petit ou plus grand que $\frac{1}{k'}$, les deux résultats ne peuvent s'accorder que si k est égal à k'.

17. Théorème III. *Si les termes d'une série,*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots,$$

vont constamment en diminuant, à partir du premier, cette série sera convergente ou divergente, en même temps que la série,

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \ldots\ldots$$

En effet, supposons d'abord la première série convergente. On a évidemment les relations :

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u_0,\\
2u_1 &= 2u_1,\\
4u_3 &< 2u_2 + 2u_3,\\
8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7,\\
16u_{15} &< 2u_8 + 2u_9 + 2u_{10} + \ldots + 2u_{15},\\
\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Si l'on ajoute, membre à membre, ces inégalités, on a :

$$
\begin{gathered}
u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 17u_{15} + \ldots\\
< u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \ldots + 2u_{15} + \ldots;
\end{gathered}
$$

donc la somme d'un certain nombre de termes de la seconde série est plus petite que le double de la somme des termes de la première, terminés au terme de même indice. Or, celle-ci est convergente, par hypothèse; donc la seconde l'est, à plus forte raison. Donc la convergence de la première entraîne celle de la seconde.

Supposons maintenant que la première série soit divergente. En groupant les termes d'une autre manière, on a évidemment:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u_0,\\
2u_1 &> u_1 + u_2,\\
4u_3 &> u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
8u_7 &> u_7 + u_8 + u_9 + \ldots + u_{14},\\
\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$
\begin{gathered}
u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \ldots\\
> u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{14} + \ldots.
\end{gathered}
$$

Ainsi la somme d'un certain nombre de termes de la seconde série est plus grande que la somme des termes de la première, terminés au terme d'indice double. Or celle-ci croît indéfiniment,

par hypothèse : donc la seconde est divergente. Ainsi la divergence de la première entraîne la divergence de la seconde.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

18. Applications. Prenons, pour la première série, la suivante :

$$[6] \qquad 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots\ldots;$$

la seconde sera :

$$1+2^{1-\alpha}+4^{1-\alpha}+8^{1-\alpha}+\ldots\ldots$$

Or cette dernière est une progression géométrique, dont la raison est $2^{1-\alpha}$. Donc elle est convergente, si α est plus grand que l'unité; elle est divergente, si α est égal ou inférieur à l'unité. Donc la première série est convergente, si $\alpha>1$; et divergente, si $\alpha\leqq 1$.

Nous avons déjà obtenu ces résultats pour la série [1] où $\alpha=1$, et pour la série [3] où $\alpha=2$.

Prenons pour la première série, la suivante :

$$[7]\ 1+\frac{1}{2(\log 2)^\alpha}+\frac{1}{3(\log 3)^\alpha}+\frac{1}{4(\log 4)^\alpha}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(\log n)^\alpha}+\ldots\ldots$$

La seconde sera :

$$1+\frac{1}{(\log 2)^\alpha}+\frac{1}{(\log 4)^\alpha}+\frac{1}{(\log 8)^\alpha}+\ldots\ldots+\frac{1}{(\log 2^n)^\alpha}+\ldots\ldots$$

ou, en remarquant que $(\log 2^n)^\alpha=n^\alpha(\log 2)^\alpha$,

$$1+\frac{1}{(\log 2)^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots\ldots\right)$$

Or la série, renfermée entre parenthèses, n'est autre que la série [6]. Donc elle est convergente, si α est plus grand que 1 ; et divergente, si α est égal ou inférieur à 1. Il en est donc de même de la série [7].

19. Remarque. Il n'est pas nécssaire, pour appliquer le théorème III, de commencer la seconde série par le premier

terme de la première : car la convergence d'une série ne dépend que de ses termes éloignés. Ainsi, laissant de côté les i premiers termes, on considérera les deux séries :

$$u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + u_{i+3} + \dots,$$

$$u_i + 2u_{i+1} + 4u_{i+3} + 8u_{i+7} + \dots;$$

elles seront convergentes et divergentes ensemble.

20. Théorème IV. *Une série, à termes positifs, est convergente, lorsque, à partir d'un certain terme, le rapport du logarithme de* $\frac{1}{u_n}$ *au logarithme de* n *est constamment plus grand qu'un nombre fixe* k, *supérieur à l'unité. Elle est divergente, si le rapport est constamment plus petit que l'unité.*

1° Si le rapport de $\log \frac{1}{u_n}$ à $\log n$ est constamment plus grand que k, il en résulte que l'on a :

$$\log \frac{1}{u_n} > k \log n, \quad \text{ou} \quad \log \frac{1}{u_n} > \log n^k;$$

et, par suite,

$$\frac{1}{u_n} > n^k, \quad \text{ou} \quad u_n < \frac{1}{n^k}.$$

Les termes de la série proposée sont donc, à partir de u_n, plus petits que les termes correspondants de la série

$$\frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+2)^k} + \dots;$$

or cette dernière est convergente, puisque k est plus grand que 1 (**17**). Donc la série proposée est aussi convergente.

2° Si, au contraire, le rapport, à partir de u_n, est constamment inférieur à l'unité, on en conclut :

$$\log \frac{1}{u_n} < \log n, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u_n} < n, \quad \text{ou} \quad u_n > \frac{1}{n}.$$

Les termes de la série proposés sont donc, à partir de u_n, plus grands que ceux de la série

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots,$$

laquelle est divergente (5). La série proposée est donc divergente.

Comment on applique le théorème. Si, comme cela arrive le plus ordinairement, le rapport de $\log\frac{1}{u_n}$ à $\log n$ converge vers une limite l, on prouvera, comme au n° 9, que la série est convergente, quand l est supérieur à l'unité; qu'elle est divergente, quand l est inférieur à 1 ; et qu'il y a incertitude dans le cas où $l=1$. Cependant, si le rapport finissait par être constamment inférieur à sa limite 1, la série serait divergente.

21. Remarques. Telles sont les règles les plus élémentaires, à l'aide desquelles on se prononce sur la convergence des séries à termes positifs. Il en existe d'autres, que nous n'avons pas à exposer ici. Nous ferons, toutefois, les deux remarques suivantes, qui trouvent fréquemment leur application.

1° *Si une série, dont tous les termes sont positifs, est convergente, elle le sera encore, quand on multipliera tous ses termes par un même nombre quelconque, ou même par des nombres différents, pourvu qu'ils soient finis.*

En effet, si l'on peut prendre n assez grand, pour que la somme

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p-1},$$

soit, quelque soit p, aussi petite qu'on le veut, et tende vers zéro, quand n augmente indéfiniment (6), il en sera de même de la somme

$$A_n u_n+A_{n+1}u_{n+1}+A_{n+2}u_{n+2}+\ldots+A_{n+p-1}u_{n+p-1},$$

puisqu'elle est inférieure à la somme

$$A(u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p-1}),$$

dans laquelle A est le plus grand des coefficients introduits

2° *Si l'on a une série convergente,*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et qu'une autre série,

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots,$$

soit telle, qu'à partir du terme d'un certain rang i, *on ait constamment :*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

cette seconde série est aussi convergente. Car, si l'on multiplie la première par $\frac{v_i}{u_i}$, nombre fini, on obtient une nouvelle série qui, d'après la première remarque, est encore convergente. Or, à partir du terme v_i, les termes de cette nouvelle série,

$$v_i + v_i \frac{u_{i+1}}{u_i} + v_i \frac{u_{i+2}}{u_i} + \ldots,$$

sont plus grands que les termes correspondants de la seconde,

$$v_i + v_{i+1} + v_{i+2} + \ldots.$$

Donc cette dernière est, à plus forte raison, convergente.

§ III. Des séries dont tous les termes ne sont pas positifs.

22. THÉORÈME I. *Lorsqu'une série n'a pas tous ses termes de même signe, il suffit pour qu'elle soit convergente, qu'elle le soit quand on donne le même signe (+ par exemple) à tous ses termes.*

En effet, puisque la série à termes positifs est convergente, on peut prendre pour n une valeur i assez grande, pour qu'à partir du terme u_i, la somme des p suivants soit aussi petite que l'on voudra, et tende vers zéro, à mesure que i croît [6]. Il en sera donc de même, à plus forte raison, de la somme algébrique des p termes correspondants de la série proposée, puisque, dans la première tous les termes s'ajoutent, et que, dans la seconde, les uns s'ajoutent, et les autres se retranchent. Donc la série proposée [6] est convergente.

On pourra donc appliquer à ces nouvelles séries les règles de convergence données pour celles dont tous les termes sont positifs, et déterminer de même une limite de l'erreur que l'on commet en s'arrêtant à un terme de rang quelconque. Mais il peut arriver qu'une série, dont les termes ne sont pas tous positifs, soit convergente, et qu'elle devienne divergente, quand on donne le même signe à tous ses termes. Il est donc utile de donner des règles spécialement applicables à ce cas : nous nous bornerons à la suivante.

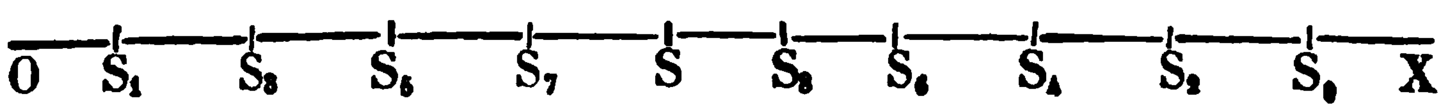
23. Théorème II. *Si dans une série, les termes sont alternativement positifs et négatifs, et qu'ils décroissent indéfiniment, la série est convergente.*

Soit, en effet, la série :

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots,$$

dans laquelle les termes $u_0, u_1, u_2, \ldots$ vont toujours en diminuant, de telle sorte que chacun soit plus petit que le précédent, et que u_n puisse devenir aussi petit qu'on le voudra, si n est suffisamment grand.

Nommons S_0, S_1, $S_2, \ldots$ $S_n, \ldots$ les diverses sommes qu'on obtient, en arrêtant la série successivement, au terme u_0, au terme u_1, au terme $u_2, \ldots$ au terme u_n. Représentons ces sommes



La première, S_0, sera représentée par OS_0. La seconde, S_1, étant égale à $u_0 - u_1$, est plus petite que S_0; représentons-la par la longueur OS_1. La troisième, S_2, étant égale à $S_1 + u_2$, est plus grande que S_1 ; mais elle est plus petite que S_0; car, pour la former, à S_0 on a ajouté $-u_1 + u_2$, quantité négative : elle sera donc représentée par OS_2. La quatrième, S_3, étant égale à $S_2 - u_3$, est plus petite que S_2; mais elle est plus grande que S_1; car, pour la former, à S_1 on a ajouté $u_2 - u_3$, quantité positive : nous la représentons par OS_3. Et ainsi de suite. D'après cela, les sommes S_1, S_3, $S_5, \ldots$ forment une série croissante, et les sommes, S_0, S_2, $S_4, \ldots$ forment une série décroissante. D'ailleurs les termes de la première série n'augmentent pas indéfiniment, car ils sont tous plus petits que les divers termes de la

seconde; cela résulte de la loi même de leur formation. Dès lors, il est évident que ces termes ont une limite, qui est précisément le plus petit des nombres qu'ils ne peuvent pas dépasser. De même, les termes de la série décroissante, $S_1, S_3, S_5, \ldots$ ont une limite; car ils sont plus grands que chacun des termes de la série croissante; et cette limite est le plus grand des nombres auxquels ils restent constamment supérieurs. Enfin, ces deux limites sont les mêmes; car on a : $S_{2n} - S_{2n-1} = u_{2n}$; et, par conséquent, la différence entre deux termes correspondants des deux séries à indices pairs et impairs, peut devenir aussi petite que l'on voudra. Il y a donc, sur la droite OX, entre les extrémités des longueurs qui représentent S_{2n-1} et S_{2n}, une distance qui diminue indéfiniment, quand n augmente indéfiniment; de sorte que ces extrémités se rapprochent indéfiniment d'un point S, qui est leur limite commune. La longueur OS représente la *somme* de la série.

24. Limite de l'erreur commise. *L'erreur que l'on commet, lorsque l'on s'arrête à un terme* u_{i-1}, *est moindre que le terme suivant et de même signe que lui.* En effet, la somme S de la série est évidemment comprise entre S_{i-1} et S_i. Donc l'erreur commise, en prenant S_i pour valeur approchée de S, est moindre que la différence entre S_i et S_{i-1}, laquelle est $\pm u_i$. Les valeurs approchées, que l'on obtient en considérant un nombre de termes de plus en plus grand, sont donc alternativement trop grandes et trop petites : mais l'erreur est, en valeur absolue, moindre que le premier des termes que l'on néglige.

25. Exemple. Soit la série :

$$[8] \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \cdot - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \ldots.$$

Le rapport d'un terme au précédent est, en valeur absolue, $\frac{n}{n+1}x$; et sa limite est x. Donc la série sera convergente (**9** et **22**), si la valeur absolue de x est inférieure à l'unité. Elle sera divergente, si x est plus grand que 1. On verra plus tard, d'ail-

leurs, que, dans ce cas, les termes ne diminuent pas indéfiniment. Si $x=1$, la série est convergente (22) ; car elle devient :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots..,$$

et ses termes, alternativement positifs et négatifs, décroissent indéfiniment. Si, au contraire, on fait $x=-1$, on retrouve la série harmonique, qui est divergente.

Enfin, lorsque la série est convergente, l'erreur ε commise, en s'arrêtant au terme $\frac{x^{n-1}}{n-1}$, est moindre, en valeur absolue, que $\frac{x^n}{n}$, et de même signe que ce terme.

26. Remarque. Quand une série, dont tous les termes ne sont pas positifs, est convergente indépendamment des signes de ses termes, on peut la considérer comme la différence des deux séries convergentes, dont l'une serait formée par les termes positifs, et l'autre par les termes négatifs. En effet, désignons par S_n la somme des n premiers termes de la série, et par $S'_{n'}$ et $S''_{n''}$ les sommes des termes positifs et des termes négatifs compris dans ces n termes ; on a évidemment :

$$S_n=S'_{n'}-S''_{n''}.$$

Or, à mesure que n augmente, en même temps que n' et n'', ces trois sommes, qui sont convergentes, tendent simultanément vers leurs limites S. S', S''.

Mais il faut se bien garder d'étendre cette remarque aux séries qui deviendraient divergentes si tous leurs termes devenaient positifs. On serait ainsi conduit à des erreurs graves. En voici un exemple remarquable.

La série harmonique [1] est divergente. Mais la série

$$[9]\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots,$$

composée des mêmes termes, pris alternativement avec le signe + et avec le signe —, est convergente (22), puisque les termes vont en diminuant indéfiniment. Nous verrons plus tard, qu'elle a pour somme (157) le logarithme népérien de 2.

Or, si, en changeant l'ordre des termes on écrit :

$$[10]\quad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\ldots\ldots,$$

il semble qu'on écrive la même chose, car les deux séries [9] et [10] ont les mêmes termes positifs, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\ldots$, et les mêmes termes négatifs $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8} \ldots$ Cependant leurs sommes sont différentes. En effet, si sans changer l'ordre des termes de la série [9] on les groupe quatre par quatre, le n^{me} groupe sera

$$[\alpha]\qquad \frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n};$$

et l'on obtiendra la somme s de la série, en faisant la somme des valeurs que prend ce groupe, quand on y donne à n toutes les valeurs entières possibles. De même, si l'on groupe trois par trois les termes de la série [10], le n^{me} groupe sera :

$$[\beta]\qquad \frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n};$$

et l'on obtiendra la somme s' de la série, en faisant la somme des valeurs que prend ce groupe, quand on y donne à n toutes les valeurs entières possibles. Or l'excès du groupe [β] sur le groupe [α] est évidemment

$$\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n},$$

ou enfin [γ]
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

On a donc identiquement, quel que soit n :

$$\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Si donc on donne successivement à n, dans cette identité, les

valeurs 1, 2, 3, ... n, et qu'on ajoute les résultats membre à membre, on aura, quel que soit n :

$$\Sigma\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\Sigma\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Si l'on suppose enfin que n croisse indéfiniment, la première somme a pour limite s', et la seconde s. Quant à la dernière, elle a aussi s pour limite, puisque $\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$ est le n^{me} groupe de la série [6], quand on y prend les termes par groupes de deux.

Donc :

$$s'=s+\frac{1}{2}s,$$

d'où :

$$s'=\frac{3}{2}s.$$

Ainsi la somme de la série [10] est les $\frac{3}{2}$ de la somme de la série [9]. Il n'est donc pas permis de changer l'ordre des termes d'une série, lorsqu'elle n'est pas convergente indépendamment des signes de ses termes.

On comprend, en effet, que, dans le cas de la série [9], la somme de ses termes positifs est infinie, ainsi que la somme de ses termes négatifs; de sorte que la somme de la série est la différence de deux infinis, quantité tout à fait indéterminée, dont la vraie valeur doit dépendre de la loi suivant laquelle on s'avance simultanément dans les deux séries.

§ IV. Étude d'une série remarquable.

27. Définitions de e. Parmi les séries, dont on fait usage en analyse, une des plus remarquables est la série

$$[2]\quad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}+\ldots.$$

Nous avons vu [11], que cette série est convergente, et que, si

l'on s'arrête, dans la sommation des termes, au terme $\frac{1}{1.2.3.....i}$, l'erreur commise est moindre que $\left(1+\frac{1}{i}\right).\frac{1}{1.2.3....i}$. On représente par e la somme de la série.

La somme e est comprise entre 2 et 3. En effet, elle est plus grande que 2; et, pour prouver qu'elle est inférieure à 3, il suffit de montrer que l'on a :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+.....+\frac{1}{1.2.3....n}+......<1;$$

inégalité évidente, si l'on remarque que les termes du premier membre sont inférieurs aux termes de même rang de la progression décroissante,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^n}+.....,$$

dont la somme est $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$, ou 1.

28. La série est incommensurable. En effet, supposons, s'il est possible, que l'on ait :

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.....$$

$$+\frac{1}{1.2.3...q}+\frac{1}{1.2.3...q(q+1)}+.....,$$

p et q étant entiers. Si l'on multiplie les deux membres par le produit $1.2.3...q$, le premier membre et les $(q+1)$ premiers termes du second deviennent des nombres entiers : et si l'on désigne par N la somme de ces derniers, il vient :

$$1.2.3...(q-1)p$$

$$=N+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3}+....$$

D'ailleurs la somme des termes qui suivent N est moindre que la somme des termes de la progression décroissante,

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ldots..,$$

c'est-à-dire, moindre que $\frac{1}{q}$; elle est donc une fraction proprement dite. Un nombre entier serait donc égal à un nombre entier augmenté d'une fraction; ce qui est absurde. Donc la série e ne peut être égale à une fraction $\frac{p}{q}$; elle est incommensurable.

29. Calcul de e avec 20 décimales. Le calcul de la valeur numérique de e en fraction décimale ne peut se faire qu'avec une certaine approximation (28). On commet une première erreur en s'arrêtant, dans la sommation de la série, à un terme d'un certain ordre, et en négligeant tous ceux qui le suivent. On en commet une seconde, en réduisant en fractions décimales les termes que l'on conserve : car aucun d'eux, à l'exception des trois premiers, ne se convertit exactement. Or, on calcule que l'on a :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots20}<\frac{412}{10^{21}},\quad \frac{1}{1.2.3\ldots.21}<\frac{20}{10^{21}};$$

donc la première erreur, commise en s'arrêtant au 22^{me} terme, est (27) moindre que $\frac{1}{21}$ de $\frac{20}{10^{21}}$, ou que $\frac{1}{10^{21}}$. Si l'on calcule chacun des 19 termes qui suivent les trois premiers, avec 22 chiffres décimaux, la seconde erreur sera inférieure à 19 unités du 22^{me} ordre décimal, et par suite à $\frac{2}{10^{21}}$. L'erreur totale sera donc moindre que $\frac{3}{10^{21}}$, et, à plus forte raison, qu'une unité du 20^{me} ordre décimal. Voici les valeurs de ces 22 termes avec 22 chiffres décimaux.

2,
0,5
0,16666 66666 66666 66666 66
0,04166 66666 66666 66666 66
0,00833 33333 33333 33333 33
0,00138 88888 88888 88888 88
0,00019 84126 98412 69841 26
0,00002 48015 87301 58730 15
0,00000 27557 31922 39858 90
0,00000 02755 73192 23985 89
0,00000 00250 52108 38544 17
0,00000 00020 87675 69878 68
0,00000 00001 60590 43836 82
0,00000 00000 11470 74559 77
0,00000 00000 00764 71637 31
0,00000 00000 00047 79477 33
0,00000 00000 00002 81145 72
0,00000 00000 00000 15619 20
0,00000 00000 00000 00822 06
0,00000 00000 00000 00041 10
0,00000 00000 00000 00001 95
2,71828 18284 59045 23535 84

Ainsi $e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536...$

RÉSUMÉ.

1. Ce que comprend le complément des éléments d'Algèbre. — 2. Ce qu'on appelle série : terme général d'une série. — 3. Ce qu'on nomme série convergente ou divergente : somme d'une série convergente. — 4. Une progression par quotient est convergente, quand la raison est plus petite que l'unité, divergente dans le cas contraire. — 5. Pour qu'une série soit convergente, il faut que ses termes décroissent indéfiniment ; mais la condition n'est pas suffisante. — 6. Caractère général des séries convergentes. — 7. Procédé ordinaire pour décider si une série est convergente. — 8. Une série, à termes positifs, est convergente, lorsque le rapport d'un terme au précédent est, à partir d'une certaine limite, moindre qu'un nombre fixe plus petit que 1. — 9. Comment on applique le théorème, quand le rapport a une limite. —

10. Limite de l'erreur commise, quand on s'arrête à un certain terme. — **11.** Applications. — **12.** Cas où la série est ordonnée suivant les puissances d'une variable. — **13.** Une série, à termes positifs, est convergente, lorsque $\sqrt[n]{u_n}$ est, à partir d'une certaine limite, plus petit qu'un nombre fixe inférieur à 1. — **14.** Comment on applique le théorème. — **15.** Limite de l'erreur commise.—**16.** Si les termes d'une série $u_0+u_1+u_2+\ldots.$ vont constamment en diminuant, cette série est convergente ou divergente, en même temps que la série $u_0+2u_1+4u_3+8u_7+\ldots$ — **17.** Applications. — **18.** Remarque. — **19.** Une série est convergente, lorsqu'à partir d'un certain terme, le rapport de $\log\frac{1}{r'}$ à $\log n$ est constamment supérieur à un nombre fixe plus grand que 1. — **20.** Comment on applique le théorème. — **21.** Remarques. — **22.** Lorsqu'une série n'a pas tous ses termes positifs, elle est convergente, si elle reste convergente, quand on donne le même signe à tous ses termes. — **23.** Une série, dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, est convergente, quand les termes décroissent indéfiniment. — **24.** Limite de l'erreur commise. — **25.** Application. — **26.** On ne peut pas toujours considérer une série comme la différence entre la somme de ses termes positifs et celle de ses termes négatifs. Exemple remarquable. — **27.** Définition de la série e. — **28.** e est incommensurable. — **29.** Calcul de e avec 20 décimales.

EXERCICES.

I. Prouver que la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2.3\ldots.n}+\ldots.$$

est convergente, en appliquant le théorème II (n° **13**).

II. Si la série $u_0+u_1+u_2+\ldots.+u_n+\ldots.$, est convergente, il en est de même, quels que soient les signes de ses termes, de la série

$$E_0u_0+E_1u_1+\ldots.+E_nu_n+\ldots.;$$

$E_0, E_1, \ldots. E_n, \ldots$, étant des nombres positifs décroissants.

III. Prouver que la série :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots.+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.,$$

est convergente et que sa limite est 1.

IV. Prouver que la série

$$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\ldots.+\frac{1}{2n(2n+2)}+\ldots.,$$

est convergente, et que sa limite est $\frac{1}{4}$.

V. On a identiquement :

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tg}\,1-\text{arc tg}\,\frac{1}{3}+\text{arc tg}\,\frac{1}{3}-\text{arc tg}\,\frac{1}{5}+\text{arc tg}\,\frac{1}{5}-\text{arc tg}\,\frac{1}{7}+\ldots;$$

en conclure :

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tg}\,\frac{1}{2}+\text{arc tg}\,\frac{1}{8}+\text{arc tg}\,\frac{1}{18}+\ldots.+\text{arc tg}\,\frac{1}{2n^2}+\ldots.$$

VI. Prouver que la série

$$\frac{1}{2\log 2\,(\log\log 2)^{\alpha}}+\frac{1}{3\log 3\,(\log\log 3)^{\alpha}}+\ldots.+\frac{1}{n\log n\,(\log\log n)^{\alpha}}+\ldots.$$

est convergente, quand α est supérieur à 1, et divergente, quand $\alpha \leqq 1$.

On applique le théorème III (**16**).

VII. Prouver que les deux séries

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots.+u_n+\ldots.,$$

$$au_a+a^2u_{a^2}+a^3u_{a^3}+\ldots.+a^nu_{a^n}+\ldots.,$$

sont convergentes et divergentes ensemble (Règle donnée par Cauchy).

Ce théorème est une généralisation du théorème III (**16**), et se démontre par un raisonnement analogue.

VIII. Prouver qu'une série

$$u_0+u_1+u_2+\ldots.+u_n+\ldots.$$

est convergente, lorsqu'à partir d'une certaine limite, le rapport de $\log\frac{1}{nu_n}$ au logarithme de $\log n$ tend vers une limite plus grande que 1, et qu'elle est divergente, quand le rapport tend vers une limite plus petite que 1.

IX. Si, dans une série, le rapport d'un terme au précédent est représenté par la formule

$$[\alpha]\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+An^{p-1}+Bn^{p-2}+Cn^{p-3}+\ldots.}{n^p+an^{p-1}+bn^{p-2}+cn^{p-3}+\ldots.},$$

dans laquelle p est entier et positif, et A, B, C,.... a, b, c,.... sont des

nombres constants donnés : 1° les termes croissent sans limite, si $A - a > 0$, et décroissent indéfiniment, si $A - a < 0$.

On compare la série à une autre, dont le terme général $v_n = \frac{(u_n)^h}{n}$, h étant un nombre positif convenablement choisi.

2° Si $A - a = 0$, les termes croissent, sans dépasser une certaine limite, si $B - b > 0$; ils diminuent, sans atteindre zéro, si $B - b < 0$. Dans ce cas, la convergence est impossible.

On compare la série à une autre, dont le terme général est $v_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^h u_n$, h étant un nombre positif convenablement choisi : les termes de celle-ci sont plus grands que ceux de la première, et vont en diminuant, quand $B - b > 0$.

3° Si $A - a < 0$, mais $A - a + 1 \leqq 0$, la série est divergente.

On compare la série à une série divergente, dont le terme général est $v_n = u_n (n - h)$, h étant convenablement choisi.

4° Si $A - a + 1 > 0$, la série est convergente.

On prouve que, dans ce cas, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n-h-1}{n}$, h étant positif et convenablement choisi; que, par suite, $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$. est plus petit que

$$u_n \left\{ 1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} + \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(n+1)(n+2)} + \ldots \right\}$$

On prouve enfin, que les $(p+2)$ premiers termes de la série, entre parenthèses, ont pour somme

$$\frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)\ldots.(n-h+p)}{hn(n+1)\ldots.(n+p)};$$

que cette série est convergente, et a pour limite $\frac{n-1}{h}$, quand p croît indéfiniment.

Il résulte de là que, pour qu'une série soit convergente, lorsque le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle (α), *il faut et il suffit* que $(A - a + 1)$ soit inférieur à zéro : il n'y a pas de cas douteux. Cette règle a été donnée par *Gaus*.

CHAPITRE II.

COMBINAISONS ET FORMULE DU BINOME.

§ I. Des combinaisons.

30. Définitions. On nomme *combinaisons*, n à n, de m objets distincts, les différents groupes que l'on peut former avec n de ces objets; il est utile d'en calculer le nombre.

La question peut être considérée sous deux points de vue, suivant que l'on regarde ou non, comme distincts, les groupes, qui, étant composés des mêmes objets, diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on les place.

Dans le premier cas, les combinaisons reçoivent le nom d'*arrangements*; et dans le second, celui de *produits différents*.

31. Nombre des arrangements. Calculons, d'abord, le nombre des arrangements distincts de m objets pris n à n. Désignons ce nombre par A_n; et représentons par A_{n-1} celui des arrangements des mêmes objets, $(n-1)$ a $(n-1)$. Si tous les arrangements $(n-1)$ à $(n-1)$ étaient formés, en plaçant successivement, à la suite de chacun d'eux, les $[m-(n-1)]$ objets qui n'y entrent pas, on formerait des arrangements n à n, dont le nombre serait

$$A_{n-1}[m-(n-1)], \qquad \text{ou} \qquad A_{n-1}(m-n+1);$$

car chaque arrangement $(n-1)$ à $(n-1)$ fournit, de cette manière, $[m-(n-1)]$ arrangements n à n. Je dis que $A_{n-1}[m-(n-1)]$ est précisément le nombre des arrangements n à n; et pour cela, il faut montrer qu'ils ont tous été formés, et que chacun d'eux ne l'a été qu'une seule fois.

1° On a obtenu tous les arrangements n à n; car on peut former tout arrangement de n objets, en plaçant le dernier d'entre eux à la suite de l'arrangement formé par l'ensemble des $(n-1)$ autres.

2° Un même arrangement n'a pu être formé qu'une fois; car, les arrangements $(n-1)$ à $(n-1)$ étant distincts, ainsi que les

$(m-n+1)$ objets que l'on place à la suite de chacun d'eux, les groupes que l'on forme diffèrent, soit par les $(n-1)$ premiers objets, s'ils proviennent de deux arrangements $(n-1)$ à $(n-1)$ différents; soit par le dernier, s'ils proviennent du même arrangement $(n-1)$ à $(n-1)$.

On a donc la relation :

$$A_n = (m-n+1)A_{n-1}.$$

Cette relation étant démontrée pour une valeur quelconque de n, on aura de même, en désignant par A_{n-2}, A_{n-3}.... A_1, le nombre des arrangements $(n-2)$ à $(n-2)$, $(n-3)$ à $(n-3)$,... un à un :

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= (m-n+2)\,A_{n-2},\\ A_{n-2} &= (m-n+3)\,A_{n-3},\\ &\vdots \\ A_2 &= (m-1)\,A_1. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie ces égalités membre à membre, les facteurs A_{n-1}, A_{n-2},.... A_2 disparaissent; et il vient, en remarquant que le nombre A_1 des arrangements 1 à 1 est m :

$$[1] \quad A_n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1).$$

Ainsi, *le nombre des arrangements de* m *objets distincts* n *à* n *est égal au produit de* n *facteurs entiers, consécutifs, décroissants, à partir de* m.

32. Nombre des permutations. La formule précédente, si on y suppose $n=m$, fera connaître le nombre des arrangements de m lettres m à m. Ces arrangements, dans lesquels figurent toutes les lettres, se nomment des *permutations*. En désignant leur nombre par P_m, on a :

$$[2] \quad P_m = 1.2.3\ldots m,$$

puisque, pour $m=n$, $(m-n+1)$ devient égal à l'unité.

Ainsi, *le nombre des permutations de* m *objets distincts est égal au produit des* m *premiers nombres entiers.*

33. Nombre des produits différents. Les produits différents de m objets, n à n, sont les groupes distincts que l'on peut former,

avec ces m objets, en regardant comme identiques ceux qui ne diffèrent que par l'ordre des objets. On réserve souvent à ces produits le nom de *combinaisons.*

Représentons par C_n le nombre de *ces produits.* Imaginons qu'on les considère tous ensemble, et que l'on forme les *permutations* des n objets contenus dans chacun d'eux ; les groupes, ainsi formés, seront des *arrangements* de m objets donnés n à n. Or, je dis qu'ils y seront tous, et chacun une seule fois.

1° Ils y seront tous ; car les objets qui forment un arrangement, étant considérés indépendamment de leur ordre, composent l'un des produits différents ; et, lorsque l'on permutera *de toutes les manières* les objets qui composent ce produit, l'un des groupes ainsi formés sera l'arrangement considéré.

2° Chaque arrangement sera formé une seule fois ; car les arrangements, qui proviennent d'un même produit, diffèrent par l'ordre des objets ; et ceux qui proviennent de deux produits différents, ne sont pas composés des mêmes objets.

On peut donc obtenir toute la série des arrangements, en permutant les produits différents, de toutes les manières possibles. Or, chaque produit fournit ainsi $1.2.3....n$ arrangements distincts ; le nombre total des arrangements A_n est donc égal au nombre des produits C_n, multiplié par $1.2.3....n$; et l'on a, par conséquent :

$$A_n = C_n.1.2.3....n :$$

d'où, en remplaçant A_n par sa valeur [1] :

$$[3] \qquad C_n = \frac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{1.2.3....n}.$$

Ainsi *le nombre des produits différents de* m *objets*, n *à* n, *est égal au produit de* n *nombres entiers, consécutifs, décroissants à partir de* m, *divisé par le produit des* n *premiers nombres entiers.*

34. Remarque I. La formule précédente peut se mettre sous une forme, que l'on trouve quelquefois plus commode. Si l'on multiplie, en effet, par $1.2.3.... (m-n)$ les deux termes de la fraction qui représente C_n, elle devient :

$$[4] \quad C_n = \frac{1.2.3....(m-n)(m-n+1)(m-n+2)....m}{1.2....n.1.2....(m-n)};$$

en sorte que, au numérateur se trouve le produit des nombres entiers depuis 1 jusqu'à m, et au dénominateur le produit des nombres entiers depuis 1 jusqu'à $(m-n)$, et le produit des nombres entiers de 1 à n.

Remarque II. La formule [4] reste évidemment la même, si l'on change n en $(m-n)$; cette substitution aura seulement pour effet de changer, l'un dans l'autre, les facteurs $1.2\ldots. n$, et $1.2\ldots. (m-n)$ du dénominateur.

Le nombre des produits différents de m *objets* n *à* n, *est, par conséquent, le même que celui de* m *objets* (m — n) *à* (m — n).

L'égalité de ces deux nombres est, d'ailleurs, évidente, *à priori*. Si en effet, dans m objets, on prend un groupe de n, il restera un groupe de $(m-n)$: les groupes ou produits n à n et $(m-n)$ à $(m-n)$ se correspondent donc deux à deux, et sont, par conséquent, en même nombre.

35. Remarque III. *Le nombre des produits différents de* m *objets* n *à* n *est égal à la somme des nombres de produits différents de* (m — 1) *objets* n *à* n, *et de* (m — 1) *objets* (n — 1) *à* (n — 1). On peut, en effet, partager les produits différents de m objets n à n en deux groupes, l'un composé des produits qui ne contiennent pas un certain objet, et l'autre composé de ceux qui le renferment. Or les premiers sont évidemment tous les produits différents des $(m-1)$ autres objets n à n; et si, dans les autres, on supprime l'objet dont il s'agit, ils deviennent les produits des $(m-1)$ autres objets $(n-1)$ à $(n-1)$.

On vérifie, d'ailleurs, directement ce théorème à l'aide de la formule [3].

36. Remarque IV. Le nombre C_n est nécessairement entier la formule [3] prouve donc que *le produit de* n *nombres entier consécutifs est divisible par le produit des* n *premiers nombres entiers.*

§ II. Formule du binome de Newton.

37. Produits de n binomes qui diffèrent par le second terme. Nous avons vu (I, 42), que le produit d'un nombre quelconque de polynomes est la somme de tous les produits que l'on

peut former, en prenant pour facteur un terme de chacun d'eux.

Appliquons cette règle à la formation du produit de m binomes, ayant même premier terme,

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots.(x+l).$$

Si nous ordonnons ce produit suivant les puissances décroissantes de x, il est évident que le premier terme sera x^m, produit formé en prenant, comme facteurs, les m premiers termes des binomes.

Le terme en x^{m-1} se composera des produits dans lesquels on prendra, comme facteurs, les premiers termes de $(m-1)$ binomes, avec le dernier terme du binome restant; et le coefficient de x^{m-1} sera, par conséquent, la somme des seconds termes de nos binomes.

Le terme en x^{m-2} se composera des produits dans lesquels on prendra, comme facteurs, les premiers termes de $(m-2)$ binomes et les derniers termes des deux binomes restants. Le coefficient de x^{m-2} sera, par conséquent, la somme des produits deux à deux des seconds termes.

On verra de même que le coefficient de x^{m-3} est la somme des produits trois à trois des seconds termes; et qu'en général, le coefficient de x^{m-n} est la somme de leurs produits n à n.

On écrit souvent ce résultat de la manière suivante :

$$[1] \qquad (x+a)(x+b)(x+c)\dots.(x+k)(x+l)$$
$$= x^m + x^{m-1}\Sigma a + x^{m-2}\Sigma ab + x^{m-3}\Sigma abc + \dots.$$
$$+ x^{m-n}\Sigma abc\dots.p + \dots. abc\dots.kl;$$

en représentant par Σa, Σab, $\Sigma abc\dots.$ la somme des seconds termes, la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc.

38. Formule du binome. Pour déduire de ce qui précède l'expression de $(x+a)^m$, il suffit de supposer $a=b=c=\dots.=l$; le développement se simplifie alors notablement.

Le premier terme reste égal à x^m.

Le coefficient de x^{m-1}, égal à la somme des seconds termes, devient égal à ma.

Le coefficient de x^{m-2}, égal à la somme des produits deux à deux des seconds termes, devient égal à a^2 multiplié par le nombre de ces produits, c'est-à-dire (33) à

$$\frac{m(m-1)}{2}a^2.$$

Le coefficient de x^{m-3}, égal à la somme des produits trois à trois des seconds termes, devient égal à a^3 multiplié par le nombre de ces produits, c'est-à-dire à

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3.$$

En général, le coefficient de x^{m-p}, qui est la somme des produits p à p des seconds termes, devient égal à a^p multiplié par le nombre de ces produits, c'est-à-dire à

$$\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}a^p.$$

On a donc, enfin :

$$[2]\quad (x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \dots$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}a^px^{m-p} + \dots + a^m.$$

C'est *la formule du binome de Newton.*

39. Remarque I. On voit que, dans le dévelopement de $(x+a)^m$, l'exposant de x va en diminuant d'une unité depuis m jusqu'à zéro, et celui de a va en augmentant d'une unité depuis 0 jusqu'à m; de sorte que, dans chaque terme, la somme des deux exposants est constante et égale à m. Le nombre des termes du développement est $(m+1)$.

On nomme *terme général*, celui qui en a n avant lui; en le désignant par T_n, on a :

$$[5]\quad T_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}a^nx^{m-n}.$$

40. REMARQUE II. Si l'on désigne par T_{n-1} le terme qui précède T_n, on trouve aisément :

[4] $$T_n = T_{n-1} \times \frac{m-n+1}{n}\frac{a}{x}.$$

Or $(m-n+1)$ est l'exposant de x dans T_{n-1}, et n est le nombre qui marque le rang de ce terme. Donc, *pour passer du terme de rang* n, *au terme de rang* (n + 1), *on multiplie son coefficient par l'exposant de* x *dans ce terme, et on le divise par le nombre qui marque son rang, puis on augmente d'une unité l'exposant de* a, *et on diminue d'une unité celui de* x.

41. REMARQUE III. Le coefficient de $a^p x^{m-p}$ est le nombre des produits différents de m lettres p à p ; et celui de $a^{m-p}x$ est le nombre des produits différents de m lettres $(m-p)$ à $(m-p)$. Or ces nombres sont égaux (34). Donc, *dans le développement de* $(x+a)^m$, *les coefficients des termes, situés à égale distance des extrêmes sont égaux.*

42. REMARQUE IV. Le rapport du coefficient de T_n à celui de $_{-1}$ est $\frac{m-n+1}{n}$; il commence par être plus grand que 1, si m est au moins égal à 2 : puis il diminue, à mesure que n augmente, et il finit par être égal à $\frac{1}{m}$, quand $n=m$. Tant qu'il reste plus grand que 1, les coefficients vont en croissant : s'il devient égal à 1 pour une certaine valeur de n, deux coefficients consécutifs sont égaux ; et lorsqu'il est inférieur à 1, les coefficients vont en diminuant. Or la condition

$$\frac{m-n+1}{n} \gtreqless 1,$$

équivaut à $$\frac{m+1}{2} \gtreqless n.$$

Donc, *tant que* n *est inférieur à la moitié du nombre* (m + 1) *des termes, c'est-à-dire tant qu'on n'a pas formé la moitié du nombre total des termes, les coefficients croissent :* ils décroissent dans la seconde moitié du développement.

43. Remarque V. On n'a fait aucune hypothèse sur le signe des nombres x et a; a peut donc avoir une valeur négative $-b$; et l'on a, par conséquent :

$$(x-b)^m = x^m + m(-b)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(-b)^2x^{m-2} + \ldots + (-b)^m;$$

ou, en remarquant que les puissances paires de $(-b)$ sont égales à celles de b, et que les puissances impaires sont égales et de signes contraires :

$$[5] \qquad (x-b)^m = x^m - mbx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}b^2x^{m-2} -$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}b^3x^{m-3} + \ldots \pm b^m;$$

le signe du dernier terme étant $+$ si m est pair, et $-$ si m est impair.

44. Remarque VI. Si, dans la formule [2], on fait $x=1$, $a=1$, on a :

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{m}{1} + 1 :$$

Ainsi *la somme des coefficients du développement est égale à* 2^m.

45. Remarque VII. Si, dans la formule [5], on fait $x=1$, $b=1$, on a :

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots$$

Donc *la somme des coefficients de rang pair est égale à la somme des coefficients de rang impair.*

46. Remarque VIII. Il existe, entre les coefficients des diverses puissances du binome, des relations nombreuses; nous ferons connaître la plus simple, dont on fait un fréquent usage.

Soit :

$$(x+a)^m = x^m + A_1ax^{m-1} + A_2a^2x^{m-2} + \ldots + A_na^nx^{m-n} + \ldots + a^m,$$

le développement de la puissance m^{me} d'un binome, dans lequel on a fait, pour abréger :

$$A_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par $(x+a)$; nous aurons, en effectuant la multiplication du second membre, d'après la règle ordinaire :

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (A_1+1)\,ax^m + (A_2+A_1)\,a^2x^{m-1}$$
$$+ (A_3+A_2)a^3x^{m-2} + \dots + (A_n+A_{n-1})\,a^nx^{m-n+1} + \dots + a^{m+1};$$

et l'on voit que *chacun des coefficients du développement de* $(x+a)^{m+1}$ *s'obtient en ajoutant le coefficient de même rang et le précédent dans le développement de* $(x+a)^m$. On pourrait d'ailleurs vérifier directement, que l'on a :

$$[6]\quad \frac{m.(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} + \frac{m.(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)}$$
$$= \frac{(m+1)m\dots(m-n+2)}{1.2.3\dots n}.$$

§ III. Développement de $(a+b\sqrt{-1})^m$.

47. PUISSANCES SUCCESSIVES DE $\sqrt{-1}$. Pour développer $(a+b\sqrt{-1})^m$, il faut appliquer la formule du binome qui, résultant de la multiplication, est démontrée, d'après nos conventions (I, **261**), pour les expressions imaginaires. Il est nécessaire de former d'abord les diverses puissances de $\sqrt{-1}$. Or, on a, d'après nos conventions :

$$(\sqrt{-1})^2 = -1,$$
$$(\sqrt{-1})^3 = -1 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = +1,$$
$$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1},$$
$$\vdots$$

et, en général,

$$[7] \quad \begin{cases} (\sqrt{-1})^{4k+1} = \sqrt{-1}, & (\sqrt{-1})^{4k+2} = -1, \\ (\sqrt{-1})^{4k+3} = -\sqrt{-1}, & (\sqrt{-1})^{4k} = +1. \end{cases}$$

48. Développement de $(a+b\sqrt{-1})^m$. D'après cela, on a :

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1}b\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^4b^4 + \ldots$$

Les termes, dans lesquels l'exposant de b est pair, sont réels; ils sont les mêmes que ceux du développement de $(a+b)^m$, avec cette différence qu'on doit leur donner, alternativement, le signe $+$ et le signe $-$. Les termes, dans lesquels b a un exposant impair, ont tous $\sqrt{-1}$ en facteur, et sont, à cela près, les mêmes que ceux du développement de $(a+b)^m$, auxquels on aurait donné, alternativement, le signe $+$ et le signe $-$.

On réunit ordinairement les termes imaginaires, et l'on écrit :

$$[8] \quad (a+b\sqrt{-1})^m$$

$$= a^m - \frac{m(m-1)}{1.2.}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 - \ldots$$

$$+ \sqrt{-1}\left[ma^{m1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots\right].$$

Si l'on désigne par P la partie réelle et par Q le coefficient de $\sqrt{-1}$, on a donc :

$$(a+b\sqrt{-1})^m = P + Q\sqrt{-1}.$$

Ainsi *es puissances d'une expression imaginaire sont des expressions imaginaires de même forme.*

Il est facile de voir qu'on a :

$$(a-b\sqrt{-1})^m = P - Q\sqrt{-1}.$$

49. Remarque. $(a+b\sqrt{-1})^m$ peut être réel, sans que b soit

nul. Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les termes imaginaires se détruisent. On a, par exemple :

$$(1+\sqrt{3}.\sqrt{-1})^3=-8.$$

§ IV. Puissance d'un polynome.

50. Développement de la puissance m^{me} d'un trinome. Un trinome $(a+b+c)$ peut être considéré comme un binome, si l'on regarde les deux premiers termes $(a+b)$ comme réunis en un seul. On aura alors :

$$[9]\ [(a+b)+c]^m=(a+b)^m+m(a+b)^{m-1}c+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}c^2$$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots.(m-p+1)}{1.2\ldots.p}(a+b)^{m-p}c^p+\ldots+c^m.$$

Si l'on développe les diverses puissances de $(a+b)$ qui figurent dans le second membre, on obtiendra une somme de termes de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, dans lesquels la somme des exposants α, β, γ, sera constamment égale à m. Car, si l'on considère, par exemple, ceux qui proviennent du terme

$$\frac{m(m-1)\ldots.(m-p+1)}{1.2\ldots.p}(a+b)^{m-p}c^p,$$

ils contiennent le produit de c^p par des puissances de a et b dont les exposants ont une somme égale à $(m-p)$; de sorte que les trois exposants réunis forment une somme égale à m.

Réciproquement, α, β, γ, étant trois nombres entiers quelconques, dont la somme soit égale à m, il y aura dans le développement un terme en $a^\alpha b^\beta c^\gamma$: car, dans [9], se trouve le terme

$$\frac{m(m-1)\ldots.(m-\gamma+1)}{1.2\ldots.\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma;$$

et le développement de $(a+b)^{m-\gamma}$ contient un terme, dans lequel a figure avec l'exposant α, et b, par conséquent, avec l'exposant $(m-\gamma-\alpha)$ ou β.

51. Terme général du développement. Cherchons le coeffi-

cient de ce terme en $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$: il provient, comme nous l'avons dit, de

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\gamma+1)}{1.2\ldots.\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma.$$

ce qui peut s'écrire (33) :

$$\frac{1.2\ldots.m}{1.2\ldots.\gamma.1.2\ldots.(m-\gamma)}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma.$$

Or, dans le développement de $(a+b)^{m-\gamma}$, le coefficient de $a^\alpha b^{m-\gamma-\alpha}$ est égal à

$$\frac{1.2\ldots.(m-\gamma)}{1.2\ldots.\alpha.1.2\ldots.(m-\gamma-\alpha)}.$$

Le terme demandé est donc :

$$\frac{1.2\ldots.m.1.2\ldots.(m-\gamma)}{1.2\ldots.\gamma.1.2\ldots.(m-\gamma)\,1.2\ldots.\alpha.1.2\ldots.(m-\gamma-\alpha)}.a^\alpha b^{m-\gamma-\alpha}c^\gamma;$$

ou, en supprimant le facteur commun $1.2\ldots,(m-\gamma)$, et remplaçant $(m-\gamma-\alpha)$ par β,

$$[10] \qquad \frac{1.2\ldots.m}{1.2\ldots.\alpha.1.2\ldots.\beta.1.2\ldots.\gamma}.a^\alpha b^\beta c^\gamma;$$

et le développement se compose de tous les termes analogues, qui correspondent à toutes les valeurs de α, β, γ, dont la somme soit égale à m.

32. Remarque. On trouvera sans peine, par un procédé tout à fait analogue, que le développement de $(a+b+c+d)^m$ a pour terme général

$$[11] \qquad \frac{1.2\ldots.m}{1.2\ldots.\alpha.1.2\ldots.\beta.1.2\ldots.\gamma..2\ldots.\delta}.a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta,$$

et se compose de tous les termes analogues, qui correspondent à toutes les valeurs de α, β, γ, δ, dont la somme soit égale à m.

On doit observer que, si l'on veut faire représenter à ce terme général tous les termes du développement, sans exception, il faut convenir que, pour $\alpha=0$, on prendra le produit $1.2.3\ldots.\alpha=1$. La même remarque s'applique à la formule précédente.

§ V. Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m croît indéfiniment.

53. Théorèmes sur les limites. 1° *Lorsqu'une quantité variable* A *tend vers une limite* l, *le produit* pA *de cette quantité par un nombre fini* p *tend vers la limite* pl. Car, pour rendre la différence $(pA-pl)$ plus petite, en valeur absolue, qu'une quantité donnée α, il suffit de rendre la différence $(A-l)$ plus petite que $\frac{\alpha}{p}$; ce qui est toujours possible, puisque $(A-l)$ tend vers zéro.

2° *Si plusieurs quantités variables*, A_1, A_2, ... A_n, *en nombre fini* n, *tendent simultanément vers des limites* l_1, l_2, ... l_n, *la limite de leur somme est égale à la somme de leurs limites.* En effet, si l'on pose :

$$A_1=l_1+\alpha_1,\quad A_2=l_2+\alpha_2,\quad \ldots\quad A_n=l_n+\alpha_n,$$

on aura :

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=(l_1+l_2+\ldots+l_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

Or les quantités α_1, α_2, ... α_n tendent vers zéro, par hypothèse ; donc leur somme $(\alpha_1+\alpha_2\ldots+\alpha_n)$, toujours inférieure, en valeur absolue, à n fois la plus grande d'entre elles, tend aussi vers zéro (1°). Donc

$$\lim\,(A_1+A_2+\ldots.+A_n)=l^1+l_2\ldots.+l_n.$$

Mais, si le nombre n des quantités variables augmentait indéfiniment, on ne pourrait plus affirmer la proposition. Considérons, par exemple, la somme des n quantités $\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n}+\ldots.+\frac{\alpha}{n}$. Si n croît indéfiniment, chacune de ces quantités tend vers zéro ; et leur somme, au lieu d'avoir zéro pour limite, est évidemment toujours égale à α.

3° *La limite du produit des* n *quantités variables* $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, *est égale au produit de leurs limites*. En effet, on a :

$$A_1A_2 \ldots . A_n = (l_1 + \alpha_1)(l_2 + \alpha_2) \ldots . (l_n + \alpha_n).$$

Et ce produit de n facteurs binomes renferme (I, 42) d'abord le produit des limites $(l_1 l_2 \ldots . l_n)$, puis une suite de termes dont chacun contient en facteur au moins une des quantités α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$. Or chacun de ces termes, produit d'une quantité fixe par une quantité qui tend vers zéro, tend aussi vers zéro (1°); et comme leur nombre est limité, leur somme a pour limite zéro (2°). Donc

$$\lim.\ A_1A_2 \ldots . A_n = l_1 l_2 \ldots . l_n.$$

Dans ce cas encore, le raisonnement suppose essentiellement que le nombre des quantités variables reste fini.

54. L'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a une limite quand m croît indéfiniment. L'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, dans le cas où m est entier, un produit de m facteurs égaux à $\left(1+\frac{1}{m}\right)$: quand m croît indéfiniment, chacun de ces facteurs a pour limite l'unité; mais on ne peut pas en conclure que la limite du produit est égale à l'unité; car le nombre des facteurs croît indéfiniment.

Pour trouver que cette limite existe, développons $\left(1+\frac{1}{m}\right)$ suivant la formule du binome : nous aurons :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{1}{m^3} + \ldots$$

$$\frac{m(m-1 \ldots . (m-n+1)}{1.\ 2 \ldots .\ n}\frac{1}{m^n} + \ldots .$$

Comme, dans chaque terme, le nombre des facteurs du numé-

rateur est égal au nombre des facteurs m qui entrent comme diviseurs, nous pouvons écrire :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}}{1\,.\,2}+\frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.$$

$$+\frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\ldots\frac{m-n+1}{m}}{1\,.\,2\,\ldots.\,n}+\ldots.$$

Mais on a évidemment :

$$\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\ldots\frac{m-n+1}{m}=1.\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right);$$

par suite :

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots.\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,n}+\ldots.$$

Cela posé, comparons ce développement à la série convergente dont la limite est e :

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2.3\ldots.n}+\ldots.$$

Chaque terme du développement est, à partir du troisième, inférieur au terme correspondant de la série, puisque son numérateur est moindre que l'unité, et que les dénominateurs sont les mêmes. D'ailleurs les termes du développement sont en nombre limité $(m+1)$, tandis que ceux de la série sont en nombre infini. Il en résulte que l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est, quelque grand que soit m, inférieure à e : cette expression, qui augmente avec m, a donc, lorsque m croît indéfiniment, une limite qui ne peut être qu'inférieure ou égale à e. Nous allons prouver que cette limite est égale à e.

55. Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m croît indéfiniment, m restant entier. Puisque la série e est convergente (**11**), on peut donner à n une valeur assez grande, pour que l'erreur commise, en négligeant tous les termes qui suivent le $(n+1)^{ième}$, soit inférieure à une quantité donnée α, si petite qu'elle soit; de sorte qu'en désignant par e_n la somme des $(n+1)$ premiers termes, on a :

$$e-e_n<\alpha.$$

D'un autre côté, si l'on considère les $(n+1)$ premiers termes du développement, on reconnaît qu'à mesure que m croît indéfiniment, n restant fixe, les différents numérateurs tendent vers une limite égale à l'unité (**53**, 3°); par suite, chaque terme du développement a pour limite le terme correspondant de e_n; et leur somme, qui se compose d'un nombre fini des termes, a (**53**, 2°) pour limite e_n. On peut donc prendre m assez grand, pour qu'en désignant par A_n la somme des $(n+1)$ premiers termes du développement, l'on ait :

$$e_n-A_n<\alpha.$$

De ces deux inégalités, on conclut :

$$e-A_n<2\alpha.$$

Ainsi, après avoir choisi pour n une valeur fixe suffisamment grande, on peut toujours, en faisant croître m indéfiniment, satisfaire à la dernière inégalité. D'ailleurs, si l'on donne ensuite à n des valeurs indéfiniment croissantes, le développement A_n augmente, et tend vers sa limite $\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$; 2α tend vers zéro ; donc :

$$e-\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=0,\quad \text{ou}\quad \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)=e. \qquad [12]$$

56. Cas où m prend des valeurs fractionnaires. Si, dans l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, on attribue à m des valeurs fractionnaires de plus en plus grandes, la limite sera toujours la même

et égale à e. Pour le prouver, supposons que, n désignant un nombre entier très-grand, on ait :

$$m = n + \alpha,$$

α étant moindre que l'unité ; l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ sera évidemment comprise entre les expressions

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Car, pour obtenir la première de ces expressions, il faut, dans $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, remplacer le terme $\frac{1}{m}$ et l'exposant m respectivement par les nombres plus grands $\frac{1}{n}$ et $n+1$; pour obtenir la seconde, il a fallu remplacer les mêmes quantités par les nombres plus petits $\frac{1}{n+1}$ et n. Or on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

et

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Comme n est entier et très-grand, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ diffèrent très-peu de e $1+\frac{1}{n}$ et $1+\frac{1}{n+1}$ diffèrent très-peu de l'unité, et les deux expressions précédentes ont l'une et l'autre e pour limite. Il en est, par conséquent, de même de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, qui est compris entre elles.

57. Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m est négatif, et augmente en valeur absolue. La limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est encore la

même, quand on attribue à m des valeurs négatives croissantes. Car, posons $m = -\mu$; μ étant négatif nous aurons :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu} = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)$$

Or, quand μ croit indéfiniment, $\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}$ tend vers e (56), et $\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)$ tend vers 1 : donc encore ici :

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

58. Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m}$ ou de $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$, quand m croît indéfiniment. On a évidemment :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m};$$

donc :

$$[13] \qquad \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m} = \frac{1}{e}.$$

Puis :

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m};$$

donc :

$$[14] \qquad \lim\left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{e}.$$

§ VI. Sommation des piles de boulets.

59. Problème. La méthode la plus simple repose sur la solution préalable du problème suivant :

***Trouver** la somme des puissances* m$^{\text{mes}}$ *des termes d'une progression **par** différence.* Soit la progression :

$$\div a.b.c.d......k,$$

dont la raison est r, et dont le nombre des termes est p.

On veut trouver

$$S_m = a^m + b^m + c^m + ... + k^m.$$

On a, l étant le terme qui suivrait k :

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad d = c + r, ... \; l = k + r.$$

Élevons ces diverses égalités à la puissance $(m+1)$; nous aurons :

$$b^{m+1} = (a+r)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m r + \frac{(m+1)m}{2} a^{m-1}r^2 + ... + r^{m+1},$$

$$c^{m+1} = (b+r)^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)b^m r + \frac{(m+1)m}{2} b^{m-1}r^2 + ... + r^{m-1},$$

$$\vdots$$

$$l^{m+1} = (k+r)^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m r + \frac{(m+1)m}{2} k^{m-1}r^2 + ... + r^{m-1}.$$

Ajoutons toutes ces égalités, il vient, en désignant généralement par S_p la somme $a^p + b^p + ... + k^p$;

$$[15] \quad l^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)rS_m + \frac{(m+1)m}{1.2} r^2 S_{m-1}$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} r^3 S_{m-2} + ... + pr^{m+1}.$$

Cette équation fera connaître S^m, si l'on connaît S_{m-1}, $S_{m-2}...$, S_2, S_1. En y faisant donc successivement $m = 1$, $= 2$, $= 3$, etc., on obtiendra successivement S_1, puis S_2, puis S_3, etc.

60. Application. Supposons, par exemple, que la progression proposée soit la suite des n premiers nombres entiers :

$$\div 1.2.3.4...,n;$$

on a ici :

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p; \; a = 1, \; l = n+1, \; r = 1, \; p = n;$$

et notre formule générale devient :

$$[16] \quad (n+1)^{m+1} = 1 + (m+1)\,S_m + \frac{(m+1)m}{1.2}\,S_{m-1},$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\,S_{m-2} + \ldots + \frac{(m+1)m\ldots 3.2}{1.2\ldots m}\,S_1 + n.$$

Faisant d'abord $m=1$, il vient ;

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n; \quad \text{d'où} \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

formule déjà connue.

En faisant $m=2$, il vient :

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n;$$

d'où $$S_2 = \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{6},$$

ou $$[1] \quad S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Telle est la formule qui va nous servir pour la sommation des piles de boulets.

Elle se déduit, comme on voit, d'une formule beaucoup plus générale, qui pourrait donner également la somme des cubes, la somme des quatrièmes puissances.... des nombres naturels. Si l'on veut seulement arriver le plus simplement possible à ce résultat, qui est le seul dont on ait, actuellement, à faire usage, on peut procéder comme il suit.

61. Recherche directe de la somme des carrés des n premiers nombres entiers. On a évidemment :

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1,$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1,$$
$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1,$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1;$$

ajoutant toutes ces égalités, il vient, après que l'on a supprimé les termes cemmuns aux deux membres, et en désignant par S_2

la somme des carrés des nombres naturels et par S_1 la somme des premières puissances :

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

équation identiqne à celle du paragraphe précédent, et dont on déduira la même valeur de S_2.

62. Piles triangulaires. La base d'une pile triangulaire est formée par des boulets rangés en triangle équilatéral. La première rangée contenant 1 boulet, la seconde 2, la troisième 3, la n^{me} n, le nombre total des boulets employés est ici :

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

La tranche immédiatement supérieure est formée par des boulets rangés également en triangle équilatéral, dont le côté contient un boulet de moins; le nombre des boulets de cette seconde tranche s'obtiendra donc en changeant, dans la formule précédente, n en $(n-1)$; on aura ainsi $\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$. La troisième tranche contiendra de même $\frac{(n-2)^2+(n-2)}{2}$ boulets; et ainsi de suite jusqu'à la première, qui en contient $\frac{1^2+1}{2}$.

Le nombre total est, d'après cela :

$$T = \frac{n^2+n}{2} + \frac{(n-1)^2+(n-1)}{2} = \frac{(n-2)^2+(n-2)}{2} + \ldots + \frac{1^2+1}{2};$$

ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$T = \frac{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2}{2} + \frac{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1}{2},$$

ou, en vertu des formules écrites plus haut (60) :

$$T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12}$$

ou [18] $$T = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Telle est la formule qui exprime le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire.

63. Pile a base carrée. La base d'une pareille pile est formée par des boulets rangés en carré, dont le nombre total est n^2, n désignant le nombre de ceux qui sont contenus dans le côté de ce carré. La seconde tranche contiendra $(n-1)^2$ boulets, la troisième $(n-2)^2$, etc., et enfin la dernière n'en contient qu'un. Le nombre total est donc :

$$Q = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1$$

ou [19] $$Q = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

64. Pile a base rectangulaire. La base d'une pareille pile est formée par des boulets rangés en rectangle. Si l'un des côtés de la base contient m boulets et l'autre côté n, le nombre total des boulets qui la composent sera mn. La tranche suivante est un rectangle, dont les côtés comprennent respectivement $(m-1)$ et $(n-1)$ boulets; elle en contient, par conséquent, un nombre égal à $(m-1)(n-1)$; la troisième tranche en contient de même $(m-2)(n-2)$; et ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui est une file de $(m-n+1)$ boulets (si l'on suppose $m > n$). Le nombre total que nous cherchons est donc :

$$R = mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \ldots + (m-n+1)1.$$

Posons $m-n=p$: on aura : $m=n+p$, et la formule deviendra :

$$R = n(n+p) + (n-1)(n-1+p) + (n-2)(n-2+p) + \ldots + 1(1+p),$$

c'est-à-dire :

$$R = [n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2] + p[n + (n-1) + \ldots + 1],$$

ou, d'après les formules connues (60) :

$$R = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + p.\frac{n(n+1)}{2}$$

ou enfin [20] $$R = \frac{n(n+1)(2n+3p+1)}{6}$$

65. Moyen de vérifier des formules. Nous ferons connaître, à l'occasion des formules précédentes, un mode de raisonnement très-fréquemment employé, et qu'il suffira de développer sur un seul exemple.

Supposons que l'on donne, sans démonstration, la formule

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Comment devra-t-on s'y prendre pour en vérifier l'exactitude?

On commencera par faire les hypothèses les plus simples :

Pour $n=1$, on a : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1.2.3}{6}=1$;

Pour $n=2$, on a : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2.3.5}{6}=5=1^2+2^2$;

Pour $n=3$, on a : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{3.4.7}{6}=14=1^2+2^2+3^2$.

La formule est donc exacte pour les valeurs 1, 2, 3 du nombre n. Cela posé, pour prouver qu'elle est générale, il suffit de montrer, qu'en la supposant vraie pour une certaine valeur de n, elle l'est, par cela même, pour la valeur immédiatement supérieure. Admettons que l'on ait :

$$[a] \qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

il faut prouver que l'on aura, par suite :

$$[b] \quad 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Les premiers membres des équations [a] et [b] ont pour différence $(n+1)^2$. Si donc il en est de même des seconds membres, la première égalité entraîne nécessairement la seconde. Or on a :

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)[(n+2)(2n+3)-n(2n+1)]}{6}=\frac{(n+1)(6n+6)}{6}=(n+1)^2.$$

Le théorème est donc vérifié.

Une marche semblable s'appliquerait aux diverses formules, qui représentent le nombre des boulets dans les différents cas.

RÉSUMÉ.

30. Définition des combinaisons; ce que l'on nomme arrangements, produits différents. — 31. Nombre des arrangements de m objets, pris n à n. — 32 Nombre des permutations de m objets. — 33. Nombre des produits différents de m objets n à n. — 34. Forme plus simple de l'expression du nombre des produits différents. Le nombre des produits différents de m lettres n à n est le même que celui de m lettres $(m-n)$ à $(m-n)$. — 35. Le nombre des produits différents de m objets n à n est la somme des nombres de produits différents de $(m-1)$ objets n à n, et de $(m-1)$ objets $(n-1)$ à $(n-1)$. — 36. Le produit de n nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des n premiers nombres entiers. — 37. Formation du produit de m binomes qu ont le même premier terme. — 38. Puissance d'un binome.—39. Terme général du binome. — 40. Moyen de former un terme, connaissant le précédent. — 41 Les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux. — 42. Les coefficients vont en croissant jusqu'au milieu. — 43. Puissance d'un binome dont le second terme est négatif. — 44. Somme des coefficients du binome. — 45. La somme des coefficients de rang pair est égale à celle des coefficients de rang impair. — 46. Relations entre les coefficients de deux puissances successives de $(x+a)$. — 47. Puissances successives de $\sqrt{-1}$. — 48. Développement de $(a+b\sqrt{-1})^m$. — 49. Conditions pour que le résultat soit réel. — 50. Puissance d'un trinome. — 51. Terme général du développement. 52. Terme général du développement de $(a+b+c+d)^m$.—53. Théorèmes sur les limites. — 54. L'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a une limite, quand m croît indéfiniment. — 55. Cette limite est e, quand m est entier. — 56. Elle est encore e, quand m est fractionnaire. — 57. Elle est encore e, quand m est négatif. — 58. La limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m}$ ou de $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$ est $\frac{1}{e}$. — 59. Somme des puissances semblables des termes d'une progression. — 60. Application. — 61. Somme des carrés des nombres naturels. — 62. Piles triangulaires. — 63. Piles à base carrée. — 64. Piles à base rectangle. — 65. Moyen de vérifier l'exac-

titude de la formule qui donne la somme des carrés des nombres naturels.

EXERCICES.

I. En désignant par $\overset{n}{[m]}$ le produit $m(m-1)\dots(m-n+1)$, vérifier les formules :

1°
$$\overset{m}{[(a+b)]} = \overset{m}{[a]} + m\overset{m-1}{[a]}b$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\overset{m-2}{[a]}\overset{2}{[b]} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}\overset{m-n}{[a]}\overset{n}{[b]} + \dots + \overset{m}{[b]}.$$

2°
$$\overset{m}{[(a+b+c)]} = \overset{m}{[a]} + \dots + \frac{1.2\dots m}{1.2\dots\alpha.1.2\dots\beta.1.2\dots\gamma}\overset{\alpha}{[a]}\overset{\beta}{[b]}\overset{\gamma}{[c]} + \dots;$$

le second membre contenant les termes analogues à ceux que nous avons écrits, et correspondant à toutes les valeurs de α, β, γ, pour lesquelles $\alpha+\beta+\gamma=m$. On regarde $\overset{0}{[a]}$ comme égal à 1.

On considère chacun des termes comme représentant un nombre d'arrangements.

II. Trouver le nombre x des termes du développement de $(a+b+c)^m$ et le nombre y de ceux de $(a+b+c+d)^m$.

On trouve :

$$x = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}, \qquad y = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}.$$

III. Vérifier la formule :

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^n - n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6} + \dots$$
$$+(-1)^p\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\dots(n-2p+1)}{1.2.3\dots p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots$$

On démontre que, si la formule est vraie pour deux valeurs consécutives de n, elle est vraie pour la valeur immédiatement supérieure.

IV. Vérifier la formule

$$1.2\dots m = (m+1)^m - m.m^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-2)^m + \dots$$

Méthode analogue à la précédente : ou bien, on exprime, de deux manières, la m^{me} *différence* de x^m (voir Liv. III).

V. Trouver le plus grand terme du développement de $(x+a)^m$.

Ce terme est :

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}a^p x^{m-p},$$

p étant le plus grand entier contenu dans la fraction $\frac{(m+1)a}{x+a}$.

VI. x et a étant donnés, et m augmentant indéfiniment, trouver la limite du rapport de leurs exposants dans le terme maximum du développement de $(x+a)^m$.

Cette limite est $\frac{x}{a}$.

VII. Trouver le plus grand terme de $(a+b+c)^m$, et les rapports limites des exposants de a, b, c dans ce plus grand terme, lorsque m augmente indéfiniment.

Ce plus grand terme se déduit de l'exercice IV ; et les exposants, dans ce terme, tendent à être proportionnels à a, b, c.

VIII. Vérifier que $(x+a)^m+(x-a)^m$ est plus grand que $2x^m$, en valeur absolue. En déduire le maximum de $x+y$, lorsque x^m+y^m est donné.

IX. Vérifier la formule :

$$(x+\alpha)^m = x^m + m\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}$$

$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}$$

$$+\ldots+m\alpha[\alpha-(m-1)\beta]^{m-2}[x+(m-1)\beta]+\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.$$

Cette formule, dans le cas de $\beta=0$, ne diffère pas de celle du binome : elle a lieu, quelque soit β.

Application de la méthode du n° 65 ; ou vérification directe.

X. Nombre de manières de décomposer un polygone en triangles par les diagonales : démontrer les formules :

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + PP_3P_{n-1} + P_n$$

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n}P_n;$$

P_n désignant de combien de manières cette décomposition peut se faire, pour un polygone de n côtés.

On cherche, pour la première, de combien de décompositions fait partie chacun des triangles qui ont pour base un même côté du polygone, et, pour la seconde, dans combien de décompositions entre une même diagonale.

XI. Si l'on considère une permutation de n nombres 1, 2, 3,...n, que l'on dise qu'il y a *dérangement*, quand un nombre est suivi, immédiatement ou non, d'un autre plus petit que lui; prouver que le nombre total des dérangements, contenue dans les permutations de ces n nombres, est égal à $(1.2\ldots n).\frac{n(n-1)}{4}$.

On prouve d'abord que $D_{n+1}=(n+1)D_n+\frac{n}{2}P_n$, en désignant par D_n le nombre de dérangements relatifs aux permutations des n nombres, et par P_n le nombre des permutations. On en conclut :

$$D_{n+p}=(n+1)(n+2)\ldots(n+p)D_n+\frac{1}{2}\left[pn+\frac{p(p-1)}{2}\right]P_{n+p};$$

et de là, en faisant $n=1$, et changeant ensuite $p+1$ en n, on tire la formule demandée.

XII. Trouver la somme des carrés des coefficients du binome.

Cette somme est le coefficient de $a^m x^m$, dans le développement de $(x+a)^{2m}$.

XIII. Cette somme peut être représentée par les deux formules :

$$\frac{2n.(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{2.6.10.14\ldots 4n-2}{1.2\ldots n};$$

prouver que ces formules sont équivalentes.

Application de la méthode du n° **65**; ou vérification directe.

XIV. Prouver que si, dans la somme des n fractions

$$S=\frac{1-x}{1-a}+\frac{(1-x)(a-x)}{a-a^2}+\ldots+\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)\ldots(a^{n-1}-x)}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}-a^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

on fait $x=a^n$, cette somme devient égale à n.

Application de la méthode du n° **65**.

XV. Trouver la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, lorsque m croît indéfiniment. Cett limite est e^x. Former le série qui la représente.

XVI. Prouver que la série

$$\frac{1}{z^{\alpha_1}}+\frac{1}{z^{\alpha_2}}+\frac{1}{z^{\alpha_3}}+\ldots+\frac{1}{z^{\alpha_m}}+\ldots$$

dans laquelle z est un nombre entier, ainsi que les exposants α_1, α_2,... α_m,

une limite incommensurable, lorsque les différences $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1} - \alpha_m$, vont toujours en augmentant.

On suit une marche analogue à celle qui a servi pour prouver que e est incommensurable.

XVII. Trouver la somme des cubes des n premiers nombres entiers.

On trouve (**60**) : $\quad S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, ou $S_3 = S_1^2$.

XVIII. Si l'on nomme S_m la somme des m^{mes} puissances des n premiers nombres naturels, prouver que S_m est compris entre $\dfrac{(n+1)^{m+1}}{m+1}$ le $\dfrac{n^{m+1}}{m+1}$, m désignant un nombre entier quelconque.

On applique la formule [16], (n° **60**).

CHAPITRE III.

COMPLÉMENT DE LA THÉORIE DES LOGARITHMES.

§ I. Des exposants incommensurables.

66. Exposants incommensurables. Nous avons expliqué, dans la première partie (380), comment on définit un nombre incommensurable, en disant quels sont les nombres commensurables plus petits, et quels sont les nombres commensurables plus grands que lui. Nous avons dit aussi (381 et suiv.) comment on doit entendre les opérations relatives à ces sortes de nombres.

Si l'on considère l'expression a^x, dans laquelle x a une valeur commensurable, cette expression a été définie (I, 105), et ne présente aucune obscurité ; car, en supposant x égal à $\frac{m}{n}$, m et n étant entiers, on a :

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Nous supposerons toujours que a soit positif, et nous ne considérerons que les valeurs réelles et positives du radical ; il n'y a donc là ni difficulté ni ambiguïté. Si x a une valeur négative $(-m)$, a^x est défini (I, 88) par l'équation

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Il nous reste donc à définir a^x, lorsque x est un nombre incommensurable, positif ou négatif. On doit, dans ce cas, adopter la définition suivante :

a^x *est la limite vers laquelle tendent les puissances de* a, *dont l'exposant commensurable s'approche de plus en plus de* x.

Cette définition est très-simple, mais elle exige quelques développements. On pourrait, en effet, se demander si la limite est bien déterminée; et si, quelle que soit la série des exposants commensurables qui s'approchent indéfiniment de x, la limite

des puissances de a est toujours la même. Pour le démontrer, il faut établir quelques propositions.

67. Théorème I. *Toutes les puissances commensurables d'un nombre positif sont positives.* Cela résulte de ce que, comme nous l'avons dit, nous ne considérons que les valeurs positives des radicaux.

68. Théorème II. *Toutes les puissances positives d'un nombre plus grand que l'unité sont elles-mêmes plus grandes que l'unité, et toutes les puissances négatives sont moindres que l'unité.*

Le contraire a lieu pour les puissances d'un nombre moindre que l'unité.

Soit, en effet, a un nombre plus grand que l'unité, et soit $a^{\frac{m}{n}}$ une puissance positive de a; on a, par définition :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

or, a étant plus grand que l'unité, il en est évidemment de même de la puissance entière a^m, et par suite de $\sqrt[n]{a^m}$.

Les puissances positives de a étant plus grandes que l'unité, l'égalité

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

montre que les puissances négatives, qui sont leurs inverses, sont moindres que l'unité.

Enfin, si l'on suppose à a une valeur moindre que l'unité, on peut le représenter $\frac{1}{a'}$, a' étant plus grand que l'unité; on aura alors :

$$a^x = \frac{1}{a'^x};$$

et il est évident que les valeurs de x, qui rendent a'^x plus grand que l'unité, rendent a^x plus petit, et réciproquement.

69. Théorème III. *Si* x *reçoit des valeurs commensurables croissantes, l'expression* a^x *varie toujours dans le même sens; elle aug-*

mente, si a est plus grand que l'unité; elle diminue, dans le cas contraire.

Soient, en effet, p et q deux valeurs commensurables, positives ou négatives, attribuées successivement à x; on a (I, 91) :

$$\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}.$$

Or $(q-p)$ est positif, puisque, par hypothèse, q est plus grand que p. Si donc a est plus grand que l'unité, il sera de même de a^{q-p}; et, par suite, on aura $a^q > a^p$. Si, au contraire, a est moindre que l'unité, il en sera de même de a^{q-p}; et l'on aura $a^q < a^p$. Donc a^x augmente, dans le premier cas, quand x passe de la valeur p à la valeur p; et il diminue dans le second.

70. THÉORÈME IV. *On peut, dans l'expression* a^x, *donner au nombre commensurable* x *un accroissement assez petit pour que* a^x *varie aussi peu qu'on le voudra.*

Soit m une valeur commensurable quelconque de x; je dis que l'on peut augmenter m d'une quantité α assez petite pour que la différence $(a^{m+\alpha}-a^m)$ soit aussi petite qu'on le voudra.

On a : $$a^{m+\alpha}=a^m\times a^\alpha,$$

et, par suite, $$a^{m+\alpha}-a^m=a^m(a^\alpha-1).$$

Or a^m est un nombre indépendant de α; il suffit donc de prouver que $(a^\alpha-1)$ peut être rendu aussi petit qu'on le voudra, pour des valeurs suffisamment petites de α.

Supposons d'abord a plus grand que l'unité. Quelle que soit la valeur positive de α, a^α sera toujours (68) plus grand que l'unité. Pour montrer qu'il en approche autant qu'on veut, il suffit de faire voir qu'il peut devenir plus petit qu'un nombre quelconque $(1+\varepsilon)$ supérieur à l'unité, et que, quelque soit ε, on peut choisir α, de manière que l'on ait,

$$a^\alpha<1+\varepsilon.$$

Posons, en effet, $\alpha=\frac{1}{k}$, les valeurs indéfiniment décroissantes

de α correspondant aux valeurs indéfiniment croissantes de k; l'inégalité précédente devient :

$$a^{\frac{1}{k}} < (1+\varepsilon),$$

ou, ce qui revient au même :

$$(1+\varepsilon)^k < a.$$

Or, les puissances entières de $(1+\varepsilon)$ forment une progression par quotient croissante, dont les termes (I, **361**) peuvent surpasser toute limite. La dernière inégalité est donc toujours possible; et, par suite, la proposition est démontrée, dans le cas de $a>1$.

Si a est moindre que 1, on le repréeente par $\frac{1}{a'}$, a' étant plus grand que l'unité; a^α sera alors égal à $\frac{1}{a'^\alpha}$; or, a'^α différant, d'après ce qui précède, aussi peu que l'on voudra, de l'unité, il en sera évidemment de même de a^α.

71. Définition rigoureuse de a^x. Les théorèmes qui précèdent sont indispensables pour donner de a^x une définition parfaitement rigoureuse, dans le cas où x est incommensurable. Chacun d'eux forme d'ailleurs une proposition qu'il serait indispensable de connaître, quand bien même on ne s'astreindrait pas, comme nous l'avons fait, à ne laisser subsister aucune difficulté sur ce point important.

Nous dirons : a^x *représente, pour une valeur incommensurable* h, *attribuée à* x, *un nombre compris entre les valeurs de* a^x, *qui correspondent à des exposants commensurables moindres que* h, *et celles qui correspondent à des exposants commensurables plus grands que* h. Cette définition, analogue à celle que nous donnons, en arithmétique, pour les racines carrées et cubiques, et, en algèbre élémentaire, pour les logarithmes, assigne à a^x une valeur unique et déterminée.

Si l'on suppose, en effet, pour fixer les idées, que les valeurs de a^x représentent des longueurs portées, sur une ligne droite, à partir d'une certaine origine, les extrémités de celles qui correspondent à des valeurs de x moindres que h occuperont une

certaine région de la droite; les extrémités de celles qui correspondent aux valeurs de x plus grandes que h en occuperont une autre; et *il résulte, des théorèmes précédents*, que ces régions sont entièrement séparées (69), et qu'il ne peut exister entre elles aucun intervalle d'étendue finie (**70**), mais un simple point de démarcation. La distance, à laquelle ce point se trouve de l'origine, mesure a^x.

§ II. L'expression a^x peut prendre toutes les valeurs positives, lorsque a est un nombre positif, plus grand ou plus petit que l'unité.

72. Continuité de la fonction a^x. Nous venons de voir (**70**), que si, le nombre a étant donné, l'exposant x reçoit des accroissements suffisamment petits, l'expression a^x peut varier aussi peu qu'on le voudra. On dit, d'après cela, que cette expression est une *fonction continue* de x; et le mot *continue* exprime qu'elle ne peut passer brusquement d'une valeur à une autre, sans être susceptible d'acquérir les valeurs intermédiaires.

73. L'expression a^x peut prendre toutes les valeurs positives. Il résulte de la *continuité de l'expression* a^x, que, a *étant positif, et* x *variant de* $-\infty$ *à* $+\infty$, *cette expression peut prendre toutes les valeurs positives.* Pour le démontrer, nous distinguerons deux cas.

1° a *est plus grand que l'unité.* Les puissances entières et positives de a forment une progression croissante; et, par suite (I, **361**), il existe toujours un exposant assez grand pour que a^x dépasse toute grandeur assignée d'avance. D'ailleurs, pour $x=0$, a^x devient l'unité; et, par conséquent, la fonction considérée, pouvant être égale à l'unité et à un nombre aussi grand que l'on voudra, peut acquérir, en vertu de la continuité, toutes les valeurs intermédiaires. On voit donc que, x variant de 0 à $+\infty$, a^x varie de 1 à $+\infty$, et prend toutes les valeurs plus grandes que l'unité.

Si l'on donne à x des valeurs négatives, en posant, par exemple, $x=-m$, on aura :

$$a^x=\frac{1}{a^m};$$

et, m variant de 0 à $+\infty$, le dénominateur du second membre prend toutes les valeurs possibles plus grandes que l'unité; et, par suite, la fraction prendra toutes les valeurs moindres que 1. On voit donc que, x variant de $-\infty$ à 0, a^x varie de 0 à 1.

Il est clair, d'ailleurs, que a^x ne peut pas prendre deux fois la même valeur; car si l'on avait, par exemple :

$$a^x = a^{x'},$$

on en conclurait :

$$1 = \frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x};$$

or, la puissance zéro d'un nombre plus grand que 1 est évidemment la seule qui soit égale à l'unité; et l'on devrait avoir :

$$x = x'.$$

2° a *est plus petit que l'unité*. Posons $a = \frac{1}{a'}$; a' sera plus grand que l'unité. On aura :

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

Or, d'après ce qui précède, x variant de 0 à $+\infty$, a'^x prendra toutes les valeurs possibles supérieures à l'unité; donc a^x prendra évidemment toutes celles qui sont moindres. Puis, x variant de 0 à $-\infty$, a'^x prendra toutes les valeurs moindres que l'unité; et, par suite, a^x prendra évidemment toutes celles qui sont plus grandes que l'unité. En sorte que, dans ce cas encore, a^x peut prendre toutes les valeurs positives.

§ III. Propriétés générales des logarithmes.

74. La définition, que nous avons adoptée (I, 372), permet de démontrer les propriétés essentielles des logarithmes; mais, pour leur étude plus approfondie, il est convenable de prendre un autre point de départ; et nous adopterons une définition nouvelle.

75. Définition des logarithmes. Lorsqu'on a la relation

$$a^x = b,$$

on dit que x est le *logarithme* du nombre b, dans le système dont la base est a; et on l'écrit ainsi :

$$x = \log b.$$

Tout nombre positif a un logarithme, dans le système dont la base est a, et n'en a qu'un seul; car on a vu (73) que, quand x croît par degrés continus de $-\infty$ à $+\infty$, a^x passe par toutes les valeurs positives, et ne passe qu'une fois par chacune. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels.

L'ensemble des logarithmes des différents nombres, correspondant à une même base a, forme ce que l'on nomme un *système de logarithmes.* Les logarithmes d'un même système jouissent de propriétés fort importantes que nous allons d'abord démontrer. Nous supposons toujours la base positive.

76. Théorème I. *Le logarithme du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.*

Soient, en effet, x et y les logarithmes des nombres b et c; on a (75) :

$$a^x = b, \quad a^y = c;$$

et, en multipliant ces deux équations membre à membre ;

$$a^{x+y} = bc;$$

donc $(x+y)$ est le logarithme de bc; et l'on a :

$$\log bc = \log b + \log c.$$

77. Théorème II. *Le logarithme du quotient de deux nombres est égal à la différence des logarithmes de ces nombres.*

Soient, en effet, x et y les logarithmes de deux nombres b et c, on a (75) :

$$a^x = b, \quad a^y = c;$$

et, en divisant ces deux équations membre à membre

$$a^{x-y}=\frac{b}{c};$$

donc $(x-y)$ est le logarithme de $\frac{b}{c}$; et l'on a :

$$\log\frac{b}{c}=\log b-\log c.$$

78. Théorème III. *Le logarithme de la puissance* n^me *d'un nombre est égal, quel que soit* n *(entier ou fractionnaire, positif ou négatif), au produit de* n *par le logarithme de ce nombre.*

Soit x le logarithme de b ; on a :

$$a^x=b;$$

d'où, en élevant les deux membres à la puissance n :

$$a^{nx}=b^n;$$

donc nx est le logarithme de b^n ; et l'on a :

$$\log b^n=n\log b.$$

Ce théorème comprend évidemment le théorème IV (I, 392) relatif au logarithme d'une racine.

79. Théorème IV. *Dans un système quelconque de logarithmes, l'unité a pour logarithme zéro, et la base du système a pour logarithme l'unité.*

On a, en effet, quel que soit a,

$$a^0=1,$$

$$a^1=a.$$

80. Théorème V. *Lorsque la base d'un système est plus grande que l'unité, les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes positifs, et les nombres moindres que l'unité ont des logarithmes négatifs. Le contraire a lieu, lorsque la base est moindre que l'unité.*

On a vu, en effet (68), que les puissances positives d'un nom-

bre, plus grand que l'unité, sont plus grandes que l'unité, et ses puissances négatives sont moindres que l'unité. Le contraire a lieu pour les puissances des nombres moindres que l'unité. Si donc a est plus grand que l'unité, l'équation

$$a^x = b$$

exige que x, c'est-à-dire $\log b$, soit positif, si b est plus grand que l'unité, et négatif, dans le cas contraire.

Si, au contraire, a est moindre que l'unité, l'équation

$$a^x = b$$

exige que x, c'est-à-dire $\log b$, soit négatif, si b est plus grand que l'unité, et positif, dans le cas contraire.

81. Remarque. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes; car les puissances, positives ou négatives, d'une base positive, sont toutes positives.

§ IV. Identité des logarithmes algébriques et arithmétiques.

82. Remarque. Il est essentiel de démontrer que les logarithmes, tels que nous les avons définis, ne diffèrent pas de ceux que l'on considère en arithmétique, et qui naissent de la considération de deux progressions.

83. Les logarithmes algébriques rentrent dans les systèmes considérés en arithmétique. Si l'on considère, en effet, des nombres en progression par quotient, commençant par l'unité :

$$\because 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : \ldots . q^n : q^{n+1},$$

et que l'on nomme x le logarithme de q, les logarithmes des différents termes de cette progression seront (78) :

$$0,\ x,\ 2x,\ 3x,\ \ldots,\ nx,\ (n+1)x;$$

ainsi *quand des nombres sont en progression par quotient, commençant par l'unité, leurs logarithmes* (75) *forment une progression arithmétique commençant par* 0.

Si maintenant on insère un nombre k de moyens entre les

termes consécutifs des deux progressions, on dit, en arithmétique, que *les termes introduits par là, dans la progression par différence, sont les logarithmes des termes correspondants, dans la progression par quotient*. Or nous allons voir que les conséquences de cette définition sont d'accord avec celle que nous donnons en algèbre (75).

Si, en effet, nous insérons k moyens entre les termes q^n, q^{n+1}, de la progression par quotient, et k moyens entre les termes nx, $(n+1)x$, de la progression par différence, les raisons des progressions formées par ces moyens seront

$$\sqrt[k+1]{q}, \quad \frac{x}{k+1};$$

et le p^{me} moyen sera, dans la progression par quotient,

$$q^n \times (\sqrt[k+1]{q})^p,$$

et dans la progression par différence,

$$nx + p\left(\frac{x}{k+1}\right).$$

Mais on a :

$$q^n \times (\sqrt[k+1]{q})^p = q^{n+\frac{p}{k+1}},$$

$$nx + p\left(\frac{x}{k+1}\right) = x\left(n + \frac{p}{k+1}\right);$$

et, puisque x est, par hypothèse, le logarithme de q, le second de ces nombres est bien (78) le logarithme du premier.

Ainsi, *lorsqu'on insère un même nombre de moyens dans les deux progressions, les termes introduits dans la progression par différence sont les logarithmes* (75) *des termes correspondants de la progression par quotient*.

84. Réciproque. Nous venons de voir qu'un système de logarithmes, tel que nous l'avons défini (75), peut toujours résulter de la considération de deux progressions convenablement choisies, et rentre ainsi dans les systèmes considérés en arithmétique. On peut faire voir aussi que *le système de logarithmes,*

défini par deux progressions quelconques, satisfait toujours à la définition donnée (75).

Soit, en effet, le système défini par les deux progressions :

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ q,\ q^2,\ldots.\ q^n,\ldots. \\ 0,\ \delta,\ 2\delta,\ldots.\ n\delta,\ldots. \end{array}\right.$$

Posons $$q^n=\beta,\quad n\delta=\gamma,$$

γ étant le logarithme de β; on tire de la seconde de ces équations :

$$n=\frac{\gamma}{\delta};$$

et, en remettant cette valeur dans la première,

$$q^{\frac{\gamma}{\delta}}=\beta,\quad \text{ou}\quad \left(q^{\frac{1}{\delta}}\right)=\beta$$

γ est donc l'exposant de la puissance, à laquelle il faut élever la base fixe $q^{\frac{1}{\delta}}$, pour reproduire le nombre β; γ est donc le logarithme de β pris, d'après notre nouvelle définition, dans le système dont la base est $q^{\frac{1}{\delta}}$.

§ V. Des divers systèmes de logarithmes.

85. Comment on passe d'un système a un autre. Le nombre a, dont les puissances servent à former tous les nombres, se nomme la *base* du système de logarithmes que l'on considère. Si l'on change de base, tous les logarithmes changent; mais il est facile de voir qu'*ils conservent des valeurs proportionnelles, et se multiplient tous par un même facteur, que l'on nomme module du nouveau système par rapport au premier.*

Soient a et a' deux bases quelconques, x et x' les logarithmes d'un même nombre b dans les deux systèmes, de sorte que l'on ait :

[1] $$a^x=b,$$

[2] $$a'^{x'}=b.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de la première équation, dans le système dont la base est a'; nous aurons :

$$[3] \qquad x l_{a'} a = l_{a'} b,$$

le signe $l_{a'}$ désignant le logarithme d'un nombre dans le système dont la base est a. Or, si on se rappelle que x est le logarithme de b dans le système dont la base est a, l'équation [3] prouve que les deux logarithmes du nombre b, dans les systèmes dont les bases sont a' et a, ont pour rapport le nombre constant $l_{a'}a$.

On aurait pu, également, prendre les logarithmes des deux membres de l'équation [2], en opérant cette fois dans le système dont la base est a; on aurait eu alors :

$$x' l_a a' = l_a b.$$

Donc le rapport des deux logarithmes du nombre b, pris, respectivement, dans les systèmes dont les bases sont a' et a, est $\frac{1}{l_a a'}$. Nous avions trouvé, plus haut, que ce même rapport est $l_{a'}a$. Pour que ces deux résultats coïncident, il faut que l'on ait

$$l_a a' = \frac{1}{l_{a'} a}.$$

Or, cette égalité est évidente ; si l'on pose, en effet :

$$l_a a' = y,$$

$$l_{a'} a = z,$$

on a, par définition, $a^y = a'$,

$$a'^z = a.$$

Remettant, dans la seconde équation, la valeur de a' fournie par la première, il vient :

$$(a^y)^z = a^{yz} = a.$$

Donc on doit avoir : $yz = 1.$

86. LOGARITHMES NÉPÉRIENS. Les logarithmes ont été découverts, au commencement du dix-septième siècle, par J NÉPER,

baron écossais. La base de son système est le nombre incommensurable e, que nous avons défini (27). Ces logarithmes se nomment *logarithmes népériens*, et on les désigne par la lettre L. *Callet* les a inscrits, dans ses tables, sous le nom de *logarithmes hyperboliques*. Ce sont eux qui se présentent le plus naturellement dans l'analyse mathématique.

Considérons les deux progressions :

$$\div\!\div 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots\ldots : (1+\alpha)^m : \ldots\ldots,$$

$$\div 0 \,.\, \beta \,.\, 2\beta \,.\, 3\beta \,\ldots\ldots\, m\beta \,\ldots\ldots,$$

α et β étant excessivement petits, afin que les termes croissent très-lentement, et que l'on puisse regarder tous les nombres comme faisant partie de la progression par quotient. On peut définir le système de logarithmes, en donnant la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, quand α et β tendent simultanément vers zéro. Néper supposa cette limite égale à 1. Dans cette hypothèse, les deux progressions sont :

$$\div\!\div 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots\ldots : (1+\alpha)^m : \ldots\ldots$$

$$\div 0 \,.\, \alpha \,.\, 2\alpha \,.\, 3\alpha \,\ldots\ldots\, m\alpha \,\ldots\ldots$$

Si la base est $(1+\alpha)^m$, son logarithme $m\alpha$ est égal à l'unité, par suite $\alpha = \frac{1}{m}$, et la base devient $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Si α tend vers zéro, m croît sans limite, et l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ converge (55) vers le nombre e, base du système népérien.

87. Logarithmes vulgaires. Les logarithmes népériens ne se prêtent pas commodément aux calculs numériques, parce que la base est incommensurable. Aussi, quelques années après la publication de Néper, on construisit une nouvelle table de logarithmes, dits *logarithmes vulgaires*, dont la base est 10. Ce sont ces logarithmes, dont nous avons, dans la première partie, expliqué les usages et développé les applications. On les désigne par le signe *log*.

Si l'on appelle x et y les logarithmes d'un même nombre dans le système népérien et dans le système vulgaire, on a :

$$e^x = 10^y;$$

d'où, prenant les logarithmes dans le premier système, on tire :

$$x = y\,\mathrm{L}.10, \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{\mathrm{L}10}x.$$

Ainsi, *pour obtenir les logarithmes des nombres dans le système vulgaire, on multiplie les logarithmes népériens des mêmes nombres par l'inverse du logarithme népérien de la nouvelle base.* C'est ce facteur $\frac{1}{\mathrm{L}.10}$, que l'on nomme spécialement *module* du système vulgaire. En le désignant par la lettre M, on a :

$$y = \mathrm{M}\,x.$$

Si l'on avait pris les logarithmes des deux nombres dans le système vulgaire, on eût eu :

$$x \log e = y.$$

Donc $$\mathrm{M} = \log.e.$$

88. Logarithmes négatifs. Lorsque, dans l'équation

$$a^x = b,$$

le nombre b est moindre que l'unité, a étant plus grand que 1, son logarithme x est négatif : car on a vu (**73**), que c'est en faisant varier x de 0 à $-\infty$, que l'on fait prendre à a^x les valeurs comprises entre 0 et 1. Ainsi : *les nombres moindres que l'unité ont des logarithmes négatifs.* Ces logarithmes jouissent de toutes les propriétés démontrées plus haut (**76**, etc.); car on n'a fait jusqu'ici aucune hypothèse sur le signe des nombres considérés. On remarquera seulement que les logarithmes négatifs ne sont pas directement fournis par les tables. Mais leur détermination n'offrira pas pour cela plus de difficultés. Supposons, en effet,

que le nombre b, plus petit que l'unité, soit donné sous forme d'une fraction $\frac{m}{n}$, on aura :

$$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n = -(\log n - \log m);$$

et, par suite, le logarithme négatif s'obtiendra par une soustraction.

Mais les logarithmes négatifs ne sont d'aucun usage; et il est facile, lorsque l'on en rencontre, de les préparer, de manière que leur caractéristique seule soit négative. On a, en effet, par exemple :

$$-3{,}4582764 = 4 - 3{,}4582764 - 4 = \bar{4}{,}5417236;$$

c'est-à-dire que l'*on augmente d'une unité la caractéristique, on la prend avec le signe —, et l'on remplace la partie décimale par son complément* (I,411).

VI. Résolution des équations exponentielles.

89. Définition. On appelle *équation exponentielle* une équation de la forme

$$a^x = b,$$

dans laquelle a et b sont deux nombres positifs donnés. Résoudre l'équation, c'est trouver la valeur de x, pour laquelle elle est satisfaite.

90. Résolution de l'équation $a^x = b$. Pour trouver cette valeur de x, il suffit de prendre les logarithmes des deux membres de l'équation. On aura ainsi :

$$x \log a = \log b,$$

et, par suite, $$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

La base du système, dans lequel les logarithmes sont calculés, est arbitraire. Cela n'a, d'ailleurs, aucune influence sur le résultat : car on a vu (85), qu'en passant d'un système à un autre,

on doit multiplier tous les logarithmes par un même nombre; et, par suite, le rapport $\frac{\log b}{\log a}$ n'est pas changé.

91. Résolution de l'équation $a^{b^x} = c$. On peut résoudre, par les mêmes procédés, l'équation $a^{b^x} = c$, dans laquelle a, b, c, sont des nombres positifs donnés. Car, en prenant les logarithmes des deux membres, on a :

$$b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

Pour que la solution existe, il faut que log a et log c soient de même signe : on peut alors les supposer positifs; et prenant, une seconde fois, les logarithmes, on a :

$$x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$$

§ VII Remarques sur les questions d'intérêt.

92. Nous avons exposé complétement, dans la première partie, les applications de la théorie des logarithmes aux questions d'intérêts composés. Nous n'y reviendrons pas ici; et nous nous bornerons à la remarque suivante.

On a démontré, qu'une somme A, placée à intérêts composés, devient, après n années,

$$A\,(1 + r)^n.$$

Les conventions, faites sur les exposants négatifs et fractionnaires, permettent, maintenant, de généraliser cette formule.

Si n est fractionnaire et représenté par $\frac{p}{q}$, *supposons que l'on étende le principe des intérêts composés aux fractions d'année*; et nommons x, ce que rapporte 1 franc, pendant $\frac{1}{q}$ d'année.

1 franc rapportant x après $\frac{1}{q}$ d'année, devient, au bout de ce temps, $(1 + x)$; et une somme quelconque, placée pendant le même temps, se multipliera par $(1 + x)$. Si donc on place 1 franc

pendant $\frac{q}{q}$ d'année, c'est-à-dire pendant une année entière, il se multipliera q fois par $(1+x)$ ou par $(1+x)^q$; et, comme d'ailleurs il doit devenir $1+r$, on a :

$$(1+x)^q = 1+r;$$

d'où l'on déduit : $$1+x = (1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

Et il est évident que 1 franc, placé pendant $\frac{p}{q}$ année, se multipliera par $(1+x)^p$, c'est-à-dire par $(1+r)^{\frac{p}{q}}$, et que, par suite, une somme quelconque A deviendra

$$A\,(1+r)^{\frac{p}{q}};$$

ce qui est conforme au résultat énoncé.

2° Si n est négatif, nous envisagerons la question de la manière suivante :

Une somme vaut aujourd'hui A; *elle est placée depuis un temps indéterminé : combien valait-elle, il y a* n *années?*

Si l'on désigne par X la valeur inconnue, cette somme, placée pendant n années, est devenue A; par suite, d'après ce qui précède :

$$A = X\,(1+r)^n,$$

d'où l'on déduit : $$X = A\,(1+r)^{-n};$$

ce qui est encore conforme à la formule donnée plus haut.

RÉSUMÉ.

66. Des exposants incommensurables. — 67, 68, 69, 70. Lemmes sur les puissances commensurables. — Définition rigoureuse de a^x, quand x est incommensurable. — 72. La fonction a^x est continue. — 73. Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, a étant positif, a^x prend toutes les valeurs positives, et ne prend chacune qu'une seule fois. — 74, 75. Nouvelle définition des logarithmes. — 76. Logarithme d'un produit. — 77. Lo-

garithme d'un quotient. — 78. Logarithme d'une puissance. — 79. Logarithme de 1, et logarithme de la base. — 80. Nombres qui ont des logarithmes positifs, et nombres qui ont des logarithmes négatifs. — 81. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes. — 82. Remarque. — 83. Si des nombres sont en progression par quotient, leurs logarithmes sont en progression par différence. Cas où l'on insère de nouveaux termes dans les progressions. — 84. Les logarithmes, définis dans la première partie, sont les mêmes que ceux qui résultent de la définition nouvelle. — 85. Comment on peut passer d'un système à un autre. — 86. Logarithmes népériens : leur base. — 87. Logarithmes vulgaires ; leur module. — 88. Logarithmes négatifs. — 89. Définition de l'équation exponentielle. — 90. Résolution de l'équation $a^x=b$. — 91. Résolution de l'équation $a^{b^x}=c$. — 92. Généralisation des formules relatives aux questions d'intérêt.

EXERCICES.

I. Résoudre les équations :

$$x^y=y^x, \qquad x^p=y^q.$$

On trouve :
$$x=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}, \qquad y=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}.$$

II. Résoudre les équations :

$$x^y=y^x, \qquad p^x=q^y.$$

On trouve :
$$x=\left(\frac{\log p}{\log q}\right)^{\frac{\log q}{\log p-\log q}}, \qquad y=\left(\frac{\log p}{\log q}\right)^{\frac{\log p}{\log p-\log q}}.$$

II. Résoudre l'équation :

$$3^{2x}\times 5^{3x-4}\pm 7^{x-1}\times 11^{2-x}.$$

On trouve :
$$\frac{4\log 5+2\log 11-\log 7}{2\log 3+3\log 5-\log 7+\log 11}.$$

IV. Résoudre l'équation :

$$(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}=\frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}.$$

On trouve :

Si $a>b$,
$$x=\frac{\log(a-b)}{\log(a+b)};$$

Si $a < b$, $$x=\frac{\log(b-a)}{\log(b+a)}.$$

V. Résoudre l'équation :

$$5^{x+1}+5^{x-2}-5^{x-3}+5^{x-4}=4739.$$

On trouve : $$x=4+\frac{\log 4739-\log 3146}{\log 5}.$$

VI. Résoudre l'équation :

$$3^{x^2-4x+5}=1200.$$

On trouve : $$x=2\pm\sqrt{\frac{\log 400}{\log 3}}.$$

VII. Résoudre l'équation :

$$7^{2x}-6.7^x+5=0.$$

On ramène la résolution à celle des équations :

$$7^x=1, \quad 7^x=5.$$

VIII. Résoudre l'équation :

$$a^1a^3a^5\ldots a^{2x-1}=n.$$

On trouve : $$x=\sqrt{\frac{\log n}{\log a}}.$$

CHAPITRE IV.

VÉRIFICATION DES FORMULES D'ALGÈBRE.

§ I. Conditions d'identité de deux polynomes.

93. LEMME. *Lorsqu'un polynome est ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une variable* x, *on peut donner à cette variable une valeur, positive ou négative, assez petite numériquement, pour que, pour cette valeur et pour toutes les valeurs inférieures, le polynome prenne et conserve le signe de son premier terme.*

Soit, en effet, le polynome :

$$Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots + Hx^t,$$

dans lequel les exposants m, n, p, ... t, vont en augmentant. On peut l'écrire sous la forme :

$$Ax^m\left(1 + \frac{B}{A}x^{n-m} + \frac{C}{A}x^{p-m} + \dots + \frac{H}{A}x^{t-m}\right).$$

Or, si l'on donne à x une valeur très-petite, chacun des termes, qui suivent l'unité dans la parenthèse, prend une valeur très-petite, puisque les exposants sont positifs ; et, comme leur nombre est fini, la quantité, renfermée entre parenthèses, diffère très-peu de l'unité. Le polynome prend donc une valeur de même signe que Ax^m ; et il conserve ce signe pour toutes les valeurs inférieures de x.

94. THÉORÈME I. *Deux polynomes, rationnels et entiers en* x, *ne peuvent être égaux, quelle que soit la valeur attribuée à* x, *que s'ils sont composés identiquement des mêmes termes.*

Soient, en effet, les deux polynomes, ordonnés par rapport à x.

$$[1] \qquad Px^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \dots + P_{m-1}x + P_m,$$

$$[2] \qquad Qx^n + Q_1x^{n-1} + Q_2x^{n-2} + \dots + Q_{n-1}x + Q_n.$$

Si les deux polynomes [1] et [2] doivent être égaux, quel que

soit x, ils le seront, en particulier, par $x = 0$; et par conséquent, on doit avoir $P_m = Q_n$. En supprimant ces deux termes communs, les deux restes seront encore égaux; et leur différence devra être nulle, quel que soit x. Or cette différence, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x, a pour premier terme $(P_{m-1} - Q_{n-1})x$. Si ce terme n'était pas nul, on pourrait, d'après le lemme, prendre x assez petit, pour qu'il donnât son signe à la différence; celle-ci ne serait donc pas nulle pour cette valeur de x. Donc $P_{m-1} = Q_{n-1}$. En supprimant les deux termes égaux du premier degré, on verra de même, que la différence commencera par un terme du second degré $(P_{m-2} - Q_{n-2})x^2$, qui devra être nul à son tour. Et, en continuant, on concluera que les termes doivent être, dans les deux polynomes, les mêmes et en même nombre.

95. THÉORÈME II. *Deux polynomes entiers et rationnels, qui renferment un nombre quelconque de lettres arbitraires, et indépendantes les unes des autres, ne peuvent être égaux, que s'ils sont composés identiquement des mêmes termes.*

Pour établir ce théorème, il suffit de montrer que, si la proposition est vraie pour deux polynomes renfermant n lettres arbitraires, elle le sera aussi pour deux polynomes qui en contiendraient $(n+1)$. Considérons, pour cela, deux polynomes renfermant $(n+1)$ lettres, x, y, z, u, v,....p; ordonnons-les l'un et l'autre, par rapport à l'une de ces lettres, x par exemple; ils prendront la forme :

$$[1] \qquad A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m,$$

$$[2] \qquad B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_n;$$

A_0, A_1, A_2,....A_m, B_0, B_1, B_2....B_n, contenant les n variables, y, z, u, v,....p. Les polynomes [1] et [2] étant égaux, quel que soit x, on doit avoir (94) :

$$[3] \qquad m = n,\ A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2, \ldots A_m = B_n.$$

Or le théorème est admis pour le cas de n variables; donc les égalités [4] exigent que les polynomes A_0 et B_0, A_1 et B_1,.... A_m et B_n soient respectivement composés des mêmes termes; et

que, par conséquent, les polynomes [1] et [2] soient identiquement les mêmes.

§ II. Vérification de l'égalité de deux expressions algébriques.

96. Cas où toutes les quantités arbitraires sont indépendantes les unes des autres. D'après le théorème précédent, pour vérifier une équation entre quantités arbitraires, il suffit d'en faire disparaître les radicaux et les dénominateurs, et de constater que les deux membres sont composés identiquement des mêmes termes.

Si cela n'a pas lieu, on peut affirmer que l'égalité proposée n'est pas exacte pour toutes les valeurs des lettres qu'elle renferme.

97. Cas où les quantités arbitraires ne sont pas toutes indépendantes. Lorsque l'égalité n'a lieu qu'en vertu de certaines relations entre les lettres qui y sont contenues, il faut, pour la vérifier, exprimer, au moyen de ces relations, un certain nombre de lettres en fonction de celles que l'on peut considérer comme arbitraires, et substituer ces valeurs dans l'équation proposée. Après la substitution, l'équation rentrera dans le cas précédent.

§ III. Application à quelques problèmes.

98. Problème I. *Examiner si les équations*

$$[1] \qquad \frac{\gamma}{c_1}+\frac{c}{\gamma_2}=1, \qquad \frac{\gamma_1}{c_2}+\frac{c_1}{\gamma}=1 \qquad [2]$$

entraînent la suivante :

$$[3] \qquad cc_1c_2+\gamma\gamma_1\gamma_2=0.$$

On a ici deux relations [1] et [2] entre les six quantités c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 ; on doit donc en tirer les valeurs de deux de ces six quantités en fonction des quatre autres. On en tire de l'équation [1] :

$$[4] \qquad \gamma=\frac{c_1(\gamma_2-c)}{\gamma_2}.$$

On tire de [2] :

$$\gamma_1 = c_2 - \frac{c_1 c_2}{\gamma},$$

ou, en remplaçant γ par la valeur [4] :

$$\gamma_1 = c_2 - \frac{c_2 \gamma_2}{\gamma_2 - c},$$

ou :

[5] $$\gamma_1 = - \frac{c c_2}{\gamma_2 - c}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'égalité à vérifier [3], on a :

$$c c_1 c_2 - \frac{c_1(\gamma_2 - c) c c_2 \gamma_2}{\gamma_2(\gamma_2 - c)} = 0 ;$$

ce qui devient une identité, quand on supprime le facteur $(\gamma_2 - c)\gamma_2$ commun au numérateur et au dénominateur du second terme.

99. Problème II. *Examiner si l'égalité*

[1] $$\frac{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}}{\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c} + \mathrm{d}} = \frac{\mathrm{ac} - \mathrm{bd}}{\mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{c} - \mathrm{d}},$$

entraîne l'égalité

[2] $$\frac{\mathrm{ac} - \mathrm{bd}}{\mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{c} - \mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} + \mathrm{d}}{4}.$$

Il faut, conformément à la méthode indiquée, déduire de l'égalité [1] la valeur de l'une des quatre lettres qu'elle renferme, et substituer cette valeur dans l'équation [2], qui doit alors devenir identique.

Si l'on chasse les dénominateurs de l'équation [1], il vient :

$$a^2 d - ad(b + d - c) - abc + bc(b + d - c)$$
$$= a^2 c - ac(b + c - d) - abd + bd(b + c - d),$$

ou, en réunissant les termes en a, et réduisant :

[3] $$a^2(d - c) - a(d^2 - c^2) - b^2(d - c) + b(d^2 - c^2) = 0.$$

Si l'on divise tous les termes par $(d-c)$, il vient :

$$a^2-a(d+c)-b^2+b(d+c)=0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$[4] \qquad a^2-b^2-(a-b)(c+d)=0,$$

ou, en divisant par $(a-b)$:

$$a+b-c-d=0,$$

c'est-à-dire : $a=c+d-b.$

Si l'on remet cette valeur dans l'équation [2], elle devient :

$$\frac{c^2+cd-cb-bd}{2c-2b}=\frac{2c+2d}{4},$$

ou

$$\frac{(c-b)(c+d)}{2(c-b)}=\frac{c+d}{2},$$

ce qui a lieu identiquement.

Remarque. Nous avons supprimé, dans les équations [3] et [4], les facteurs $(d-c)$ et $(a-b)$. Le résultat n'est donc applicable que dans le cas où ces deux différences ne sont pas nulles. On peut vérifier, en effet, que pour $a=b$ comme pour $c=d$, l'équatiqn [1] devient identique, et ne peut, par suite, entraîner aucune conséquence.

RÉSUMÉ.

93. Lemme sur la valeur et le signe d'un polynome, lorsqu'on donne à la variable une valeur très-petite. — **94.** Théorème sur les conditions d'égalité de deux polynomes contenant une lettre arbitraire. — Extension de ce théorème au cas où les deux polynomes renferment un nombre quelconque de lettres arbitraires. — **96.** Moyen de vérifier une équation entre diverses quantités arbitraires. — **97.** Cas où ces quantités arbitraires sont liées par certaines relations. — **98, 99.** Application à quelques problèmes.

EXERCICES.

I. Vérifier que les deux équations :

$$x+y+u+v=2,$$

$$xy-uv=2-2(u+v),$$

entraînent la suivante :

$$x^2+y^2=u^2+v^2.$$

II. Vérifier que les deux équations :

$$a+c=2b, \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2}{c},$$

entraînent la proportion : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

III. Vérifier que le volume d'un segment sphérique à deux bases,

$$\frac{1}{6}\pi H^3+\frac{1}{2}\pi H(R^2+r^2),$$

est la différence de deux segments sphériques à une base, ayant R et r pour rayons de bases, c'est-à-dire, qu'il est égal à

$$\frac{1}{6}\pi H'^3+\frac{1}{2}\pi H'R^2-\frac{1}{6}\pi h'^3-\frac{1}{2}\pi h'r^2,$$

H' et h' satisfaisant aux conditions que la géométrie indique facilement :

$$H'-h'=H, \quad \rho^2=R^2+(\rho-H')^2, \quad \rho^2=r^2+(\rho-h')^2,$$

ρ étant le rayon de la sphère.

On applique, pour ces trois exercices, la méthode générale (97).

IV. Vérifier, que, si l'on a :

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d},$$

on a aussi :

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}.$$

V. Si l'on désigne par S_m la somme des m premiers termes d'une progression par quotient, dont q est la raison, vérifier que la somme des produits, deux à deux, de ces m premiers termes est $\frac{q}{q+1}S_mS_{m-1}$.

On s'appuie sur cette proposition, que la somme des produits deux à deux est la moitié de la différence entre le carré de la somme et la somme des carrés.

VI. Si l'on considère la suite des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 43\ldots,$$

dans laquelle chaque terme est la somme des deux précédents : prouver que la différence entre le carré d'un terme et le produit de ceux qui le comprennent, est, en valeur absolue, égale à l'unité.

On prouve que cette différence a une valeur absolue constante.

VII. Vérifier que l'équation

$$\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}+\sqrt{(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2}=\sqrt{(\beta-\beta')^2+(\alpha-\alpha')^2}$$

entraîne la suivante : $\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}=\dfrac{y-\beta'}{x-\alpha'}$.

On cherche à rendre rationnelle l'équation donnée, et à décomposer ses deux membres en facteurs.

VIII. Démontrer que les six équations

$$\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=1, & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''&=0,\\
\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2&=1, & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'&=0,\\
\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2&=1, & \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''&=0,
\end{aligned}$$

entraînent les 7 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2&=1, & \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''&=0,\\
\beta^2+\beta'^2+\beta''^2&=1, & \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''&=0,\\
\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2&=1, & \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''&=0,
\end{aligned}$$

$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2+\alpha''^2\beta''^2.$$

On résout également ces exercices, en posant :

$$\begin{aligned}
\alpha x'+\alpha' y'+\alpha'' z'&=x,\\
\beta x'+\beta' y'+\beta'' z'&=y,\\
\gamma x+\gamma' y'+\gamma'' z'&=z,
\end{aligned}$$

et en cherchant à obtenir, de deux manières, en vertu des relations données, la somme $x'^2+y'^2+z'^2$, en x, y, z. Pour la dernière vérification, on cherche à déduire des relations données une valeur de $\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2$, qui ne change pas, quand on y change α' en β, α'' en γ et β'' en γ'.

IX. L'équation $$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}=\frac{1}{a'+x}+\frac{1}{b'+x}$$

ne peut avoir lieu, quel que soit x, que si a et b sont respectivement égaux à a' et b'.

X. Démontrer que l'équation

$$\frac{a}{(b+x)^2+a^2}=\frac{a'}{(b'+x)^2+a'^2}$$

ne peut avoir lieu, quelque soit x, que si l'on a : $a=a'$, $b=b'$.

On applique, pour ces deux exercices, le théorème (**94**).

XI. Vérifier que les quatre équations

$$aa_1+bc=\beta\gamma, \qquad \beta\beta'+bb'=a_1c_1,$$
$$a'a_1+b'c'=\beta'\gamma', \qquad \gamma\gamma'+cc'=a_1b_1,$$

entraînent la suivante :

$$a_1b_1c_1=aa'a_1+bb'b_1+cc'c_1+abc+a'b'c'.$$

On obtient ce résultat, en éliminant β, β', γ, γ' entre les équations proposées.

CHAPITRE V.

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

100. Définition. Lorsqu'on cherche à déterminer, d'après certaines conditions, un polynome ordonné par rapport à une lettre donnée, la méthode la plus simple et la plus naturelle consiste à écrire ce polynome, en laissant *indéterminés* ses coefficients et quelquefois son degré. On exprime ensuite qu'il satisfait aux conditions proposées; et l'on obtient ainsi des équations, dans lesquelles ces coefficients et ce degré entrent comme autant d'inconnues, dont elles font connaître la valeur.

Nous allons appliquer cette méthode à la division des polynomes et à l'extraction de leurs racines.

§ I. Division des polynomes.

101. Cas où la division doit se faire exactement. Soit à diviser un polynome, de degré m,

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m,$$

par un polynome, de degré n,

$$B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_n.$$

Il faut que le quotient, multiplié par le diviseur, reproduise identiquement le dividende. Or, si l'on désigne par α le degré du quotient, celui du produit sera $(n+\alpha)$: on devra, par conséquent, avoir :

$$m = n + \alpha, \quad \text{ou} \quad \alpha = m - n.$$

Connaissant ainsi le degré du quotient, et, par suite, le nombre de ses coefficients égal à $(\alpha+1)$, on pourra, en désignant chacun d'eux par une lettre particulière, effectuer le produit du quotient par le diviseur. Ce produit, étant du degré m, sera composé de $(m+1)$ termes : en les égalant aux termes correspondants du dividende, on obtiendra $(m+1)$ équations du premier degré entre les $(m-n+1)$ coefficients inconnus. Il suf-

fira, pour les déterminer, de résoudre $(m-n+1)$ équations ; les n autres devront être satisfaites d'elles-mêmes, et seront des équations de condition.

102. Cas où la division laisse un reste. Si l'on veut appliquer la méthode des coefficients indéterminés à la recherche du quotient et du reste, dans le cas où la division n'est pas possible, la question doit être posée de la manière suivante :

Trouver un polynome, qui, multiplié par le diviseur, donne un produit, dont la différence avec le dividende soit de degré moindre que le diviseur.

On devra, dans ce cas, égaler seulement, aux termes correspondants du dividende, les termes de ce produit dont le degré n'est pas inférieur au degré n du diviseur : on obtiendra ainsi $(m-n+1)$ équations (les mêmes que si l'on cherchait un quotient exact), qui permettront de déterminer tous les coefficients du quotient. La différence, entre le dividende et le produit du diviseur par le quotient, sera le reste.

103. Calcul des coefficients du quotient. Les $(m-n+1)$ équations, qui déterminent le quotient, offrent une forme rémarquable, qui rend leur résolution très-facile. Soit, en effet,

$$C_0x^{m-n}+C_1x^{m-n-1}+C_2x^{m-n-2}+\ldots+C_kx^{m-n-k}+\ldots+C_{m-n},$$

le quotient inconnu. En multipliant ce quotient par le diviseur, on a évidemment :

$$B_0C_0x^m+(B_1C_0+B_0C_1)x^{m-1}+(B_2C_0+B_1C_1+B_0C_2)x^{m-2}+\ldots$$
$$+(B_kC_0+B_{k-1}C_1+\ldots B_1C_{k-1}+B_0C_k)x^{m-k}+\ldots$$

Et, en égalant les coefficients de ce produit à ceux du dividende, on a :

$$B_0C_0=A_0,\quad B_1C_0+B_0C_1=A_1,\quad B_2C_0+B_1C_1+B_0C_2=A_2,$$
$$B_kC_0+B_{k-1}C_1+\ldots+B_1C_{k-1}+B_0C_k=A_k\ldots$$

La première équation ne contient donc que l'inconnue C_0; C_0 étant connu, la seconde permettra de calculer C_1, qui n'y entre qu'au premier degré; C_0 et C_1 étant connus, la troisième

équation permettra de calculer C_2, qui n'y entre qu'au premier degré. En général, chaque équation renferme, au premier degré, une inconnue qui ne figurait pas dans les précédentes, et qu'elle permet de déterminer. Ainsi, C_k figure, pour la première fois, dans le coefficient de x^{m-k}; en sorte que les k premières équations ne renferment pas cette inconnue. Quant à la $(k+1)^{me}$, elle renferme C_k au premier degré.

104. Application. Appliquons la méthode précédente à un exemple. Soit à diviser

$$x^6+A_1x^5+A_2x^4+A_3x^3+A_4x^2+A_5x+A_6$$

par

$$x^2+px+q.$$

Le quotient doit être du quatrième degré. Désignons-le par

$$x^4+m_1x^3+m_2x^2+m_3x+m_4;$$

En formant son produit par le diviseur, on obtient :

$$x^6+(p+m_1)x^5+(q+pm_1+m_2)x^4+(qm_1+pm_2+m_3)x^3$$
$$+(qm_2+pm_3+m_4)x^2+(qm_3+pm_4)x+qm_4.$$

En égalant les termes de ce produit, dont le degré surpasse l'unité, aux termes correspondants du dividende, on a, pour déterminer m_1, m_2, m_3, m_4, les équations :

$$p+m_1=A_1,\quad q+pm_1+m_2=A_2,\quad qm_1+pm_2+m_3=A_3,$$
$$qm_2+pm_3+m_4=A_4.$$

La première fera connaître m_1; la seconde, m_1 étant connu, fera connaître m_2; la troisième donnera ensuite m_3, et la quatrième m_4.

On verra, sans peine, que cette méthode conduit aux mêmes calculs, que la méthode exposée dans la première partie.

§ II. Extraction de la racine m^{me} d'un polynome.

105. Méthode générale. Soit le polynome :

$$A_0x^p + A_1x^{p-1} + A_2x^{p-2} + \ldots + A_p;$$

désignons sa racine m^{me} par

$$B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_n.$$

Il faut, par définition, que l'on ait identiquement :

$$(B_0x^n + B_1x^{n+1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_n)^m$$
$$= A_0x^p + A_1x^{p-1} + A_2x^{p-2} + \ldots + A_p.$$

Pour que les deux membres soient de même degré, il faut que l'on ait :

$$p = mn.$$

Si donc p n'est pas un multiple de m, le problème est impossible. Si p est divisible par m, le degré de la racine sera $\frac{p}{m}$: on connaîtra, par suite, le nombre $\left(\frac{p}{m}+1\right)$ de ses coefficients. On pourra élever cette racine à la puissance m^{me}; on formera ainsi un polynome du degré p. En égalant les $\left(\frac{p}{m}+1\right)$ premiers termes aux termes correspondants du polynome donné, on obtiendra $\left(\frac{p}{m}+1\right)$ équations, pour déterminer les coefficients inconnus. Les équations, qui expriment l'égalité des termes suivants, devront être satisfaites d'elles-mêmes, si le problème est possible : ce sont des équations de condition.

106. Calcul des coefficients de la racine. Les $\left(\frac{p}{m}+1\right)$ équations, qui déterminent la racine, ont une forme remarquable, qui rend leur résolution très-facile. En effet, dans le développement de

$$(B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_kx^{n-k} + \ldots + B_n)^m,$$

où n est égal à $\frac{p}{m}$, le terme en x^p ne contient que B_0^m; le terme en x^{p-1} contient B_0 à la puissance $(m-1)$, et B_1 au premier degré; le terme en x^{p-2} contient B_0, B_1 et B_2, et cette dernière inconnue n'y entre qu'au premier degré. En général, B_k n'entre dans aucun terme dont le degré est supérieur à $(p-k)$; et il entre au premier degré dans le coefficient du terme en x^{p-k}. Par conséquent, la première équation $B_0^m = A_0$ fera connaître B_0 par une extraction de racine : B_0 étant connu, la seconde équation fera connaître B_1, qui n'y entre qu'au premier degré; B_0 et B_1 étant connus, la troisième fera connaître B_2, qui n'y entre qu'au premier degré. Et, en général, la $(k+1)^{me}$ équation déterminera B_k, qui n'y entre qu'au premier degré; car, dans le développement, il n'y a qu'un terme en x^{p-k}, qui contienne B_k; c'est le terme $mB_k x^{n-k}(B_0 x^n)^{m-1}$.

Il sera facile d'appliquer, en particulier, cette méthode à l'extraction de la racine carrée d'un polynome.

§ III. Application à quelques problèmes.

107. Problème I. *Déterminer, entre* p *et* q, *la relation nécessaire pour que le trinome*

$$x^3 + px + q$$

soit divisible par le carré d'un binome convenablement choisi $(x-\alpha)^2$.

Si $(x+\beta)$ désigne le quotient de cette division, on aura :

$$x^3 + px + q = (x-\alpha)^2(x+\beta) = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x+\beta)$$

$$= x^3 + (\beta - 2\alpha)x^2 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta)x + \alpha^2\beta.$$

On en conclut, en identifiant les deux membres :

$$\beta - 2\alpha = 0, \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta = p, \quad \alpha^2\beta = q.$$

Remplaçant, dans les deux dernières équations, β par sa valeur 2α, tirée de la première, il vient :

$$\alpha^2 - 4\alpha^2 = p, \quad \text{ou} \quad \alpha = \sqrt{-\frac{p}{3}},$$

$$2\alpha^3 = q.$$

Éliminant enfin α entre ces deux équations, on a :

$$q = 2\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3, \quad \text{ou} \quad 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Telle est la condition cherchée.

108. Problème II. *Déterminer les coefficients* m *et* n, *de telle manière que l'expression*

$$mx^3 - (2m^2 + 3n)x^2 + (m^3 + 6mn)x - 3m^2n,$$

soit un cube parfait.

Il faut, pour cela, identifier l'expression avec le cube d'un binome $(ax + b)$, c'est-à-dire avec

$$a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 :$$

ce qui fournit les équations :

$$m = a^3, \quad -(2m^2 + 3n) = 3a^2b, \quad m^3 + 6mn = 3ab^2, \quad -3m^2n = b^3.$$

Les deux dernières donnent :

$$b = -\sqrt[3]{3m^2n}, \quad a = \frac{m^3 + 6mn}{3\sqrt[3]{9m^4n^2}} = \frac{m^2 + 6n}{3\sqrt[3]{9mn^2}}.$$

a et b étant ainsi déterminés, les deux équations restantes sont des équations de condition. Si l'on y substitue à a et à b leurs valeurs, ces équations deviennent :

[1] $$m = \frac{(m^2 + 6n)^3}{27.9mn^2},$$

[2] $$2m^2 + 3n = \frac{3(m^2 + 6n)^2\sqrt[3]{3m^2n}}{9\sqrt[3]{81m^2n^4}} = \frac{(m^2 + 6n)^2}{3\sqrt[3]{27n^3}} = \frac{(m^2 + 6n)^2}{9n}.$$

Chassant le dénominateur de cette dernière, et réduisant, on

$$m^4 - 6nm^2 + 9n^2 = 0,$$

ou

$$(m^2 - 3n)^2 = 0.$$

On tire de là, pour valeur unique de n,

$$[3] \qquad n = \frac{m^2}{3}.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation [1], la rend identique. La condition demandée se réduit donc à la relation [3]. Et le polynome proposé est alors, comme on s'en assure facilement, le cube de

$$x\sqrt[3]{m} - m\sqrt[3]{m}.$$

RÉSUMÉ.

100. La méthode des coefficients indéterminés s'applique aux questions dans lesquelles on veut déterminer un polynome, d'après certaines conditions. — **101.** Application de cette méthode à la théorie de la division, dans le cas où la division se fait exactement. — **102.** Cas où l'on a à trouver le quotient et le reste. — **103.** Toutes les équations que l'on a à résoudre, sont du premier degré à une inconnue. — **104.** Application à un exemple. — **105.** Application de la méthode à la recherche de la racine m^{me} d'un polynome. — **106.** Les équations, que l'on a à résoudre, sont toutes du premier degré à une inconnue. — **107, 108.** Application de la méthode des coefficients indéterminés à la solution de quelques problèmes.

EXERCICES.

I. Trouver les conditions, pour que le polynome

$$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p(m+1)x + (m+1)^2$$

soit le carré d'un polynome entier par rapport à x.

Il faut que : $$m + 1 = q - \frac{p^2}{4}.$$

II. Déterminer la condition, pour que le polynome

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F$$

soit le produit de deux expressions du premier degré en x et y.

Il faut que : $$(BD - 2AE)^2 = (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF).$$

III. **Décomposer,** de cette manière, le polynome

$$2x^2-21xy-11y^2-x+34y-3.$$

On trouve : $$(2x+y-3)(x-11y+1).$$

IV. **Mettre** l'expression $4(x^4+x^3+x^2+x+1)$ sous la forme de la différence des carrés de deux polynomes du second degré, entiers par rapport à x.

On trouve : $$(2x^2+x+2)^2-5x^2.$$

V. **Déterminer** les conditions pour que l'expression

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-k(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)$$

soit le carré d'un polynome, du premier degré, en x et y.

Si $a>b$, il faut que l'on ait : $k=\frac{1}{a^2}$, $\alpha=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, $\beta=0$, et le polynome est le carré de $a\pm\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

Si $a<b$, il faut que l'on ait : $k=\frac{1}{b^2}$, $\alpha=0$, $\beta=\pm\sqrt{b^2-a^2}$; et le polynome est le carré de $b\pm\frac{y\sqrt{b^2-a^2}}{b}$.

VI. **Mettre** $(Ax^2+2Bxy+Cx^2)$ sous la forme $(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2$. Cela est-il toujours possible ? Y a-t-il plusieurs solutions ?

Il y a une infinité de solutions. Pour qu'elles soient réelles, il faut qu'on ait :

$$A>0,\quad C>0,\quad AC>B^2.$$

VII. **Mettre** $(Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3)$ sous la forme $(\alpha x+\beta y)^3+(\gamma x+\delta y)^3$.

Après avoir identifié les deux polynomes, on prend une inconnue auxiliaire $\omega=\alpha\delta-\beta\gamma$; on calcule les expressions $AC-B^2$, $BD-C^2$, $AD-BC$, et enfin $(AD-BC)^2-4(AC-B^2)(BD-C^2)$: cette dernière est égale à ω^6, et fait connaître ω. Les autres font connaître $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, et $\alpha\delta+\beta\gamma$. On en tire facilement α, β, γ δ.

LIVRE II.

THEORIE DES DÉRIVÉES.

CHAPITRE PREMIER.

CALCUL DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE.

§ I. Notions préliminaires.

109. Définitions. Lorsqu'une variable y dépend d'une autre variable x, de telle sorte qu'à chaque valeur donnée arbitrairement à x, corresponde une valeur unique et déterminée de y, on dit que y est une *fonction* de x : et l'on indique cette dépendance par le symbole

$$y = f(x).$$

La quantité x se nomme la *variable indépendante*, parce qu'on peut lui donner arbitrairement toute espèce de valeurs.

Lorsque la variable x reçoit deux valeurs a et $a+h$, h est l'*accroissement* donné à la variable; la fonction prend deux valeurs correspondantes $f(a)$ et $f(a+h)$; et la différence, positive ou négative, $f(a+h)-f(a)$, se nomme l'*accroissement* correspondant de la fonction.

La fonction est *continue*, lorsqu'on peut donner à h une valeur assez petite, pour que l'accroissement de la fonction soit aussi petit qu'on le voudra. On ne s'occupe, dans tout ce livre, que des fonctions continues.

110. Développement d'une fonction entière $f(x+h)$, suivant les puissances de h. Si, dans un polynome, entier par

rapport à une lettre x, et que nous représenterons généralement par

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_nx^{m-n} + \dots + A_m,$$

on remplace x par $x + h$, le résultat de cette substitution est :

$$f(x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + \dots + A_n(x+h)^{m-n} + \dots + A_m.$$

Si l'on développe chaque terme par la formule du binome, et si l'on ordonne suivant les puissances ascendantes de h, cette expression devient :

$$\begin{array}{ll|l|l}
A_0x^m & +mA_0x^{m-1} & h+m(m-1)A_0x^{m-2} & \frac{h^2}{1.2}+\dots+m(m-1)\dots2.1A_0\frac{h^m}{1.2\dots m} \\
+A_1x^{m-1} & +(m-1)A_1x^{m-2} & +(m-1)(m-2)A_1x^{m-3} & \\
+A_2x^{m-2} & +(m-2)A_2x^{m-3} & +(m-2)(m-3)A_2x^{m-4} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
+A_nx^{m-n} & +(m-n)A_nx^{m-n-1} & +(m-n)(m-n-1)A_nx^{m-n-2} & \\
\vdots & \vdots & & \\
+A_{m-1}x & +A_{m-1} & & \\
+A_m & & &
\end{array}$$

Les termes indépendants de h, ceux auxquels se réduit l'expression pour $h = 0$, forment, comme cela devait être, le polynome proposé lui-même. Le coefficient de h, polynome du degré $(m - 1)$ par rapport à x, se nomme la *dérivée* du polynome proposé; et, lorsque le polynome est représenté par $f(x)$, la dérivée est assez habituellement représentée par $f'(x)$. Le coefficient de $\frac{h^2}{1\,.\,2}$, polynome du degré $(m - 2)$, est la *seconde dérivée* du polynome. On la désigne par $f''(x)$. De même les coefficients de $\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}, \dots \frac{h^m}{1\,.\,2 \dots m}$, polynomes dont le degré est de moins en moins élevé, sont la *troisième*, ... la *m^{me} dérivée* du polynome, et se représentent par $f'''(x) \dots, f^m(x)$. D'après ces notations, le développement s'écrira :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{1.2\dots n}f^n(x) + \dots + \frac{h^{m-1}}{1.2\dots(m-1)}f^{m-1}(x) + \frac{h^m}{1.2\dots m}f^m(x).$$

Chacun des polynomes $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x) \dots f^m(x)$, se déduit

du précédent, d'après une même loi qui est fort simple. Si l'on examine, en effet, le polynome

$$f'(x)=mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\dots+A_{m-1},$$

on reconnaît immédiatement qu'*il faut, pour le former, diminuer d'une unité l'exposant de chacun des termes de* f (x), *et multiplier le coefficient par l'exposant non encore diminué.* L'inspection des polynomes $f''(x)$, $f'''(x)$,..., montre que chacun se déduit du précédent suivant la même loi; en sorte que $f''(x)$ est la dérivée de $f'(x)$, $f'''(x)$ celle de $f''(x)$, et ainsi de suite. Et c'est pour cette raison, que $f''(x)$ est dite la *seconde dérivée* de $f(x)$, que $f'''(x)$ est dite la *troisième dérivée*, et ainsi de suite.

Chaque dérivée est de degré moindre que la précédente; en sorte que la m^{me} dérivée d'un polynome, de degré m, est constante, et qu'il n'y en a pas de $(m+1)^{me}$.

111. Propriété de la dérivée d'une fonction entière. La définition, que nous avons donnée de la dérivée, ne s'applique qu'aux polynomes entiers et rationnels; mais nous allons en déduire une propriété importante, que nous prendrons ensuite pour définition; ce qui permettra d'étendre la notion de dérivée aux expressions d'une autre forme.

On a (**110**), en désignant par F (x) un polynome entier par rapport à x :

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\dots+\frac{h^m}{1.2\dots m}F^m(x);$$

on en conclut :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)+\frac{h}{1.2}F''(x)+\frac{h^2}{1.2.3}F'''(x)+\dots$$

Si, x restant fixe, on fait tendre h vers zéro, le second membre a évidemment pour limite F' (x); il doit, par suite, en être de même du premier; et l'on a, par conséquent :

$$F'(x)=\lim\frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

résultat que l'on peut énoncer ainsi :

La dérivée d'un polynome F (x) *est la limite du rapport de l'ac-*

croissement F (x + h) — F (x) *de ce polynome à l'accroissement* h *de la variable, lorsque ce dernier accroissement diminue de plus en plus.*

112. Nouvelle définition de la dérivée. C'est la propriété précédente, qui sera dorénavant prise par nous pour définition. Nous dirons :

On nomme dérivée d'une fonction continue quelconque: la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement de la variable, quand ce dernier tend vers zéro. Cette définition s'applique, d'après ce qui précède, aux fonctions entières : elle permet, en outre, d'étendre la notion de dérivée à une fonction quelconque.

On peut demander, si une fonction continue quelconque $f(x)$ a une dérivée. Nous répondrons d'abord, qu'en fait, nous allons trouver, dans les paragraphes suivants, les dérivées des principales fonctions; ce qui démontrera leur existence *à posteriori*. Nous ajouterons, d'ailleurs, que la fonction étant continue, l'équation $y = f(x)$ représente une courbe plane continue, rapportée à deux axes rectangulaires; et l'on démontre, en géométrie analytique, que la dérivée représente la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec l'axe Ox, la tangente à la courbe au point (x, y). Comme, en chaque point, une courbe continue a une tangente bien déterminée, la fonction admet une dérivée.

La dérivée d'une fonction est une nouvelle fonction qui admet elle-même une dérivée : c'est la dérivée seconde. La dérivée de celle-ci est la troisième dérivée; et ainsi de suite.

Nous commencerons par faire connaître les dérivées de deux fonctions très-simples, a^x et log x.

§ II. Dérivées de a^x et de log x.

113. Dérivée de a^x. La dérivée de a^x est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h},$$

Lorsque h tend vers zéro.

Or, on a évidemment :

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Il faut donc, pour obtenir la dérivée, chercher la limite du rapport

$$\frac{a^x(a^h - 1)}{h}.$$

Posons :

$$a^h - 1 = \frac{1}{n}.$$

Lorsque h est très-petit, a^h diffère très-peu de l'unité (73) ; et, par suite, n est très-grand. Lorsque h tend vers zéro, n tend vers l'infini. On déduit de cette relation :

$$a^h = 1 + \frac{1}{n}.$$

Prenant les logarithmes des deux membres, il vient :

$$h \log a = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$h = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log a}.$$

Le rapport devient, d'après cela :

$$a^x \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log a}} = \frac{a^x \log a}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Le numérateur ne contenant pas n, il suffit de chercher la limite du dénominateur. Or, on a :

$$n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

n augmentant indéfiniment, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e; et, par suite,

$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a, pour limite, $\log e$; l'expression $\frac{a^x \log a}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ tend donc vers $\frac{a^x \log a}{\log e}$: telle est donc la dérivée de a^x. Ainsi :

$$[1] \qquad (a^x)' = \frac{a^x \log a}{\log e}.$$

On peut remarquer que la base du système, dans lequel sont pris les logarithmes, n'a pas été définie; mais le choix de cette base n'a aucune influence sur le résultat; car le rapport $\frac{\log a}{\log e}$ ne dépend pas (85) de la base du système considéré. Si l'on suppose que les logarithmes sont pris dans le système népérien, $\log e = 1$; et la dérivée s'écrit :

$$[2] \qquad (a^x)' = a^x \mathrm{L}a.$$

Ainsi *la dérivée de la fonction exponentielle s'obtient, en multipliant cette fonction par le logarithme népérien de la base.*

Si l'on considère, en particulier, la fonction e^x, $\mathrm{L}e = 1$; et par suite *la dérivée de* e^x *est la fonction elle-même :*

$$[3] \qquad (e^x)' = e^x.$$

114. Dérivée de $\log x$. La dérivée de $\log x$ est, par définition, la limite de l'expression

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h},$$

lorsque h tend vers zéro.

Or, on a :

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

Donc
$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Posons $\frac{h}{x} = \frac{1}{n}$, de telle sorte que, h tendant vers zéro, n tendra

vers ∞; il viendra $h=\frac{x}{n}$; et l'expression, dont on cherche la limite, deviendra :

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}}=\frac{1}{x}.n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Or, on a vu (113), que, n tendant vers ∞, $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a pour limite $\log e$. La limite de $\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est donc $\frac{\log e}{x}$, qui représente, par conséquent, la dérivée de $\log x$,

Ainsi

[4] $$(\log x)'=\frac{\log e}{x}=\frac{M}{x},$$

en désignant par M le module du système dans lequel est pris le logarithme de x.

Si la fonction est le logarithme népérien de x, $M=1$; et, par suite, la dérivée de Lx est :

[5] $$(Lx)'=\frac{1}{x}.$$

Après avoir fait connaître les dérivées des deux fonctions très-simples, $\log x$ et a^x, nous allons établir quelques règles générales, qui nous permettront d'obtenir les dérivées d'expressions plus composées.

§ III. Règles générales.

118. Dérivée d'une somme. Si u, v, w, sont des fonctions de x, dont les dérivées u' v' w' sont connues, *la somme*

$$u+v-w$$

aura pour dérivée la somme

$$u'+v'-w'.$$

En effet, si nous désignons, en général, l'accroissement d'une

quantité par le signe Δ placé devant la lettre qui la représente, en attribuant à la variable x un accroissement Δx, les fonctions u, v, w, prendront, respectivement, des accroissements Δu, Δv, Δw; et l'accroissement de la somme $(u+v-w)$ sera évidemment :

$$\Delta u+\Delta v-\Delta w;$$

le rapport de cet accroissement à l'accroissement Δv de la variable, est donc :

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

et il a, par conséquent, pour limite :

$$u'+v'-w',$$

comme nous voulions le démontrer. On a donc :

$$[6] \qquad (u+v-w)'=u'+v'-w'.$$

116. Définition d'une fonction de fonction. On nomme, en général, fonction *explicite* d'une variable le résultat d'opérations bien définies, exécutées sur cette variable. Ainsi, par exemple :

$$x^m,\ \log\sqrt{1+x^2},\ \log\sin x,\ a^x,$$

sont des fonctions de x; le nombre des opérations successivement indiquées pouvant d'ailleurs être aussi grand qu'on le voudra.

Si l'on désigne par u une fonction quelconque de la variable x, et que l'on exécute des opérations sur la quantité u, considérée comme donnée, le résultat de ces opérations sera, d'après ce qui précède, une fonction de u; et, comme u est elle-même une fonction de x, ce résultat se trouve une *fonction de fonction*.

Il est bien entendu, qu'en remplaçant u par son expression en x, on peut faire immédiatement, d'une fonction de fonction, une fonction ordinaire.

Exemples. 1° $\qquad (x^2)^3=x^6$

peut être considéré comme une fonction de fonction. le cube de x^2, ou comme une fonction simple, x^6.

2° $$\log a^x = x \log a$$

peut être considéré comme une fonction de fonction, le logarithme de la fonction a^x, ou comme la fonction simple du premier degré, $x \log a$.

Lors même que des réductions, analogues aux précédentes, ne s'effectuent pas, rien ne distingue essentiellement une fonction de fonction de celles qui dépendent directement de la variable principale.

117. Dérivée d'une fonction de fonction. D'après les définitions qui précèdent, si l'on désigne par u une fonction $\varphi(x)$ de la variable x, et par w une fonction $\psi(u)$ de la variable u, w sera une fonction de fonction définie par les équations :

$$u = \varphi(x), \quad w = \psi(u).$$

Nous allons montrer que, si les fonctions φ et ψ sont de telle nature, qu'on sache prendre leurs dérivées par rapport à la variable dont elles dépendent immédiatement, on pourra former la dérivée de w par rapport à x.

Supposons, en effet, que l'on donne à x un accroissement Δx, et qu'il en résulte : pour u, un accroissement Δu ; pour w, un accroissement Δw ; on a identiquement :

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta w}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Or, Δx tendant vers zéro, $\frac{\Delta w}{\Delta u}$ et $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ont, pour définition, pour limites respectives, les dérivées de w et de u par rapport à x. Quant à $\frac{\Delta w}{\Delta u}$, bien que u ne soit pas une variable indépendante, mais une fonction de x, dont les variations dépendent de celles de x, cette expression a pour limite la dérivée de w par rapport à u ; car rien, dans la définition de la dérivée d'une fonction, ne particularise la manière dont l'accroissement de la variable tend vers zéro. En désignant donc les dérivées de w par rapport à x et par rapport à u par w' et par $\psi'(u)$, et celle de u par

rapport à x par $\varphi'(x)$, et en se rappelant que la limite d'un produit est égale au produit des limites, on a :

$$[7] \qquad w' = \psi'(u) \times \varphi'(x);$$

résultat que l'on peut énoncer de la manière suivante :

La dérivée d'une fonction de fonction est le produit des dérivées des fonctions simples qui la composent, prises, chacune, par rapport a la variable dont la fonction dépend immédiatement.

118. Exemples. 1° Considérons la fonction

$$(x^2)^3,$$

c'est-à-dire, supposons que, dans la formule qui précède, on ait :

$$u = x^2, \quad w = u^3.$$

Pour former la dérivée de cette fonction de fonction, il faut, comme on l'a vu, prendre la dérivée de u^3 par rapport à u, qui est $3u^2$, et la multiplier par la dérivée de x^2 par rapport à x, c'est-à-dire par $2x$; cette dérivée est donc $3u^2 \times 2x$, ou, en remplaçant u par sa valeur :

$$3x^4 \times 2x = 6x^5;$$

ce qui est précisément le résultat qu'on aurait obtenu (**110**), en remplaçant la fonction de fonction par la fonction simple x^6.

2° Considérons encore la fonction

$$\log x^5,$$

c'est-à-dire, supposons :

$$u = x^5; \quad w = \log u.$$

La dérivée de cette fonction de fonction est le produit de $5x^4$, dérivée de x^5, par $\frac{\log e}{u}$, dérivée de $\log u$ par rapport à u; elle est égale, par conséquent, à

$$\frac{5x^4 \log e}{x^5} = \frac{5 \log e}{x};$$

c'est précisément ce que l'on aurait trouvé, en remarquant que

$$\log x^5 = 5 \log x;$$

car la dérivée de 5 log x est évidemment égale à cinq fois la dérivée de log x.

Les deux exemples précédents ont été choisis de manière à fournir un résultat qui fût connu à l'avance; mais on conçoit que, dans un grand nombre de cas, la règle des fonctions de fonctions conduira à des résultats entièrement nouveaux, et qu'il serait difficile d'obtenir autrement.

Cherchons, par exemple, la dérivée de e^{x^2}, en posant :

$$x^2 = u, \quad w = e^u.$$

On voit que la dérivée demandée est le produit de $2x$, dérivée de u par rapport à x, et de e^u, dérivée de e^u par rapport à u; elle est, par conséquent, égale à

$$2xe^{x^2}.$$

119. Généralisation. On peut généraliser la règle des fonctions de fonctions, et l'étendre à des expressions qui dépendent de la variable x au moyen de plusieurs fonctions intermédiaires.

Posons, en effet :

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(u), \quad w = f(v), \quad z = F(w);$$

et cherchons la dérivée de z par rapport à x. Soit Δx un accroissement attribuée à x; et soient Δu, Δv, Δw, Δz, les accroissements qui en résultent pour u, v, w, z; on a, identiquement :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x};$$

et l'on voit que, si Δx tend vers zéro, le premier membre a, pour limite, la dérivée de z par rapport à x, et les facteurs du second tendent vers les dérivées des fonctions z, w, v, u, par rapport aux variables dont elles dépendent immédiatement. On en conclut que *la dérivée de* z, *par rapport à* x, *est encore le produit obtenu en multipliant les dérivées des diverses fonctions;* z, w

v, u, *prises chacune par rapport à la variable dont la fonction dépend immédiatement.* Ainsi :

$$[8] \qquad z' = F'(w) \times f'(v) \times \psi'(u) \times \varphi'(x).$$

120. Dérivée d'un produit. Soient u, v, w,.... des fonctions en nombre quelconque, et z leur produit, dont on demande la dérivée.

On a : $$z = u.v.w....;$$

en prenant les logarithmes des deux membres, il vient :

$$\log z = \log u + \log v + \log w + ...;$$

et, si l'on prend les dérivées des deux membres, on a, en appliquant la règle des fonctions de fonctions (**117**), et en désignant par z', u', v', w',.... les dérivées de z, u, v, w....;

$$\frac{\log e}{z} z' = \frac{\log e}{u} u' + \frac{\log e}{v} v' + \frac{\log e}{w} w' + ...;$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{z'}{z} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + ...,$$

ou, en multipliant les deux membres par z ou par uvw....:

$$[9] \qquad z' = vw....u' + uw....v' + uv....w' + ...$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit est la somme des produits obtenus en multipliant successivement la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.*

Si un facteur est constant, sa dérivée est nulle, et le terme correspondant manque dans la dérivée du produit. Ainsi la dérivée de Au est Au'.

121. Dérivée d'un quotient. Soient u et v deux fonctions de x, et z leur quotient, dont on demande la dérivée. On a :

$$z = \frac{u}{v}.$$

En prenant les logarithmes, il vient :

$$\log z = \log u - \log v\,;$$

et, si l'on prend les dérivées des deux membres, cette équation donne, en adoptant les mêmes notations que précédemment :

$$\frac{\log e}{z} z' = \frac{\log e}{u} u' - \frac{\log e}{v} v'$$

d'où l'on déduit :

$$z' = \frac{z}{u} u' - \frac{z}{v} v' = \frac{1}{v} u' - \frac{u}{v^2} v',$$

ou [10] $$z' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Ainsi *la dérivée d'un quotient s'obtient, en multipliant le dénominateur par la dérivée du numérateur, puis le numérateur par la dérivée du dénominateur, et en divisant la différence des produits par le carré du dénominateur.*

122. Dérivée d'une puissance. Soient u une fonction de x, et m un exposant, entier ou fractionnaire, positif ou négatif; désignons par z la puissance u^m, et cherchons-en la dérivée ; on a :

$$z = u^m.$$

En prenant les logarithmes, il vient :

$$\log z = m \log u;$$

et si l'on prend les dérivées des deux membres, on aura, en adoptant toujours les mêmes notations :

$$\frac{\log e}{z} z' = m \frac{\log e}{u} u';$$

où l'on déduit : $$z' = m \frac{z}{u} u';$$

ou [11] $$z = mu^{m-1} u'.$$

Ainsi *la dérivée d'une puissance d'une fonction s'obtient en multipliant la dérivée de la fonction par l'exposant et par une puissance de la fonction prise avec un exposant inférieur d'une unité.*

REMARQUE I. Dans le cas où m est entier, cette règle pourrait se déduire du théorème des fonctions de fonctions : car, u étant une fonction de x, u^m est une fonction de fonction ; et l'on a vu (110) que sa dérivée, par rapport à u, est mu^{m-1}.

REMARQUE II. Si, dans la formule précédente, on suppose $u=x$, on obtient la dérivée de x^m, et l'on voit qu'elle est mx^{m-1} : cette dérivée s'exprime, par conséquent, par la même formule, que lorsque m est entier.

COROLLAIRE. Si $z=\sqrt{u}$, on écrit :

$$z=u^{\frac{1}{2}};$$

et appliquant la règle précédente, on a :

$$z'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u',$$

ou [12] $$z'=\frac{u'}{2\sqrt{u}},$$

Ainsi *la dérivée de la racine carrée d'une fonction s'obtient en divisant la dérivée de la fonction par le double du radical.*

123. DÉRIVÉE DE u^v. Considérons enfin l'expression plus composée, dans laquelle l'exposant est lui-même fonction de la variable x ; et cherchons la dérivée de u^v, u et v désignant deux fonctions quelconques de x.

Posons : $$z=u^v,$$

nous aurons, en prenant les logarithmes :

$$\log z=v\log u;$$

et, si nous prenons les dérivées des deux membres, en appliquant la règle donnée pour la dérivée d'un produit, il vient :

$$\frac{\log e}{z}z'=v'\log u+\frac{v\log e}{u}u';$$

d'où l'on déduit :

[13] $$z'=z\left(\frac{v'\log u}{\log e}+\frac{v}{u}u'\right).$$

Exemple. Si l'on pose $v=x$, $u=x$, la fonction z devient x^x, et la dérivée est :

$$x^x\left(\frac{\log x}{\log e}+1\right).$$

124. Applications des règles précédentes. Les règles précédentes permettent de former la dérivée d'une fonction algébrique donnée, quelque compliquée qu'elle soit ; nous en donnerons quelques exemples.

1° Trouver la dérivée de la fonction, $y=\sqrt{1+x^2}$.

On pose :

$$1+x^2=u,$$

$$\sqrt{1+x^2}=u^{\frac{1}{2}};$$

et l'on trouve (**117**, **122**) :

$$y'=\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}.u'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2° Trouvée la dérivée de la fonction $y=\dfrac{x^n}{(1+x)^n}$.

Nous pouvons considérer cette expression comme une fraction ; et en appliquant la règle (**121**), on trouve :

$$y'=\frac{nx^{n-1}(1+x)^n-nx^n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=\frac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}.$$

On pourrait encore considérer la fraction proposée comme la n^{me} puissance de $\dfrac{x}{1+x}$, et appliquer la règle (**122**) ; on aurait alors :

$$y'=n\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1}.\left(\frac{x}{1+x}\right)'=n\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1}\frac{x+1-x}{(1+x)^2}$$

$$=n\,\frac{x^{n-1}}{1+x)^{n+1}},$$

résultat conforme au précédent :

3° Trouver la dérivée de la fonction

$$y=\log\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}+1}.$$

En posant : $$\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}+1}=\text{U},$$

on aura : $$y=\log \text{U},$$

et (118) : $$y'=\frac{\log e}{\text{U}}.\text{U}'.$$

Pour trouver U', il faut appliquer les règles (121, 122) ; on trouve :

$$\text{U}'=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)^2}$$
$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)^2};$$

et, par suite : $$y'=\frac{2x\log e}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-2)}.$$

4° Soit enfin $y=e^x\text{L}x$, le logarithme étant pris dans le système de Neper ; on trouvera :

$$y'=e^x\left(\frac{1}{x}+\text{L}x\right).$$

§ IV. Dérivées des fonctions circulaires.

125. Dérivée de $\sin x$. La dérivée de la fonction $\sin x$ est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}.$$

Or, on a, d'après les formules connues de la trigonométrie :

$$\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Donc

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Mais on sait que h devenant très-petit, le rapport du sinus à l'arc correspondant tend vers l'unité. D'ailleurs, $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ s'approche indéfiniment de $\cos x$; et, par suite, l'expression précédente a pour limite $\cos x$.

La dérivée de sin x *est donc* cos x.

[14] $$(\sin x)'=\cos x.$$

126. Dérivée de $\cos x$. On a :

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$$

et, par conséquent, $\cos x$ peut être considérée comme une fonction de fonction. En appliquant la règle (**117**), on trouve :

$$(\cos x)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x.$$

La dérivée de cos x *est donc* — sin x.

[15] $$(\cos x)'=-\sin x.$$

127. Dérivée de tang x. On a :

$$\operatorname{tang} x=\frac{\sin x}{\cos x};$$

et, en appliquant la règle (**121**), on trouve :

[16] $$(\operatorname{tang} x)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

La dérivée de tang x *est donc* $\frac{1}{\cos^2 x}$.

128. Dérivée de cotang x. On a :

$$\operatorname{cotang} x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

et, en appliquant la règle (**121**), on trouve :

[17] $$(\operatorname{cotang} x)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

La dérivée de cotang x *est donc* $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

129. Dérivée de séc x. On a :

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}.$$

Donc

$$[18] \qquad (\text{séc}\, x)' = (\cos^{-1} x)' = -(\cos x)^{-2}.(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

La dérivée de séc x *est donc* $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

130. Dérivée de coséc x. On a :

$$\text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

Donc :

$$[19] \qquad (\text{coséc}\, x)' = (\sin^{-1} x)' = -(\sin^{-2} x) \cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

La dérivée de coséc x *est donc* $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

131. Remarque. Nous admettons, dans les paragraphes précédents, que l'arc x soit mesuré par son rapport au rayon du cercle dont il fait partie. C'est, en effet, dans cette hypothèse seulement, qu'il est vrai de dire, comme nous l'avons fait (125), que le rapport du sinus à l'arc tend vers l'unité, lorsque l'arc diminue.

132. Définition des fonctions inverses. Toutes les fois que deux variables, x et y, sont liées de telle manière, que la valeur connue de l'une détermine la valeur de l'autre, elles sont dites fonctions l'une de l'autre; et ce sont deux fonctions *inverses*. Ainsi, par exemple, si $y = a^x$, on en conclut $x = \log_a y$; à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de l'exponentielle y; mais à chaque valeur de y correspond une valeur déterminée du logarithme x. Les deux fonctions y et x sont inverses l'une de l'autre. Ainsi, encore, le sinus d'un arc est une fonction de cet arc; mais, réciproquement, l'arc est fonction du sinus; car à chaque valeur du sinus correspondent des valeurs

léterminées de l'arc. Nous désignerons cette fonction par la notation.

$$\text{arc sin } x,$$

que l'on doit lire : arc dont le sinus est x. Et nous allons déterminer les dérivées des *fonctions circulaires inverses*, arc sin x, arc cos x, arc tang x.

133. DÉRIVÉE DE arc sin x. Posons :

$$y = \text{arc sin } x;$$

et cherchons la dérivée de y par rapport à x, que nous désignerons par y'.

De l'équation $\qquad y = \text{arc sin } x,$

on déduit : $\qquad x = \sin y;$

en prenant la dérivée des deux membres par rapport à x, et appliquant, pour le second, la règle des fonctions de fonctions, on trouve :

$$1 = \cos y \times y';$$

donc : $\qquad y' = \dfrac{1}{\cos y}.$

Mais sin y étant égal à x, cos y est égal à $\pm\sqrt{1-x^2}$; et l'on a, par conséquent :

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}. \qquad [20]$$

La dérivée de arc sin x *est donc* $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$.

134. REMARQUE. Il peut sembler extraordinaire que la dérivée cherchée ait un signe indéterminé. Mais on remarquera que le signe du dénominateur est celui de cos y; or, à un même sinus x correspondent des arcs en nombre infini, dont les uns ont un cosinus positif, et les autres un cosinus négatif; ce sont ces divers arcs qui ont des dérivées différentes; chacun d'eux, bien entendu, ne peut en avoir qu'une seule. Lors donc que l'on prendra la dérivée de l'arc dont le sinus est x, on devra indi-

quer le quadrant, dans lequel se termine l'arc dont il s'agit; et l'on prendra le signe $+$, si l'arc se termine dans le premier ou dans le quatrième quadrant, et le signe $-$, s'il se termine dans le second ou dans le troisième.

135. Dérivée de arc cos x. Si l'on pose :

$$y = \text{arc} \cos x,$$

on en déduit : $$x = \cos y;$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$1 = -\sin y \times y';$$

d'où l'on déduit :

$$[21] \qquad y' = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

La dérivée arc cos x *est donc* $\dfrac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$.

Dans ce cas, le dénominateur est la valeur de $\sin y$, c'est-à-dire du sinus de l'arc dont on cherche la dérivée. On devra donc le prendre avec le signe $+$, si l'arc se termine dans le premier ou dans le second quadrant; et avec le signe $-$, si l'arc se termine dans le troisième ou dans le quatrième.

136. On peut remarquer que, d'après ce qui précède, les deux fonctions arc sin x et arc cos x ont des dérivées égales, ou égales et de signes contraires; on s'explique facilement qu'il doit en être ainsi, en remarquant que, si y désigne un arc dont le sinus soit x, $\frac{\pi}{2} - y$ et $y - \frac{\pi}{2}$ auront x pour cosinus. On a donc,

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc} \sin x = \text{arc} \cos x,$$

et $$\text{arc} \sin x - \frac{\pi}{2} = \text{arc} \cos x.$$

On voit, d'après cela, que, suivant la valeur adoptée pour l'arc dont le cosinus est x, sa dérivée sera égale à celle de arc sin x, ou égale et de signe contraire.

137. Dérivée de arc tang x. Posons :

$$y = \text{arc tang}\, x;$$

on en déduit : $$x = \text{tang}\, y;$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$1 = \frac{y'}{\cos^2 y};$$

donc :

$$[22] \qquad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tang}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

La dérivée de arc tang x *est donc* $\frac{1}{1+x^2}$.

On voit que la fonction arc tang x n'a qu'une seule dérivée. Il existe cependant un nombre infini d'arcs qui correspondent à une tangente donnée; mais, si l'on désigne l'un d'eux par y, tous les autres sont compris dans la formule

$$n\pi + y;$$

chacun d'eux a, par conséquent, même dérivée que y.

138. Tableau des dérivées. Comme il est nécessaire de connaître les formules fondamentales du calcul des dérivées, nous les avons toutes réunies dans le tableau suivant :

1° $y=ax+b$,	$y'=a$.
2° $y=f(x)\pm\varphi(x)$,	$y'=f'(x)\pm\varphi'(x)$.
3° $y=f(x).\varphi(x)$,	$y'=f'(x)\varphi(x)+f(x).\varphi'(x)$.
4° $y=\frac{\varphi(x)}{f(x)}$,	$y'=\frac{f(x).\varphi'(x)-\varphi(x).f'(x)}{\{f(x)\}^2}$.
5° $y=x^m$,	$y'=mx^{m-1}$.
6° $y=e^x$,	$y'=e^x$.
7° $y=a^x$,	$y'=a^x\mathrm{L}a$.
8° $y=\mathrm{L}x$,	$y'=\frac{1}{x}$.
9° $y=\log x$,	$y'=\frac{1}{x}\log e$.
10° $y=\sin x$,	$y'=\cos x$.
11° $y=\cos x$,	$y'=-\sin x$.
12° $y=\operatorname{tang} x$,	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$.
13° $y=\operatorname{cotang} x$,	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.
14° $y=\operatorname{séc} x$,	$y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.
15° $y=\operatorname{coséc} x$,	$y'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.
16° $y=\operatorname{arc}\sin x$,	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
17° $y=\operatorname{arc}\cos x$,	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
18° $y=\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$,	$y'=\frac{1}{1+x^2}$.
19° $y=\operatorname{arc}\cot x$,	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$.
20° $y=\operatorname{arc}\operatorname{séc} x$,	$y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
21° $y=\operatorname{arc}\operatorname{coséc} x$,	$y'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
22° $y=\log\sin x$,	$y'=\operatorname{cotang} x$.
23° $y=\log\cos x$,	$y'=-\operatorname{tang} x$.
24° $y=\log\operatorname{tang} x$,	$y'=\frac{1}{\sin x.\cos x}$.
25° $y=\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$,	$y'=\frac{1}{\sin x}$.

Dans les dérivées de arc sin x et de arc coséc x, le radical a le signe de cos y; dans celles de arc cos x et de arc séc x, il a le signe du sinus.

RÉSUMÉ.

109. Définitions. — 110. Développement d'une fonction entière $f(x+h)$: définition de la dérivée d'une telle fonction. — 111. Cette dérivée est la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, quand ce dernier tend vers zéro. — 112. Cette propriété est prise pour la définition de la dérivée d'une fonction quelconque : dérivées successives. — 113. Dérivées de a^x, de e^x. — 114. Dérivées de $\log x$, de Lx. — 115. Dérivée d'une somme. — 116. Définition d'une fonction de fonction : exemples. — 117. Dérivée d'une fonction de fonction. — 118. Exemples. — 119. Extension à un cas plus général. — 120. Dérivée d'un produit. — 121. Dérivée d'un quotient. — 122. Dérivée d'une puissance; cas d'une racine carrée. — 123. Dérivée de u^v, u et v étant deux fonctions de x. — 124. Application des règles précédentes. — 125. Dérivée de $\sin x$. — 126. Dérivée de $\cos x$. — 127. Dérivée de tang x. — 128. Dérivée de cotang x. — 129. Dérivée de séc x. — 130. Dérivée de coséc x. — 131. L'arc x est, dans ces calculs, mesuré par son rapport au rayon du cercle. — 132. Définition des fonctions inverses. — 133. Dérivée de arc sin x. — 134. Remarque sur le double signe de cette dérivée. — 135. Dérivée de arc cos x. — 136. Ces deux dernières dérivées doivent être égales, ou égales et de signes contraires. — 137. Dérivée de arc tang x. — 138. Tableau des formules qui donnent la dérivée des fonctions les plus simples.

EXERCICES.

I. Trouver la dérivée de

$$y=\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

On trouve :
$$y'=\frac{x}{2(\sqrt{x-1})^3}.$$

II. Trouver la dérivée de $y=f(a+bx^2)$.

On trouve : $y'=2f'(a+bx^2)bx$.

III. Trouver la dérivée de $y=f\left(\frac{a}{x}\right)$.

On trouve : $y'=-\frac{a}{x^2}f'\left(\frac{a}{x}\right)$.

IV. Trouver la dérivée de

$$y=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{x+a}{b-x}\right).$$

On trouve : $$y'=-\frac{2}{x^3}f\left(\frac{x+a}{b-x}\right)+\frac{a+b}{x^2(b-x)^2}f'\left(\frac{x+a}{b-x}\right).$$

V. Trouver les dérivées de

$$y=x(\mathrm{L}x-1), \qquad z=e^x(x-1).$$

On trouve : $$y'=\mathrm{L}x, \qquad z'=xe^x.$$

VI. Trouver les dérivées de

$$y=x\sin x+\cos x, \qquad z=\sin x-x\cos x.$$

On trouve : $$y'=x\cos x, \qquad z'=x\sin x.$$

VII. Trouver la dérivée de

$$y=\mathrm{L}(x+\sqrt{1+x^2}).$$

On trouve : $$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

VIII. Trouver la dérivée de

$$y=\operatorname{arc}\cos\left(\frac{a\cos x+b}{b\cos x+a}\right).$$

On trouve : $$y'=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b\cos x+a}.$$

IX. Trouver la dérivée de

$$y=\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right).$$

On trouve : $$y'=\frac{1}{\sin x}.$$

X. Trouver les dérivées de

$$y=\mathrm{L}\operatorname{arc}\sin x, \qquad z=\mathrm{L}\operatorname{arc}\cos x, \qquad v=\mathrm{L}\operatorname{arc}\operatorname{tg} x.$$

On trouve :

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc}\sin x}, \qquad z'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc}\cos x}, \qquad v'=\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}.$$

XI. Trouver la dérivée de

$$y=\operatorname{arc}\sin 2x\sqrt{1-x^2}.$$

On trouve : $$y'=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dire pourquoi cette dérivée est double de celle de arc sin x.

XII. Trouver la dérivée de

$$y = \text{arc tang} \frac{a+x}{1-ax}.$$

On trouve :

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dire pourquoi cette dérivée est la même que celle de arc tang x.

XIII. Trouver la dérivée de

$$y = \text{arc tang} \frac{a+b+x-abx}{1-ab-ax-bx};$$

et dire pourquoi elle est encore la même que la précédente.

XIV. En posant :

$$\mathrm{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \varphi(x),$$

trouver les dérivées de

$$y = \varphi\left(\frac{a+x}{1+ax}\right), \qquad z = \varphi\left(\frac{a+b+x+abx}{1+ab+(a+b)x}\right).$$

On trouve :

$$y' = \frac{2}{1-x^2}, \qquad z' = \frac{2}{1-x^2}.$$

Dire pourquoi ces deux fonctions ont la même dérivée.

XV. Trouver la dérivée de

$$y = \text{arc sin} \frac{\sqrt{1-e^2}\sin x}{1-e\cos x}.$$

On trouve.

$$y' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos x}.$$

XVI. Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{b+a\cos x}\right)\right].$$

XVII. Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x} - \frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\text{arc tang}\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}x\right)\right].$$

XVIII. Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\text{arc cos}\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)\right].$$

Dire pourquoi l'on trouve, pour ces trois expressions (XVI, XVII, XVIII), la même dérivée,

$$y' = \frac{\cos x}{a + b\cos x}.$$

XIX. Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[\frac{a\sin x}{a + b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}\,\mathrm{L}\left(\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}\right)\right].$$

Cette fonction a la même dérivée que les trois précédentes.

XX. Trouver la dérivée de l'expression

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}{1 - x^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{arc sin}\,\frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2}.$$

On trouve :

$$y' = \frac{x^2}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^4}}.$$

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES FONCTIONS A L'AIDE DES DÉRIVÉES, RETOUR DES DÉRIVÉES AUX FONCTIONS.

§ I. Propriétés des dérivées.

139. Définition. On dit qu'une fonction $f(x)$ est *croissante*, lorsqu'un petit accroissement, donné à la variable x, fait prendre à la fonction une valeur plus grande : en d'autres termes, lorsque l'on a, pour de très-petites valeurs de h,

$$f(x+h)-f(x)>0.$$

Une fonction est dite *décroissante*, lorsqu'un petit accroissement, attribué à la valeur x, fait prendre à la fonction une valeur plus petite : en d'autres termes, lorsque l'on a, pour de très-petites valeurs de h,

$$f(x+h)-f(x)<0.$$

140. Condition pour qu'une fonction soit croissante ou décroissante. Puisque la dérivée $f'(x)$ est la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pour $h=0$, il s'ensuit que, lorsque h est, non pas nul, mais très-petit, on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

ε étant une quantité inconnue, fonction de x et de h, qui est très-petite, en même temps que h, et qui tend vers zéro avec h. On tire de là :

$$f(x+h)-f(x)=h\{f'(x)+\varepsilon\}.$$

Or si $f'(x)$ n'est pas nul, on peut prendre h assez petit, pour que ε soit, en valeur absolue, plus petit que $f'(x)$. Le signe de $\{f'(x)+\varepsilon\}$ sera alors celui de $f'(x)$; et, comme h est positif, le signe de $f'(x)$ sera celui du premier membre.

Donc, *si la dérivée* f' (x) *est positive, la fonction* f (x) *est crois-*

sante; et si la dérivée est négative, la fonction est décroissante. Les réciproques sont évidemment vraies.

141. CONDITION COMMUNE AU MAXIMUM ET AU MINIMUM D'UNE FONCTION. Lorsque la variable de laquelle dépend une fonction, change d'une manière continue, la fonction elle-même varie d'une manière continue; et le théorème précédent nous permet de trouver les valeurs de la variable, pour lesquelles la fonction est croissante ou décroissante.

Si la fonction considérée devient maximum pour une certaine valeur a de x, elle est croissante lorsque x est plus petit que a, et décroissante, dès que x a dépassé cette limite. La dérivée, positive d'abord, négative ensuite, doit donc changer de signe, *en passant du positif au négatif*, lorsque x, croissant d'une manière continue, vient à atteindre et à dépasser a.

On verra de même que si, pour $x = a$, la fonction considérée est minimum, la dérivée doit changer de signe, *en passant du négatif au positif*, lorsque x, croissant d'une manière continue, atteindra la valeur a.

On voit, par ce qui précède, que les valeurs de x, qui rendent une fonction maximum ou minimum, sont celles pour lesquelles la dérivée de cette fonction vient à changer de signe. Et, comme une fonction continue ne peut changer de signe qu'en passant par la valeur zéro, intermédiaire entre les valeurs positives et négatives, il en résulte qu'une fonction, dont la dérivée est continue, ne devient maximum ou minimum que pour les valeurs de x qui annulent sa dérivée.

Mais la réciproque n'est pas exacte. Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut non-seulement que la dérivée s'annule; il faut encore qu'elle change de signe: et un grand nombre de fonctions peuvent passer par zéro sans changer de signe.

Nous conclurons de là que, *pour trouver les maximums et minimums d'une fonction* $f(x)$, *on résout l'équation* $f'(x) = 0$; *on rejette les solutions pour lesquelles la dérivée ne change pas de signe. Quant à chacune de celles qui font changer de signe à la dérivée, elles correspondent à un maximum, lorsque la dérivée passe du positif au négatif, et à un minimum, dans le cas contraire.*

On peut remarquer, en outre, que, s'il y a maximum, la dé-

rivée étant d'abord positive, puis nulle, et enfin négative, va constamment en diminuant : sa dérivée, c'est-à-dire la dérivée seconde $f''(x)$, doit donc être négative. Si, au contraire, il y a minimum, la dérivée, d'abord négative, puis nulle, puis positive, va en croissant : donc la dérivée seconde $f''(x)$ doit être positive. Les réciproques sont évidentes.

Donc, *pour qu'une valeur* $x = a$, *qui annule* $f'(x)$, *corresponde à un maximum ou à un minimum, il suffit qu'elle rende* $f''(x)$ *négative ou positive.*

§ II. Étude de quelques fonctions.

142. Étude de la fonction x^x, quand x varie de 0 à ∞. Commençons par chercher la valeur de cette fonction pour $x = 0$. Si l'on attribue immédiatement cette valeur à la variable, la fonction prend la forme indéterminée 0^0, qui n'a aucun sens; car, d'une part, toutes les puissances de 0 sont nulles; et, d'autre part, toute puissance, dont l'exposant est zéro, est égale à 1. Pour connaître la véritable valeur de x^x, c'est-à-dire *la valeur vers laquelle converge* x^x, *lorsque* x *diminue de plus en plus*, posons :

$$y = x^x;$$

en prenant les logarithmes des deux membres, il vient :

$$\log y = x \log x.$$

Or, puisque x doit recevoir une valeur très-petite, posons-le égal à $\frac{1}{z}$, z étant très-grand ; on aura :

$$\log y = \frac{1}{z} \log \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} \log z.$$

Or, il est évident qu'un nombre très-grand est beaucoup plus grand que son logarithme ; (si, par exemple, les logarithmes sont pris dans le système dont la base est 10, le logarithme d'un nombre de 1000 chiffres a seulement 999 pour partie entière) : $\frac{1}{z} \log z$ a donc pour limite 0; et, par suite, $\log y$ diminue indéfiniment : d'où l'on conclut que y tend vers l'unité.

Pour étudier les variations de x^x, à partir de la valeur 1, prenons la dérivée de cette fonction. On a (123), pour expression de cette dérivée,

$$x^x(1+Lx),$$

le logarithme étant pris dans le système de Neper.

Si x est très-petit, cette dérivée est négative; x^x commence donc par décroître, et diminuera tant que l'on aura :

$$1+Lx<0,$$

c'est-à-dire

$$Lx<-1,$$

ou

$$x<\frac{1}{e}.$$

Pour $x=\frac{1}{e}$, la dérivée s'annule, et la fonction devient minimum; x croissant à partir de la valeur $\frac{1}{e}$, la dérivée est toujours positive, et x^x croît sans limite.

143. Étude de la fonction $y=\frac{Lx}{x}$, le logarithme étant pris dans le système de Neper. Pour $x=0$, on a, évidemment, $y=-\infty$. La dérivée est :

$$y'=\frac{1-Lx}{x^2}.$$

Cette dérivée est positive, tant que x est plus petit que e; la fonction augmente donc sans cesse, lorsque x passe de la valeur 0 à la valeur e. La fonction passe alors de la valeur $-\infty$ à la valeur $\frac{1}{e}$. Cette valeur $\frac{1}{e}$ est son maximum; et, la dérivée devenant ensuite négative, la fonction diminue indéfiniment; et l'on voit sans peine qu'elle tend vers zéro, lorsque x augmente sans limite.

144. Problème. *On donne la somme* $x+y$; *trouver le maximum ou le minimum de* x^m+y^m.

Remarquons d'abord que, la somme $x+y$ étant donnée, y est une fonction de x, et que, par conséquent, x^m+y^m est

aussi fonction de x; on peut, par conséquent, lui appliquer le théorème démontré plus haut (**141**).

Posons : $$x+y=2a,$$
$$x^m+y^m=u.$$

Il faut chercher la dérivée de u, et l'égaler à 0; or, on a vidERVemment :
$$u'=mx^{m-1}+my^{m-1}y'.$$

D'ailleurs, l'équation $x+y=2a$,

donne : $$1+y'=0;$$

donc : $$y'=-1;$$

et, par suite, $$u'=mx^{m-1}-my^{m-1}.$$

La condition $$u'=0,$$

revient donc à $$x^{m-1}=y^{m-1},$$

et exige, par conséquent, que l'on ait $x=y$, et, par suite, $x=a$.

Pour savoir s'il y a maximum ou minimum, il faut chercher (**141**) si, lorsque x, en croissant, passe par la valeur a, la dérivée, en changeant de signe, devient négative ou positive. Or, en supposant m plus grand que 1, pour x plus petit que a, $(mx^{m-1}-my^{m-1})$ est négatif; et, pour x plus grand que a, cette différence est positive : donc il y a minimum. La conclusion serait opposée, si $(m-1)$ était négatif.

145. PROBLÈME. *Chercher les valeurs maxima et minima de l'expression.*
$$y=\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}.$$

Cherchons d'abord la dérivée y' de y; on a, d'après la règle donnée (**121**) :
$$y'=\frac{(2x-5)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-5x+6)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{6x^2-10x-11}{(x^2+x+1)^2}.$$

Le dénominateur de y' étant positif, le signe de cette dérivée

sera celui de $(6x^2 - 10x - 11)$. Or, ce trinome est négatif, quand x est compris entre les racines de l'équation

$$[1] \qquad 6x^2 - 10x - 11 = 0,$$

et il est positif dans le cas contraire.

Les deux racines de l'équation [1] sont:

$$x = \frac{5 \mp \sqrt{91}}{6};$$

c'est-à-dire, $\left\{ \begin{array}{l} x' = -0,75656\ 53357, \\ x'' = \quad 2,42323\ 20024; \end{array} \right.$

les valeurs correspondantes de y sont :

$$y = \frac{19 \pm 2\sqrt{91}}{3},$$

c'est-à-dire, $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \quad 12,69292\ 80094, \\ y_2 = \quad 0,02626\ 13428. \end{array} \right.$

On voit que la fonction y, qui ne devient pas infinie, puisque $(x^2 + x + 1)$ ne peut être nul, et qui est par conséquent continue, est croissante, lorsque x varie de $-\infty$ à x'; elle décroît ensuite, lorsque x varie de x' à x'', pour augmenter indéfiniment, quand x augmente à partir de la valeur x''. Elle atteint son maximum pour $x = x'$, et son minimum pour $x = x''$.

On voit, d'ailleurs, que, pour des valeurs très-grandes de x, la fonction diffère peu de l'unité; car, en remplaçant, pour de telles valeurs, le numérateur et le dénominateur par leurs premiers termes, qui sont égaux, l'erreur relative commise sur l'un et sur l'autre, et par suite, sur le quotient, est évidemment très-petite.

En résumé, la marche de la fonction est indiquée par le tableau suivant :

$$
\begin{array}{lll}
x = -\infty, & y = 1, & \\
x = x' = -0,75656\ldots, & y = 12,69292\ldots & \text{maximum}, \\
x = 0, & y = 6, & \\
x = 2, & y = 0, & \\
x = 2,42323\ldots, & y = -0,02626\ldots & \text{minimum}, \\
x = 3, & y = 0, & \\
x = \infty, & y = 1. &
\end{array}
$$

146. Cas où la fonction devient discontinue. Les fonctions considérées précédemment sont continues, et les théorèmes démontrés (**140**, **141**) s'y appliquent sans difficulté. Mais il n'en est pas toujours ainsi ; et il faut alors avoir soin d'examiner à part les valeurs de la variable, pour lesquelles la fonction change brusquement de valeur. La considération de la dérivée ne suffit plus alors pour étudier les variations de la fonction.

Soit, par exemple, la fonction

$$y = \frac{x^2 - 2x + 7}{x^2 - 8x + 15}.$$

On voit immédiatement que cette fonction est discontinue pour les valeurs $x = 3$ et $x = 5$, qui annulent le dénominateur ; et, par conséquent, on ne pourra appliquer les théorèmes de la théorie des dérivées, que pour des valeurs de x variant entre des limites qui ne comprennent pas l'un des nombres 3 et 5.

On a, en prenant la dérivée de y :

$$y' = \frac{-6x^2 + 16x + 26}{(x^2 - 8x + 15)^2}.$$

Si l'on résout l'équation,

$$-6x^2 + 16x + 26 = 0,$$

on trouve :
$$x = \frac{4 \mp \sqrt{55}}{3},$$

et, par suite,
$$\left\{\begin{array}{l} x' = -1,13873\ 28290, \\ x'' = 3,80539\ 94957 ; \end{array}\right.$$

les valeurs correspondantes de y sont :

$$y = -7 \pm \sqrt{55},$$

ou

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}41619\ 84871, \\ y_2 = -14{,}41619\ 84871. \end{cases}$$

Par suite, y' est négatif, tant que x est compris entre $-\infty$ et x', positif pour les valeurs de x comprises entre x' et x''; et il redevient négatif, pour x plus grand que x''. D'après cela, on devrait conclure (140) que y décroît, lorsque x varie dans le premier intervalle, qu'il augmente dans le second, et qu'il diminue dans le troisième. Mais, pour les raisons indiquées plus haut, ces conclusions cessent d'être exactes, à cause de la discontinuité de y.

y diminue, en effet, quand x varie de $-\infty$ à x' : car, dans cet intervalle, la fonction est continue, et la dérivée est négative.

Lorsque x varie de x' à 3, y augmente ; il devient infini pour $x = 3$; puis il passe brusquement à la valeur $-\infty$, et augmente de nouveau jusqu'à $x = x''$, valeur pour laquelle y est maximum. A partir de la valeur x'', y diminue jusqu'à ce que l'on ait $x = 5$, valeur pour laquelle y est $-\infty$; puis cette fonction passe brusquement à la valeur $+\infty$, et diminue ensuite sans cesse, à mesure que x devient de plus en plus grand.

Si l'on remarque, comme plus haut, que, pour des valeurs très-grandes de x, positives ou négatives, y diffère peu de l'unité, on pourra représenter les conclusions qui précèdent par le tableau suivant; et l'on se fera facilement une idée de la marche de la fonction, qui, dans chaque intervalle, varie toujours dans le même sens.

$x = -\infty$,	$y = 1$,
$x = x' = -1{,}13873\ldots$,	$y = 0{,}41619\ldots$ minimum
$x = 0$,	$y = 0{,}46666\ldots$,
$x = 3$,	$y = \pm\infty$,
$x = x'' = 3{,}80539\ldots$,	$y = -14{,}41619\ldots$ maximum,
$x = 5$,	$y = \mp\infty$,
$x = \infty$,	$y = 1$.

§ III. Application des dérivées à la détermination des valeurs des fonctions qui se présentent sous une forme indéterminée.

147. Cas où une fonction se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Soit une fonction :

$$y = \frac{f(x)}{F(x)};$$

et supposons que, pour $x = a$, on ait, à la fois, $f(a) = 0$, $F(a) = 0$; y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; et l'on peut se proposer de déterminer la limite vers laquelle tend y, lorsque x tend vers a. Cette limite est ce qu'on appelle souvent, improprement, la *vraie valeur* de y.

Puisque $f(a) = 0$, $F(a) = 0$, on a identiquement :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{F(x) - F(a)}{x - a}}.$$

Or, lorsque x tend vers a, les termes du rapport, dans le second membre, tendent respectivement, et par définition même, vers les dérivées $f'(a)$ et $F'(a)$. Donc, en prenant les limites des deux membres, on a, pour $x = a$:

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}, \quad \text{ou} \quad \lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Donc si $f'(x)$ et $F'(x)$ ne sont ni nulles ni infinies, pour $x = a$, *la vraie valeur de* y *est la valeur du quotient des dérivées de ses deux termes.*

148. Exemples. 1° Vraie valeur de $\frac{x^m - a^m}{x - a}$, pour $x = a$. Le quotient des dérivées est $\frac{mx^{m-1}}{1}$, et la limite est ma^{m-1}.

149. Cas où une fonction se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Supposons que, pour $x = a$, la fonction $y = \frac{f(x)}{F(x)}$ se présente

sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, c'est-à-dire que l'on ait $f(a)=\infty$, $\mathrm{F}(a)=\infty$. On a identiquement :

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\frac{1}{\mathrm{F}(x)}:\frac{1}{f(x)}.$$

Or, pour $x=a$, $\frac{1}{\mathrm{F}(x)}$ et $\frac{1}{f(x)}$ sont nuls : donc la vraie valeur de cette expression sera la limite du quotient des dérivées (147). Or ce quotient est :

$$\frac{-\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)^2}:\frac{-f'(x)}{f(x)^2}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}\right)^2:\frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}.$$

Si donc la limite de y n'est ni nulle ni infinie, et qu'on la désigne par L, on aura, pour la déterminer :

$$\lim\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\lim\left(\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}\right)^2:\lim\frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)},$$

ou $$\mathrm{L}=\mathrm{L}^2:\lim\frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{L}=\lim\frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)},$$

comme dans le premier cas (147).

Si la limite de y est 0, le raisonnement précédent ne s'applique plus. Mais alors on remarque que, k désignant une constante, l'expression

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}+k, \quad \text{ou} \quad \frac{f(x)+k\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}(x)}$$

devient aussi $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x=a$, et que sa vraie valeur est k, puisque, par hypothèse, $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$ a pour limite 0. On peut donc appliquer la règle précédente; et l'on a :

$$k=\frac{f'(a)+k\mathrm{F}'(a)}{\mathrm{F}'(a)}=\frac{f'(a)}{\mathrm{F}'(a)}+k;$$

donc $$\frac{f'(a)}{\mathrm{F}'(a)}=0, \quad \text{ou} \quad \lim\frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}=0=\lim\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}.$$

La limite de y est encore la limite du rapport des dérivées.

Il en serait encore de même, si la limite de y était infinie. Car si $\frac{f(a)}{F(a)} = \infty$, il en résulte que $\frac{F(a)}{f(a)} = 0$; par suite, en vertu de ce qui précède, $\frac{F'(a)}{f'(a)} = 0$, et, par conséquent, $\frac{f'(a)}{F'(a)} = \infty$.

150. Cas où une fonction se présente sous la forme $0 \times \infty$. Si l'on a un produit $y = f(x) \times F(x)$, et que, pour $x = a$, on trouve $f(a) = 0$, $F(a) = \infty$, on écrit:

$$y = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}, \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}};$$

et l'on applique les règles précédentes; car, sous la première forme, y devient $\frac{0}{0}$, et il devient $\frac{\infty}{\infty}$ sous la seconde.

151. Cas où une fonction se présente sous la forme 0^0. Soit la fonction

$$y = F(x)^{f(x)},$$

et supposons que $F(a) = 0$, et $f(a) = 0$. Si l'on prend les logarithmes des deux membres, on a :

$$\log y = f(x) \times \log F(x).$$

Si l'on peut trouver la limite du produit $f(x) \times \log F(x)$ par la règle (**150**), on aura celle de $\log y$, et par suite celle de y.

152. Cas où $a = \infty$. La démonstration des règles précédentes suppose que a a une valeur finie. Mais on peut prouver directement que les règles subsistent, lorsque la forme indéterminée résulte de l'hypothèse $x = \infty$. Soit, par exemple, $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ une fonction qui, pour $x = \infty$, prend la forme $\frac{0}{0}$. Posons $x = \frac{1}{z}$; nous aurons:

$$= \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Or, pour $x=\infty$, on a $z=0$. On peut donc appliquer la règle (147), et l'on a :

$$\lim y = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. Seulement il faudra s'assurer, avant d'appliquer les règles, que $\frac{f(x)}{F(x)}$ et $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ tendent bien vers une limite déterminée, quand x tend vers ∞. Par exemple, l'expression

$$\frac{x+\cos x}{x-\sin x} = \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}$$

tend évidemment vers 1, quand x tend vers ∞ : tandis que le rapport des dérivées $\frac{1-\sin x}{1-\cos x}$ a une limite complétement indéterminée.

153. Remarque. Il peut arriver qu'en appliquant les règles précédentes, on rencontre des dérivées qui présentent toujours la même indétermination que la fonction dont on cherche la vraie valeur. Dans ce cas on est obligé de recourir à des artifices particuliers (voy. la 1re partie, nos **240** et suiv.). Ce qu'il y a, le plus souvent, de mieux à faire, dans ce cas, c'est de remplacer x par $a+h$, d'effectuer les réductions, et de poser ensuite $h=0$.

Soit, par exemple, $y=\frac{\sqrt[3]{x-a}}{\sqrt[4]{x^2-a^2}}$; elle devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$, et les dérivées de ses deux termes deviennent toutes infinies. En posant $x=a+h$, on a :

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{2ah+h^2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}(2a+h)^{\frac{1}{4}}}, \quad \text{ou} \quad \frac{h^{\frac{1}{12}}}{(2a+h)^{\frac{1}{4}}},$$

et sous cette forme, on voit que la limite est zéro, quand h tend vers zéro.

§ IV. Retour de la dérivée à la fonction primitive.

154. Théorème. *Deux fonctions, qui ont des dérivées égales, ne peuvent différer que par une constante.* Si deux fonctions ont des dérivées égales, leur différence a évidemment pour dérivée 0. Il suffit donc, pour prouver le théorème énoncé, de faire voir qu'*une fonction, dont la dérivée est nulle, est nécessairemnt constante.*

Soit $F(x$, une fonction dont la dérivée soit nulle. Considérons les fractions suivantes :

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\varepsilon_1, \\ \dfrac{F(x+2h)-F(x+h)}{h}=\varepsilon_2, \\ \dfrac{F(x+3h)-F(x+2h)}{h}=\varepsilon_3, \\ \vdots \\ \dfrac{F(x+nh)-F[x+(n-1)h]}{h}=\varepsilon_n. \end{array} \right.$$

Supposons que, h tendant vers zéro, n augmente de telle manière, que le produit nh conserve une valeur constante k. Les seconds membres ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ tendront tous vers zéro ; car, par hypothèse, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement infiniment petit de la variable a toujours zéro pour limite. En chassant les dénominateurs des équations [1], et ajoutant ensuite ces équations, il vient :

$$F(x+nh)-F(x)=F(x+k)-F(x)=h(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots\varepsilon_n),$$

et, en nommant η le plus grand des nombres ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, en valeur absolue,

$$F(x+k)-F(x)<n\eta h<\eta k.$$

Or, les quantités ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ tendant toutes vers zéro, la plus grande d'entre elles η peut devenir aussi petite que l'on veut; et, par suite, la différence *fixe*, $F(x+k)-F(x)$, ne peut différer de zéro. Deux valeurs quelconques de $F(x)$ sont donc égales entre elles; et la fonction est constante.

155. Revenir de la dérivée a la fonction primitive, dans les cas les plus simples. La recherche d'une fonction, dont la dérivée est donnée, est l'un des problèmes les plus difficiles que présente l'analyse; et l'on est loin de savoir le résoudre en général. Le théorème qui précède prouve, au moins, qu'une fois une pareille fonction trouvée, toutes celles qui ont, comme elle, la dérivée proposée, s'obtiendront en lui ajoutant une constante, de valeur arbitraire.

Nous nous bornerons ici à traiter le problème, dans les cas les plus simples, où la solution s'aperçoit, en quelque sorte, immédiatement :

1° Quelle est la fonction dont la dérivée est Ax^m? $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$.

2° Quelle est la fonction dont la dérivée est $\cos mx$? $\frac{\sin mx}{m}$.

3° Quelle est la fonction dont la dérivée est $\sin mx$? $-\frac{\cos mx}{m}$.

4° Quelle est la fonction dont la dérivée est a^x? $\frac{a^x \log e}{\log a}$.

5° Quelle est la fonction dont la dérivée est $\operatorname{tang} x$?

On a :
$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\cos' x}{\cos x};$$

et l'on voit que la fonction demandée est $-\log \cos x$.

6° Quelle est la fonction dont la dérivée est $\frac{2-x^3}{1-x}$?

On a, en effectuant la division :

$$\frac{2-x^3}{1-x} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{1-x}.$$

La fonction demandée est, par conséquent,

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - \mathrm{L}\,(1-x).$$

7° Quelle est la fonction dont la dérivée est $\frac{1}{\sin x}$?

On a :
$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}=\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}}{\text{tang}\frac{1}{2}x}=\frac{\text{tang}'\frac{1}{2}x}{\text{tang}\frac{1}{2}x}.$$

La fonction demandée est, par conséquent, L tang $\frac{1}{2}x$.

8° Quelle est la fonction dont la dérivée est $\frac{1}{a^2+x^2}$?

On a :
$$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\,\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}};$$

la fonction demandée est donc $\frac{1}{a}$ arc tang $\frac{x}{a}$.

9° Quelle est la fonction qui a pour dérivée $\frac{Lx}{x}$?

On a :
$$\frac{Lx}{x}=\frac{1}{x}.\,Lx;$$

donc la fonction est $\frac{1}{2}(Lx)^2$.

10° Quelle est la fonction qui a pour dérivée $\frac{1}{xLx}$?

On a :
$$\frac{1}{xLx}=\frac{\frac{1}{x}}{Lx};$$

et, par conséquent, la fonction demandée est LLx.

Nous nous bornerons à ces exemples, ne pouvant indiquer ici aucune des méthodes que l'on emploie, pour résoudre le problème, dans des cas un peu moins faciles.

RÉSUMÉ.

139. Définition des fonctions croissantes ou décroissantes. — **140.** Condition pour qu'une fonction soit croissante ou décroissante. — **141.** Condi-

tion commune au maximum ou au minimum d'une fonction. — **142.** Étude de la fonction x^x. — **143.** Étude de $\frac{Lx}{x}$. — **144.** Maximum ou minimum de x^m+y^m, quand $x+y=a$. — **145.** Maximum et minimum d'une fraction du second degré. — **146.** Examen d'une fonction discontinue. — **147.** Recherche de la vraie valeur d'une fonction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. — **148.** Exemple. — **149.** Cas où la fonction devient $\frac{\infty}{\infty}$. — **150.** Cas où la fonction devient $0 \times \infty$. — **151.** Cas où elle devient 0^0. — **152.** Cas où $a=\infty$. — **153.** Remarque. — **154.** Deux fonctions, qui ont même dérivée, ne diffèrent que par une constante. — **155.** Retour de la dérivée à la fonction primitive, dans les cas les plus simples.

EXERCICES.

I. Trouver les bases des systèmes, dans lesquels un nombre peut être égal à son logarithme, en employant l'un des procédés suivants :

1° On étudiera la fonction $x-\log x$; et l'on cherchera la condition, pour qu'elle puisse devenir nulle.

2° On étudiera la fonction $\frac{x}{\log x}$; et l'on cherchera la condition, pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

3° On étudiera la fonction $a^x - x$; et l'on cherchera la condition, pour qu'elle puisse devenir égale à zéro.

4° On étudiera la fonction $\frac{a^x}{x}$; et l'on cherchera la condition, pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

On devra, bien entendu, trouver, des quatre manières, le même résultat, qui est

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

II. Examiner si l'équation

$$x^m = m^x,$$

peut admettre d'autre solution que $x=m$.

On met facilement cette équation sous la forme :

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log m}{m}.$$

On répondra donc à la question, en étudiant la fonction $\frac{\log x}{x}$, et en cher-

chant si cette fonction peut prendre deux fois la même valeur pour des valeurs différentes m et x de la variable.

III. Un point lumineux, placé sur une droite verticale, éclaire une portion très-petite d'un plan horizontal, située à une distance d de la droite verticale : étudier les variations de la quantité de lumière reçue, lorsque la hauteur x du point lumineux varie.

Le maximum a lieu, lorsque $x=\frac{d}{\sqrt{2}}$.

IV. Un tronc de pyramide régulière, à bases octogonales, est circonscrit à une sphère, de rayon donné r. Étudier la variation du volume, lorsque varie l'inclinaison des faces latérales sur les bases.

Le minimum a lieu, lorsque le tronc devient un prisme.

V. Une ligne droite, de longueur donnée $2a$ est courbée en arc de cercle, de rayon variable : étudier la variation de l'aire du segment compris entre l'arc et sa corde.

Le maximum a lieu, lorsque l'arc forme une demi-circonférence.

VI. Trouver la vraie valeur de $(1-x)\tang\frac{\pi x}{2}$ pour $x=1$.

On trouve $\frac{2}{\pi}$.

VII. Trouver la vraie valeur de $x^n e^{-x}$ pour $x=\infty$.

On trouve zéro.

VIII. Trouver la vraie valeur de $x^{\frac{1}{x}}$ pour $x=\infty$.

On trouve l'unité.

IX. Trouver la vraie valeur de $xe^{\frac{1}{x}}$ pour $x=0$.

On trouve l'infini.

X. Si l'on désigne par U_m la fonction qui a pour dérivée $\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}$ on a :

$$mU_m=-x^{m-1}\sqrt{1-x^2}+(m-1)U_{m-2}.$$

Comme on a, d'ailleurs, évidemment :

$$U_0=\arcsin x,\quad U_1=-\sqrt{1-x^2},$$

on peut conclure de cette formule un moyen général de former U_m, quelle que soit la valeur paire ou impaire de m.

CHAPITRE III.

SÉRIES QUI SERVENT AU CALCUL DES LOGARITHMES ET DU NOMBRE π.

§ I. Séries qui servent au calcul des logarithmes.

156. Développement en série de $-L(1-u)$. Soit x une variable, que nous ferons varier depuis $x=0$ jusqu'à $x=u$, u désignant une constante positive et moindre que 1. Posons :

$$[1] \qquad f(x) = -L(1-x),$$

le signe L désignant, comme dans le chapitre précédent, un logarithme népérien : la dérivée de $f(x)$ est $\frac{1}{1-x}$; et l'on a évidemment ;

$$[2] \qquad f'(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots. + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$

ainsi que l'on s'en assure, soit en faisant la division, soit en sommant la première partie du second membre, à l'aide de la théorie des progressions.

Posons aussi :

$$[3] \qquad \varphi'(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots. + \frac{x^n}{n};$$

la dérivée de $\varphi(x)$, désignée, suivant l'habitude, par $\varphi'(x)$, sera précisément la première partie de $f'(x)$; et l'on aura :

$$[4] \qquad \varphi'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots. + x^{n+1}.$$

En retranchant l'équation [4] de l'équation [2], il vient :

$$f'(x) - \varphi'(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Le second membre de cette équation est positif et moindre que $\frac{x^n}{1-u}$, tant que x n'est pas égal à u; on a donc :

$$f'(x)-\varphi'(x)>0,$$

$$f'(x)-\varphi'(x)-\frac{x^n}{1-u}<0.$$

Ces inégalités montrent (140), que les fonctions $f(x)-\varphi(x)$ et $f(x)-\varphi(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, sont, la première croissante, la deuxième décroissante, quand x croît de 0 à u. En effet, les deux fonctions sont continues; et la première a une dérivée constamment positive, tandis que la seconde a une dérivée constamment négative.

D'ailleurs, les deux fonctions dont il s'agit sont nulles pour $x=0$; donc, pour $x=u$, la première est positive, et la seconde est négative.

On a, par conséquent :

$$f(u)-\varphi(u)>0,$$

$$f(u)-\varphi(u)-\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}<0;$$

$f(u)$ est donc compris entre $\varphi(u)$ et $\varphi(u)+\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$; et il est, par suite, égal à $\varphi(u)$, augmenté d'une quantité moindre que $\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$. Cette quantité peut, évidemment se représenter par $\theta\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, en désignant par θ un nombre positif inférieur à l'unité. On a donc enfin :

$$f(u)=\varphi(u)+\theta\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)},$$

c'est-à-dire,

$$-\mathrm{L}(1-u)=u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\ldots+\frac{u^n}{n}+\theta\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}.$$

u étant, comme on l'a supposé, inférieur à l'unité, on voit que

$\frac{0u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$ tend vers zéro, à mesure que n augmente; et l'on a, par conséquent :

$$[a] \qquad -\mathrm{L}(1-u)=u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^4}{4}+\ldots.$$

La démonstration même prouve que la série, qui forme le second membre, est convergente, lorsque u est plus petit que l'unité. On pourrait aussi le déduire des règles démontrées (Liv. I, chap. I).

137. Développement de $\mathrm{L}(1+u)$. Soit x une variable, que nous ferons varier entre les limites 0 et u, u désignant une constante positive moindre que 1. Posons :

$$[1] \qquad f(x)=\mathrm{L}(1+x);$$

la dérivée de $f(x)$ est $\frac{1}{1+x}$; et l'on a évidemment :

$$[2] \qquad \left\{\begin{array}{l} f'(x)=1-x+x^2-x^3\ldots\pm x^{n-1}\mp\frac{x^n}{1+x}, \\ f'(x)=1-x+x^2-x^3\ldots\pm x^{n-1}\mp x^n\pm\frac{x^{n+1}}{1+x}. \end{array}\right.$$

Posons aussi :

$$[3] \qquad \varphi(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots\pm\frac{x^n}{n},$$

et désignons, suivant la notation habituelle, par $\varphi'(x)$ la dérivée de $\varphi(x)$; nous aurons :

$$[4] \qquad \varphi'(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots\pm x^{n-1}.$$

En retranchant l'équation [4] de chacune des équations [2], on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x)-\varphi'(x)=\mp\frac{x^n}{1+x}, \\ f'(x)-\varphi'(x)\pm x^n=\pm\frac{x^{n+1}}{1+x}. \end{array}\right.$$

Les seconds membres de ces équations sont de signes contraires; par conséquent, les deux fonctions $f(x)-\varphi(x)$ et

$f(x) - \varphi(x) \pm \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ayant leurs dérivées de signes contraires, sont l'une croissante, l'autre décroissante, quand x croît de 0 à u; et, comme elles sont nulles pour $x=0$, elles sont, pour $x=u$, de signes contraires; et $f(u)$ est, par conséquent, compris entre

$$\varphi(u) \quad \text{et} \quad \varphi(u) \mp \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

On a donc, en désignant par θ un nombre positif moindre que 1 :

$$f(u) = \varphi(u) \mp \frac{\theta u^{n+1}}{n+1};$$

et, par suite, comme $\frac{\theta u^{n+1}}{n+1}$ tend vers zéro, lorsque n augmente,

$$[b] \qquad L(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots.$$

Nous remarquerons, comme à la fin de l'article précédent, que la démonstration même de la formule [b] prouve que la série, qui forme le second membre, est convergente, lorsque u est moindre que 1.

La démonstration pourrait même se faire, sans modifications, si l'on avait $u=1$; et la série précédente peut donner, par conséquent, le logarithme népérien de 2,

$$L2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

158. Formule pour le calcul des logarithmes népériens. Reprenons les deux formules :

$$L(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots,$$

$$-L(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} \ldots;$$

il vient, en ajoutant, et en observant que

$$L(1+u)-L(1-u)=L\left(\frac{1+u}{1-u}\right),$$

$$[1] \qquad L\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=2\left(u+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+\ldots\right).$$

$\frac{1+u}{1-u}$ étant plus grand que 1, posons :

$$\frac{1+u}{1-u}=1+\frac{h}{N}=\frac{N+h}{N};$$

d'où

$$u=\frac{h}{2N+h}.$$

L'équation [1] devient, en observant que

$$L\frac{N+h}{N}=L(N+h)-LN,$$

$$[c] \quad L(N+h)=LN+2\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{h^3}{3(2N+h)^3}+\frac{h^5}{5(2N+h)^5}+\ldots\right].$$

Cette formule, où N et h désignent deux nombres positifs quelconques, *permet de calculer* $L(N+h)$, *quand on connaît* LN.

159. Limite de l'erreur commise, en s'arrêtant a un certain terme. Si l'on néglige, dans le second membre de l'équation [c], tous les termes qui suivent $2\frac{h^{2i+1}}{(2i+1)(2N+h)^{2i+1}}$, l'erreur commise ε sera évidemment moindre que

$$2\frac{h^{2i+3}}{(2i+3)(2N+h)^{2i+3}}\left[1+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^4+\ldots\right],$$

c'est-à-dire moindre que

$$\frac{2h^{2i+3}}{(2i+3)(2N+h)^{2i+3}\left\{1-\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2\right\}};$$

on aura donc :

$$[d] \qquad \varepsilon<\frac{h^{2i+3}}{(2i+3)(2N+h)^{2i+1}\,2N(N+h)}.$$

En particulier, si l'on néglige, dans la série, tous les termes qui suivent le premier, et que l'on écrive simplement :

$$L(N+h)=LN+\frac{2h}{2N+h},$$

l'erreur commise sera moindre que

$$\frac{h^3}{6N(N+h)(2N+h)},$$

et, à plus forte raison, moindre que

$$\frac{1}{12}\left(\frac{h}{N}\right)^3.$$

160. Calcul de L10. Le module du système vulgaire est l'inverse du logarithme népérien de 10. Il est important de connaître ce nombre. Pour le calculer, on cherche d'abord L10. Or on a :

$$L10=L2+L5.$$

En faisant $N=1$, $h=1$, dans la formule (c), on a :

$$L2=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}+\frac{1}{11.3^{11}}+\ldots.\right).$$

Puis, en faisant $N=4$, $h=1$, dans la même formule, et remarquant que $L4=2L2$, on a :

$$L5=2L2+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\frac{1}{7.9^7}+\frac{1}{9.9^9}+\frac{1}{11.9^{11}}+\ldots.\right).$$

Par conséquent,

$$L10=6\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\ldots.\right)$$

$$+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\frac{1}{7.9^7}+\ldots.\right),$$

ou, en faisant passer les coefficients de chaque série **aux** numérateurs, et simplifiant :

$$[e]\quad L10=\left(2+\frac{2}{3.3^2}+\frac{2}{5.5^4}+\frac{2}{7.3^6}+\dots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3.3^6}+\frac{2}{5.3^{10}}+\frac{2}{7.3^{14}}+\dots\right)\right).$$

On calcule d'abord les nombres $\frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^4}, \frac{2}{3^6}, \frac{2}{5^8}, \dots$ dont chacun est le neuvième du précédent. On a ainsi :

$$\frac{2}{3^2}=0,22222\ 22222\ 22222\ 22222\ 22$$

$$\frac{2}{3^4}=0,02469\ 13580\ 24691\ 35802\ 47$$

$$\frac{2}{3^6}=0,00274\ 34842\ 24965\ 70644\ 72$$

$$\frac{2}{3^8}=0,00030\ 48315\ 80551\ 74516\ 08$$

$$\frac{2}{3^{10}}=0,00003\ 38701\ 75616\ 86057\ 34$$

$$\frac{2}{3^{12}}=0,00000\ 37633\ 52846\ 31784\ 15$$

$$\frac{2}{3^{14}}=0,00000\ 04181\ 50316\ 25753\ 79$$

$$\frac{2}{3^{16}}=0,00000\ 00464\ 61146\ 25083\ 75$$

$$\frac{2}{3^{18}}=0,00000\ 00051\ 62349\ 58342\ 64$$

$$\frac{2}{3^{20}} = 0,00000\ 00005\ 73594\ 39816\ 85$$

$$\frac{2}{3^{22}} = 0,00000\ 00000\ 63732\ 71090\ 65$$

$$\frac{2}{3^{24}} = 0,00000\ 00000\ 07081\ 41232\ 29$$

$$\frac{2}{3^{26}} = 0,00000\ 00000\ 00786\ 82359\ 14$$

$$\frac{2}{3^{28}} = 0,00000\ 00000\ 00087\ 42485\ 35$$

$$\frac{2}{3^{30}} = 0,00000\ 00000\ 00009\ 71387\ 15$$

$$\frac{2}{3^{32}} = 0,00000\ 00000\ 00001\ 07931\ 91$$

$$\frac{2}{3^{34}} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 11992\ 43$$

$$\frac{2}{3^{36}} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 01332\ 49$$

$$\frac{2}{3^{38}} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00148\ 05$$

$$\frac{2}{3^{40}} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00016\ 45$$

$$\frac{2}{3^{42}} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00001\ 83$$

$$\frac{2}{3^{44}} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 20$$

On forme ensuite les termes de la première série, en divisant

respectivement les nombres ainsi obtenus par 3, 5, 7.... On a ainsi :

2,				
0,07407	40740	74074	07407	41
0,00493	82716	04938	27160	49
0,00039	19263	17852	24377	82
0,00003	38701	75616	86057	34
0,00000	30791	06874	26005	21
0,00000	02894	88680	48598	78
0,00000	00278	76687	75050	25
0,00000	00027	33008	60299	04
0,00000	00002	71702	60965	40
0,00000	00000	27314	01895	99
0,00000	00000	02770	98743	07
0,00000	00000	00283	25649	29
0,00000	00000	00029	14161	45
0,00000	00000	00003	01464	98
0,00000	00000	00000	31335	07
0,00000	00000	00000	03270	66
0,00000	00000	00000	00342	64
0,00000	00000	00500	00036	01
0,00000	00000	00000	00003	79
0,00000	00000	00000	00000	40
0,00000	00000	00000	00000	04
2,07944	15416	79835	92825	13 = 3L 2.

On forme de même les termes de la seconde série; et l'on a :

0,22222	22222	22222	22222	22
0,00091	44947	41655	23548	24
0,00000	67740	35123	37211	47
0,00000	00597	35759	46536	26
0,00000	00005	73594	39815	85
0,00000	00000	05793	88280	97
0,00000	00000	00060	52489	16
0,00000	00000	00000	64759	14
0,00000	00000	00000	00705	44
0,00000	00000	00000	00007	79
0,00000	00000	00000	00000	09
0,22314	35513	14209	75576	63

Puis on ajoute les deux résultats; ce qui donne :

$$L10 = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68402.$$

On en conclut, par division, que le module des logarithmes vulgaires est :

$$\frac{1}{L10} = \log e = \frac{1}{2{,}302\ldots} = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765.$$

161. Calcul des logarithmes vulgaires. Pour obtenir les logarithmes vulgaires, c'est-à-dire les logarithmes dans le système dont la base est 10, il faut multiplier les logarithmes népériens par le facteur $\frac{1}{L10}$, dont nous venons de trouver la valeur. On pourra aussi calculer immédiatement les logarithmes, en remarquant que, si l'on désigne ce module par M, et qu'on emploie la notation log. pour indiquer ces logarithmes vulgaires, la formule [c] devient :

$$\log(N+h) - \log N = 2M\left\{\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(2N+h)^3} + \ldots\right\}.$$

Si l'on suppose $h = 1$, cette formule devient :

$$[f]\quad \log(N+1) - \log N = \left\{\frac{2M}{2N+1} + \frac{1}{3}\frac{2M}{(2N+1)^3} + \ldots\right\}.$$

C'est la formule employée par les calculateurs, qui ont construit les tables dont on fait usage. On calcule seulement les logarithmes des nombres premiers; les autres s'obtiennent par des additions. Les premiers calculs sont laborieux : mais, lorsqu'on arrive à 101, deux termes de la série suffisent pour obtenir son logarithme avec huit décimales; et lorsqu'on dépasse 1000, le premier terme suffit.

§ II. Séries qui servent au calcul du nombre π.

162. Développement de arc tang u. Soit x une variable, que nous supposons comprise entre 0 et une limite constante u, inférieure ou égale à l'unité.

Posons :

$$f(x) = \operatorname{arc\,tang} x;$$

cet arc étant celui qui s'annule avec x, et qui varie ensuite d'une manière continue avec cette variable. Nous aurons :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - x^{4n-2} + \frac{x^{4n}}{1+x^2}.$$

Posons : $\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \ldots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$,

et, par suite :

$$\varphi'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 - \ldots - x^{4n-2};$$

nous aurons : $f'(x) - \varphi'(x) = \frac{x^{4n}}{1+x^2}.$

Par conséquent, la différence $f'(x) - \varphi'(x)$ est constamment positive, et moindre que x^{4n}. On peut donc écrire :

$$f'(x) - \varphi'(x) > 0,$$

$$f'(x) - \varphi'(x) - x^{4n} < 0;$$

et, par suite, la fonction $f(x) - \varphi(x)$ est croissante, et la fonction $f(x) - \varphi(x) - \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ est décroissante, lorsque x varie de 0 à u. Mais ces deux fonctions sont nulles, pour $x = 0$. La première est donc positive, et la seconde négative, pour $x = u$; en sorte que $f(u)$ est compris entre $\varphi(u)$ et $\varphi(u) + \frac{u^{4n+1}}{4n+1}$. Et l'on peut écrire, en désignant par θ un coefficient positif moindre que 1 :

$$f(u) = \varphi(u) + \theta \frac{u^{4n+1}}{4n+1},$$

c'est-à-dire,

$$\operatorname{arc\,tang} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \ldots - \frac{u^{4n-1}}{4n-1} + \theta \frac{u^{4n+1}}{4n+1};$$

et comme, pour une grande valeur de n, le terme $\theta \frac{u^{4n+1}}{4n+1}$ est aussi petit que l'on veut, on a :

$$[g] \qquad \text{arc tang}\, u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} - \dots$$

Les deux membres de la formule changeant de signe avec u, celle-ci s'applique évidemment aux valeurs de u comprises entre -1 et $+1$.

163. Cas où u est plus grand que l'unité. Si l'on donnait une tangente u plus grande que l'unité, la série, qui donne l'arc correspondant, devenant divergente, ne serait plus d'aucun usage; mais on pourrait facilement calculer l'arc demandé, en cherchant à sa place arc tang $\frac{1}{u}$, qui en est évidemment le complément, et qui sera formé par une série convergente.

Soit, par exemple, à trouver arc tang 4,49341; on fera usage de la formule :

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, u = \text{arc tang}\, \frac{1}{u} = \frac{1}{u} - \frac{1}{3u^3} + \frac{1}{5u^5} - \frac{1}{7u^7} + \dots$$

Pour calculer les termes successifs de cette série, on formera d'abord les fractions $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^3}, \frac{1}{u^5}, \dots$; ce qui sera facile, chacune s'obtenant en divisant la précédente par le diviseur fixe

$$u^2 = 20{,}19073\ 34281\,;$$

on aura ainsi :

$$\frac{1}{u} = 0{,}22253\ 81315\ 97161$$

$$\frac{1}{u^3} = 0{,}01102\ 22906\ 16122$$

$$\frac{1}{u^5} = 0{,}00054\ 59083\ 81950$$

$$\frac{1}{u^7} = 0{,}00002\ 70375\ 70670$$

$$\frac{1}{u^9} = 0{,}00000\ 13391\ 07902$$

$$\frac{1}{u^{11}} = 0{,}00000\ 00663\ 22895$$

$$\frac{1}{u^{13}} = 0{,}00000\ 00032\ 84819$$

$$\frac{1}{u^{15}} = 0{,}00000\ 00001\ 62689$$

$$\frac{1}{u^{17}} = 0{,}00000\ 00000\ 08058$$

$$\frac{1}{u^{19}} = 0{,}00000\ 00000\ 00399$$

$$\frac{1}{u^{21}} = 0{,}00000\ 00000\ 00020$$

l'on en conclura :

$$\frac{1}{u} = 0{,}22254\ 81315\ 97161 \qquad \frac{1}{3u^3} = 0{,}00367\ 40968\ 72041$$

$$\frac{1}{5u^5} = 0{,}00010\ 91816\ 76390 \qquad \frac{1}{7u^7} = 0{,}00000\ 38625\ 10096$$

$$\frac{1}{9u^9} = 0{,}00000,\ 01487\ 89767 \qquad \frac{1}{11u^{11}} = 0{,}00000\ 00060\ 29354$$

$$\frac{1}{13u^{13}} = 0{,}00000\ 00002\ 52678 \qquad \frac{1}{15u^{15}} = 0{,}00000\ 00000\ 10846$$

$$\frac{1}{17u^{17}} = 0{,}00000\ 00000\ 00474 \qquad \frac{1}{19u^{19}} = 0{,}00000\ 00000\ 00021$$

$$\frac{1}{21u^{21}} = 0{,}00000\ 00000\ 00001$$

$$= 0{,}22265\ 74623\ 16471 \qquad = 0{,}00367\ 79354\ 22358$$

donc : $\text{arc cotang}\,(4{,}49341) = +\,0{,}22265\ 64623\ 16471$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\,0{,}00367\ 79654\ 22358$

ou $\qquad \text{arc cotang}\,(4{,}49341) = 0{,}21897\ 94968\ 94113.$

Puis : $\text{arc tang}\,(4,49341) = \frac{\pi}{2} - \text{arc cotang}\,(4,49341)$

$$\begin{array}{rr} & = +\,1,57079\ 63267\ 94897 \\ & -\,0,21897\ 94968\ 94113 \\ \hline \text{ou arc tang}\,(4,49341) = & 1,35181\ 68299\ 00784. \end{array}$$

164. Calcul du rapport de la circonférence au diamètre. Si, dans la formule démontrée (**161**), on suppose $u = 1$, l'arc dont la tangente est u, est égal à $\frac{\pi}{4}$, et l'on a :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

Cette série est convergente ; mais les termes décroissent trop lentement pour qu'on puisse facilement l'employer au calcul du nombre π.

On peut obtenir d'autres expressions, qui conduisent rapidement à des valeurs très-approchées de ce nombre. Posons :

$$\text{arc tang}\,x = p,\ \text{arc tang}\,y = q;$$

on aura :

$$x = \text{tang}\,p,\ y = \text{tang}\,q,$$

$$\text{tang}\,(p+q) = \frac{\text{tang}\,p + \text{tang}\,q}{1 - \text{tang}\,p\ \text{tang}\,q} = \frac{x+y}{1-xy};$$

donc : $\text{arc tang}\,x + \text{arc tang}\,y = \text{arc tang}\,\frac{x+y}{1-xy}.$

On trouverait de même :

$$\text{arc tang}\,x - \text{arc tang}\,y = \text{arc tang}\,\frac{x-y}{1+xy}.$$

En faisant, dans la formule qui donne $\text{tang}\,(p+q)$, $q = p$, $q = 2p$, $q = 3p$, on trouvera successivement :

$$2\ \text{arc tang}\,x = \text{arc tang}\,\frac{2x}{1-x^2},$$

$$3\ \text{arc tang}\,x = \text{arc tang}\,\frac{3x-x^3}{1-3x^2},$$

$$4\ \text{arc tang}\,x = \text{arc tang}\,\frac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4};$$

et ainsi de suite.

En attribuant à x et à y diverses valeurs, lès formules précédentes donnent:

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang } 1 = \text{arc tang } \tfrac{1}{2} + \text{arc tang } \tfrac{1}{3},$$

$$= \text{arc tang } \tfrac{1}{2} + \text{arc tang } \tfrac{1}{5} + \text{arc tang } \tfrac{1}{8},$$

$$= 2 \text{ arc tang } \tfrac{1}{2} - \text{arc tang } \tfrac{1}{7},$$

$$= 2 \text{ arc tang } \tfrac{1}{3} + \text{arc tang } \tfrac{1}{7},$$

$$= 3 \text{ arc tang } \tfrac{1}{3} - \text{arc tang } \tfrac{2}{11},$$

$$= 4 \text{ arc tang } \tfrac{1}{5} - \text{arc tang } \tfrac{1}{239}.$$

La dernière de ces expressions est celle qui se prête le mieux au calcul de $\frac{\pi}{4}$.

Voici le tableau des calculs à faire. En appliquant la formule (g), on a:

$$\pi = 4 \text{ arc tang } \frac{1}{5} - \text{arc tang } \frac{1}{239}$$

$$= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \dots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \dots\right).$$

Les différents termes de la série, arc tang $\frac{1}{239}$, réduits en fractions décimales, donnent:

$$\frac{1}{239} = \quad 0{,}00418\ 41004\ 18410\ 04184\ 10$$

$$-\frac{1}{3.239^3} = -\ 0{,}00000\ 00244\ 16591\ 78708\ 38$$

$$\frac{1}{5.239^5} = \quad 0{,}00000\ 00000\ 00256\ 47231\ 44$$

$$-\frac{1}{7.239^7} = -\ 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00320\ 71$$

$$\text{arc tang } \frac{1}{239} = \quad 0{,}00418\ 40760\ 02074\ 73386\ 45.$$

Pour évaluer arc tang $\frac{1}{5}$, calculons d'abord les termes positifs de la série :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} &= 0{,}20000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00 \\
\frac{1}{5.5^5} &= 0{,}00006\ 40000\ 00000\ 00000\ 00 \\
\frac{1}{9.5^9} &= 0{,}00000\ 00568\ 88888\ 88880\ 89 \\
\frac{1}{13.5^{13}} &= 0{,}00000\ 00000\ 63015\ 38461\ 54 \\
\frac{1}{17.5^{17}} &= 0{,}00000\ 00000\ 00077\ 10117\ 65 \\
\frac{1}{21.5^{21}} &= 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 09986\ 44 \\
\frac{1}{25.5^{25}} &= 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00013\ 42 \\
\frac{1}{29.5^{29}} &= 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 02 \\
\hline
\text{La somme} &= 0{,}20006\ 40569\ 51981\ 47467\ 96.
\end{aligned}$$

Si nous calculons ensuite les termes négatifs, nous aurons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3.5^3} &= 0{,}00266\ 66666\ 66666\ 66666\ 67 \\
\frac{1}{7.5^7} &= 0{,}00000\ 18285\ 71428\ 57142\ 86 \\
\frac{1}{11.5^{11}} &= 0{,}00000\ 00018\ 61818\ 18181\ 82 \\
\frac{1}{15.5^{15}} &= 0{,}00000\ 00000\ 02184\ 53333\ 53 \\
\frac{1}{19.5^{19}} &= 0{,}00000\ 00000\ 00002\ 75941\ 05 \\
\frac{1}{23.5^{23}} &= 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00464\ 72 \\
\frac{1}{27.5^{27}} &= 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 50 \\
\hline
\text{La somme} &= 0{,}00266\ 84971\ 02100\ 71630\ 95.
\end{aligned}$$

En retranchant cette somme de la somme des termes positifs, on obtient, pour valeur de l'arc dont la tangente est $\frac{1}{5}$:

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{5} = 0{,}19739\ 55598\ 49880\ 75837\ 01$$

D'où :

$$4\ \text{arc tang}\,\frac{1}{5} = 0{,}78958\ 22393\ 99523\ 03348\ 04.$$

Et comme

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{239} = 0{,}00418\ 40760\ 02074\ 72386\ 45$$

on a :

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}78539\ 81633\ 97448\ 30961\ 59$$

Donc :

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

RÉSUMÉ.

156. Développement en série de $-L(1-u)$, u étant compris entre 0 et 1. — **157**. Développement de $L(1+u)$. — **158**. Série qui représente $L(N+h)-LN$. — **159**. Limite de l'erreur commise, en s'arrêtant à un terme donné. — **160**. Calcul du logarithme népérien de 10. — **161**. Calcul des logarithmes vulgaires. — **162**. Développement de arc tang u, u étant moindre que 1. — **163**. Développement de arc cot u, lorsque u est plus grand que 1 ; application numérique. — **164**. Calcul de π à vingt décimales.

EXERCICES.

I. Démontrer la formule :

$$Lx = \frac{L(1+x)+L(1-x)}{2} + \left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \ldots\right].$$

On applique la formule [1] du n° **158**.

II. Démontrer la formule :

$$L(x+5) = L(x+3) + L(x-3) + L(x+4) + L(x-4) - L(x-5) - 2Lx$$
$$-2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3 + \ldots\right].$$

On applique la même formule.

III. Si a et b désignent deux nombres positifs donnés, et que l'on forme une série de nombres, d'après les formules suivantes,

$$a' = \frac{1}{2}(a+b), \quad b' = \sqrt{a'b},$$

$$a'' = \frac{1}{2}(a'+b'), \quad b'' = \sqrt{a''b'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

si l'on pose, en outre, $a = b\cos\varphi$, $a^{(m)}$ et $b^{(m)}$ seront exprimés par les formules :

$$a^{(m)} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2^m \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2^m}\right)}, \quad b^{(m)} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2^m \sin\left(\frac{\varphi}{2^m}\right)};$$

et la limite commune, vers laquelle convergent $a^{(m)}$ et $b^{(m)}$, est $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\varphi}$. Si $a=0$, $b=1$, cette limite est $\frac{2}{\pi}$.

On s'appuie sur la formule suivante, facile à démontrer :

$$\sin\varphi = 2^m \sin\left(\frac{\varphi}{2^m}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{8}\cdots\cos\left(\frac{\varphi}{2^m}\right).$$

LIVRE III.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DE DEGRÉ QUELCONQUE.

§ I. Variations d'une fonction entière $f(x)$.

165. Forme générale d'une fonction entière. La forme la plus générale, que puisse présenter une fonction entière de x, $f(x)$, est la suivante :

$$f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x + A_m;$$

A, $A_1 \dots A_m$ désignant des coefficients constants, et m le degré de la fonction.

Lorsque x varie, ce polynome peut changer de signe, en suivant des lois d'accroissement ou de décroissement, très-variables avec la valeur et les signes des coefficients. Il existe cependant quelques principes généraux qui, pour être presque complétement évidents, n'en sont pas moins très-utiles à signaler d'une manière toute spéciale.

166. Théorème I. *Toute fonction, entière et rationnelle, d'une variable* x, *est une fonction continue. C'est-à-dire que; si l'on fait croître la variable d'une manière continue, la fonction variera aussi d'une manière continue, et ne pourra pas passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.*

Pour prouver qu'une fonction $f(x)$ est continue, il suffit de faire voir qu'en donnant à x un accroissement h suffisamment petit, l'accroissement $f(x+h) - f(x)$ de la fonction pourra être aussi petit qu'on le voudra.

Or on sait que le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

a pour limite, quand h tend vers zéro, la dérivée de $f(x)$, qui est :

$$f'(x)=m\mathrm{A}x^{m-1}+(m-1)\mathrm{A}_1x^{m-2}+(m-2)\mathrm{A}_2x^{m-3}+\ldots.+\mathrm{A}_{m-1};$$

on a donc $\qquad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon$

ε étant une quantité qui tend vers zéro avec h. On en tire :

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon].$$

Or $f'(x)$, n'ayant pas de dénominateurs qui puissent s'annuler, n'est infini pour aucune valeur de x; le produit $h[f'(x)+\varepsilon]$ tend donc nécessairement vers zéro avec h; et, par suite, il en est de même de $f(x+h)-f(x)$; ce qui démontre la proposition énoncée.

167. Remarque. La démonstration s'applique évidemment à toute fonction dont la dérivée est finie; et l'on peut énoncer ce théorème plus général :

Une fonction reste continue tant que sa dérivée ne devient pas infinie.

168. Théorème II. *Dans une fonction entière*

$$f(x)=\mathrm{A}x^m+\mathrm{A}_1x^{m-1}+\ldots.\mathrm{A}_{m-1}x+\mathrm{A}_m,$$

on peut toujours donner à x *une valeur assez grande pour que le premier terme devienne aussi grand que l'on voudra, par rapport à la somme de tous les autres. et donne, par conséquent, son signe au polynome.*

Pour prouver que le premier terme peut devenir aussi grand que l'on voudra, par rapport à la somme de tous les autres, il suffit, évidemment, de prouver qu'il peut devenir aussi grand que l'on voudra, par rapport à chacun d'eux considéré isolément.

Or, en comparant le premier terme, Ax^m, au terme général, A_nx^{m-n}, on a :

$$\frac{Ax^m}{A_nx^{m-n}}=\frac{A}{A_n}x^n;$$

et ce rapport, à cause du facteur x^n, peut grandir sans limite. On peut donc prendre x assez grand pour que le premier terme soit mille, cent mille fois, un million, cent millions.... de fois plus grand que l'un quelconque des autres, et, par suite, aussi grand que l'on voudra, par rapport à la somme.

169. Remarque. Il résulte du théorème précédent, qu'une fonction, de degré pair, a le même signe que le coefficient de son premier terme, pour de très-grandes valeurs, positives ou négatives, de la variable. Une fonction, de degré impair a aussi le même signe que le coefficient de son premier terme, quand la variable reçoit une valeur positive très-grande; mais elle prend un signe opposé à celui de ce coefficient, lorsque x est négatif et de très-grande valeur absolue.

Exemples. 1° $x^6-1000x^4-195000x^3+1$

est positif, si la valeur absolue de x est suffisamment grande, quel que soit, du reste, son signe.

2° $x^7+10000000x^6-x^3+1$

est positif pour de grandes valeurs positives de x, et négatif, lorsque x, étant négatif, a une valeur absolue suffisamment grande.

§ II. Théorèmes sur les racines d'une équation.

170. Théorème I. *Lorsque deux nombres,* a *et* b, *substitués dans une fonction entière* f(x), *donnent des résultats de signes contraires, l'équation* f(x) = 0 *a, au moins, une racine réelle comprise entre* a *et* b.

Si l'on suppose, en effet, que x varie d'une manière continue depuis la valeur $x=a$ jusqu'à la valeur $x=b$, $f(x)$ (**166**) variera lui-même d'une manière continue : or, passant de la valeur $f(a)$ à la valeur $f(b)$, qui a un signe contraire, il devra nécessairement changer de signe ; et, à cause de la continuité, il prendra

la valeur zéro, intermédiaire entre les valeurs négatives et les valeurs positives.

171. Remarque. Le même raisonnement s'applique à toute équation, dont le premier membre est fonction continue de la variable x.

172. Théorème II. *Une équation algébrique, de degré impair, à coefficients réels, a au moins une racine réelle, de signe contraire à son dernier terme.*

Soit $f(x) = x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + A_2 x^{2n-1} + \ldots + A_{2n+1} = 0,$

une équation de degré impair.

Si l'on substitue à x une valeur négative très-grande, le résultat de cette substitution sera négatif (169). Si l'on substitue, au contraire, une valeur positive très-grande, le résultat sera positif; si, enfin, on substitue à x la valeur 0, la fonction $f(x)$ se réduira à son dernier terme A_{2n+1}.

Nous pouvons indiquer ces résultats par le tableau suivant:

Valeurs de x:	Signes de $f(x)$:
$-\infty$	$-$
0	Signe de A_{2n+1}
$+\infty$	$+$

Si donc A_{2n+1} est négatif, $f(x)$ change de signe, lorsque x passe de la valeur 0 à $+\infty$, et a, par suite, une racine positive. Si A_{2n+1} est positif, $x=0$ et $x=-\infty$ donnent à $f(x)$ des valeurs de signes contraires: et il y a, par conséquent, une racine négative.

Exemples. L'équation

$$x^7 - 8x^5 + 3x^2 - 3 = 0,$$

a, au moins, une racine positive; et l'équation

$$x^9 + 8x^4 + 3 = 0,$$

a, au moins, une racine négative.

173. Théorème III. *Une équation algébrique, de degré pair, à*

coefficients réels, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles.

Soit

$$f(x)=x^{2m}+A_1x^{2m-1}+A_2x^{2m-2}+\ldots+A_{2m-1}x+A_{2m}=0,$$

une équation, de degré pair, dont le dernier terme est négatif. D'après ce qui précède, on peut former le tableau suivant :

Valeurs de x :	Signes de $f(x)$:
$-\infty$	$+$
0	$-$
$+\infty$	$+$

Lors donc que x varie de $-\infty$ à 0, $f(x)$ change de signe : et il en est de même, lorsque x varie de 0 à $+\infty$. Il y a donc nécessairement une racine comprise entre $-\infty$ et 0, et une autre entre 0 et $+\infty$; c'est-à-dire deux racines, l'une positive et l'autre négative.

§ III. Nombre des racines d'une équation.

174. Postulatum. Nous admettrons, sans démonstration, la proposition suivante, qui est fondamentale, et qui, hâtons-nous de le dire, peut se démontrer en toute rigueur.

Toute équation algébrique, à une inconnue, ne renfermant que des puissances entières et positives de cette inconnue, et dont les coefficients sont des nombres donnés, réels ou imaginaires de la forme $m+n\sqrt{-1}$, *admet, au moins, une racine réelle, ou une racine imaginaire de la forme* $a+b\sqrt{-1}$, a *et* b *désignant deux nombres réels.*

Cette proposition étant admise, nous en déduirons facilement la suivante.

175. Théorème fondamental. *Une équation, de degré* m, *de la forme*

$$[1] \qquad Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=0,$$

dans laquelle $A, A_1, A_2, \ldots A_m$ *représentent des nombres donnés, réels ou imaginaires, admet toujours précisément* m *racines réelles ou imaginaires.*

En représentant par X le premier membre de l'équation [1], $X = 0$ admet, en effet, par hypothèse, au moins une racine. Si nous désignons cette racine par la lettre a, qu'elle soit réelle ou imaginaire, X sera divisible* par $(x-a)$. Désignons le quotient par Q; il sera, dans tous les cas, du degré $(m-1)$, et son premier terme sera Ax^{m-1}. Nous aurons identiquement :

$$[2] \qquad X = (x-a)Q;$$

et les coefficients de Q seront ou réels, ou imaginaires de la forme donnée. Puisque, par hypothèse, toute équation a une racine, $Q = 0$ en admet une; si nous la désignons par b, on aura :

$$Q = (x-b)Q_1,$$

et, par suite,

$$[3] \qquad X = (x-a)(x-b)Q_1.$$

D'après le même postulatum, l'équation $Q_1 = 0$, qui est du degré $(m-2)$, et dont le premier terme est évidemment Ax^{m-2}, doit admettre une racine. Si nous la désignons par c, on aura :

$$Q_1 = (x-c)Q_2,$$

et, par suite,

$$[4] \qquad X = (x-a)(x-b)(x-c)Q_2,$$

le premier terme de Q_2 étant évidemment Ax^{m-3}.

En continuant de la même manière, et en opérant sur Q_2, comme on l'a fait sur Q et Q_1, chaque opération mettra en évidence un nouveau facteur du premier degré; et le degré des quotients successifs allant sans cesse en diminuant, on finira par en obtenir un qui sera numérique et évidemment égal à A. On aura donc :

$$[5] \qquad X = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)A.$$

---

* La démonstration de ce théorème, donnée (I, 75 et 76), s'applique, sans modification, au cas où a est imaginaire.

A l'inspection de cette égalité, on reconnaît que l'équation $X=0$ est satisfaite pour les valeurs $x=a$, $x=b$, $x=c$,..$x=l$, et qu'elle ne peut l'être autrement; car toute autre valeur attribuée à x, n'annulant aucun des facteurs du second membre, ne peut annuler le produit, comme on va le voir.

176. REMARQUE. *Un produit de plusieurs facteurs n'est nul, que quand l'un des facteurs est égal à zéro.* Cela n'est évident que quand les facteurs sont réels; mais il est facile d'étendre la proposition au cas même où ils sont imaginaires.

Soit le produit

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1});$$

on a :

$$[1] \quad (a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1}.$$

Pour que ce produit soit nul, il faut donc qu'on ait à la fois :

$$[2] \qquad \begin{cases} aa'-bb'=0, \\ ab'+ba'=0; \end{cases}$$

ou, en faisant la somme des carrés de ces deux égalités :

$$[3] \qquad (aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2=0.$$

Or, le premier membre de [3] est identiquement égal à $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$, et ne peut, par suite, s'annuler, que si l'on a $a=0$, $b=0$, ou bien $a'=0$, $b'=0$. Donc il faut que l'on ait :

$$(a+b\sqrt{-1})=0, \quad \text{ou} \quad (a'+b'\sqrt{-1})=0.$$

Et la condition est, d'ailleurs, évidemment suffisante.

177. AUTRE REMARQUE. La formule [5] (**175**) montre que le premier membre d'une équation est toujours décomposable en facteurs du premier degré. Elle permet aussi de former le premier membre d'une équation du degré m, lorsque l'on connaît ses m racines. Ce premier membre ne contient rien d'arbitraire que le coefficient A, par lequel on peut évidemment multiplier les deux membres d'une équation, sans altérer les conditions qu'elle impose à l'inconnue. Il résulte de là, que *deux équations,*

qui ont les mêmes racines, ne peuvent différer que par un facteur constant.

178. Polynomes identiques. Une équation, du degré m, ne pouvant avoir plus de m racines, il en résulte que *deux polynomes, du degré* m, *en* x, *ne peuvent être égaux pour plus de* m *valeurs de cette variable, sans être complétement identiques*. Si, en effet, on égale leur différence à zéro, on obtiendra une équation, du degré m, qui, si elle n'est pas identique, ne peut être satisfaite pour plus de m valeurs de la variable.

179. Racines égales. Dans la démonstration que nous avons donnée (**175**), rien ne suppose que les racines désignées par $a, b, c....k, l$, soient différentes. Le nombre des racines *distinctes* d'une équation, du degré m, n'est donc pas toujours effectivement égal à m. On énonce cependant tous les théorèmes, comme s'il en était ainsi; et, pour en acquérir le droit, on dit qu'une racine a est double, triple ou quadruple, lorsque le facteur $(x-a)$, qui lui correspond, figure deux, trois, quatre fois, dans le produit qui est égal au premier membre.

§ IV. Racines imaginaires conjuguées.

180. Théorème. *Si une équation à coefficients réels, admet une racine imaginaire* $a+b\sqrt{-1}$, *elle admet nécessairement, et un même nombre de fois, la racine conjuguée* $a-b\sqrt{-1}$.

Si l'équation $$X=0,$$

est satisfaite par l'hypothèse

$$x=a+b\sqrt{-1},$$

je dis que le premier membre X est divisible par $(x-a)^2+b^2$. Effectuons, en effet, la division; le reste, devant être de degré moindre que le diviseur, sera de la forme $mx+n$; et l'on aura:

$$[1] \qquad X=[(x-a)^2+b^2]Q+mx+n,$$

m et n étant des nombres réels, puisqu'il n'a pu s'introduire dans le calcul aucune expression imaginaire.

Si, dans les deux membres de l'identité [1], qui existe, quel

que soit x, nous faisons $x=a+b\sqrt{-1}$, le premier membre s'annule, pas hypothèse. Il en est, évidemment, de même de $(x-a)^2+b^2$; et, par suite, on doit avoir :

$$0=m(a+b\sqrt{-1})+n,$$

ce qui exige : $ma+n=0,\quad mb=0$;

et, par suite, puisque b n'est pas nul,

$$m=0,\quad n=0.$$

On en conclut : $X=[(x-a)^2+b^2]Q.$

Or $(x-a)^2+b^2$ s'annulant pour $x=a-b\sqrt{-1}$, cette égalité prouve, qu'il en est de même de X.

Si X est divisible par $(x-a-b\sqrt{-1})^2$, c'est-à-dire si la racine $a+b\sqrt{-1}$ est double, il faut que Q soit divisible par $(x-a-b\sqrt{-1})$; on prouvera alors, comme on l'a fait pour X, qu'il admet aussi le facteur $(x-a)^2+b^2$, et l'on aura :

$$X=[(x-a)^2+b^2]^2Q_1=[x-(a+b\sqrt{-1})]^2[x-(a-b\sqrt{-1})]^2Q_1;$$

en sorte que la racine $a-b\sqrt{-1}$ se trouvera aussi deux fois dans X.

Si X admet trois fois la racine $a+b\sqrt{-1}$, il doit être divisible par $(x-a-b\sqrt{-1})^3$; et, par suite, Q_1 doit admettre le facteur $(x-a-b\sqrt{-1})$. On prouvera alors, comme on l'a fait pour X et pour Q, qu'il est divisible par $(x-a)^2+b^2$, et que l'on a :

$$X=[(x-a)^2+b^2]^3Q_2=[x-(a+b\sqrt{-1})]^3[x-(a-b\sqrt{-1})]^3Q_2;$$

en sorte que la racine $a-b\sqrt{-1}$ est triple, comme sa conjuguée.

Le même raisonnement peut évidemment se continuer indéfiniment; et, par conséquent, la racine $a-b\sqrt{-1}$ a le même degré de multiplicité que sa conjuguée.

§ V. Relations entre les coefficients d'une équation et les racines.

181. Théorème. Soit

$$x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

une équation, du degré m, dont nous supposons, pour plus de simplicité, que le premier terme ait pour coefficient l'unité. Nous avons vu, qu'en désignant par a, b, $c \ldots k$, l, ses racines, on a identiquement :

$$[1] \qquad x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$
$$= (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l).$$

Mais on sait qu'en effectuant le produit indiqué dans le second membre, on aura (37) pour premier terme, x^m; pour second terme, x^{m-1} multiplié par la somme des seconds termes $-a$, $-b \ldots - l$; pour troisième terme, x^{m-2} multiplié par la somme des produits, deux à deux, de $-a$, $-b$, $-c \ldots - l$, ou, ce qui revient au même, par la somme des produits, deux à deux, de a, b, $c \ldots l$, et ainsi de suite, en sorte que, si l'on représente par Σa, Σab, Σabc la somme des racines, les sommes de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., on a :

$$[2] \qquad (x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)$$
$$= x^m - x^{m-1}\Sigma a + x^{m-2}\Sigma ab - x^{m-3}\Sigma abc + \ldots \pm abc\ldots kl,$$

le dernier terme étant précédé du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que m est pair ou impair. En identifiant ce produit avec le premier membre de l'équation [1], on conclut le théorème suivant :

Dans toute équation algébrique, dont le premier terme a pour coefficient l'unité,

$$x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

le coefficient du second terme A_1 est égal à la somme des racines, prise en signe contraire.

Le coefficient du troisième terme A_2 est égal à la somme des produits, deux à deux, des racines.

Le coefficient du quatrième terme A_3 est la somme de leurs produits trois à trois, pris en signe contraire; et ainsi de suite.

Enfin, *le dernier terme A_m est égal au produit de toutes les racines, pris avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que le degré de l'équation est pair ou impair.*

182. Remarque I. Ce théorème s'exprime par les équations suivantes :

$$[3]\quad \begin{cases} A_1 = -(a+b+c+\ldots+k+l), \\ A_2 = (ab+ac+\ldots+bc+\ldots+kl), \\ A_3 = -(abc+abd+\ldots+acd+\ldots+akl+\ldots), \\ \vdots \\ A_m = \pm abc\ldots kl. \end{cases}$$

En considérant les racines comme des inconnues, nous avons là m équations distinctes, auxquelles elles doivent satisfaire. Lorsque l'on connaîtra quelques-unes des racines, ces équations pourront faciliter la recherche des autres; mais elles ne peuvent pas servir, *en général*, à la résolution complète de l'équation proposée. Si, en effet, on cherchait, par le moyen de ces équations, à déterminer une racine, a par exemple, il faudrait, pour cela, éliminer toutes les autres; or, quel que soit le moyen que l'on emploie, je dis que l'équation obtenue devra avoir pour solution, non-seulement a, mais encore les autres racines b, $c\ldots$ k, l. Si l'on remarque, en effet, que les racines entrent absolument de la même manière dans les équations [3], que rien ne les y distingue les unes des autres, on conclura que, si l'on parvient, par certains calculs, à éliminer toutes les racines, à l'exception de a, des calculs tout semblables auraient pu éliminer toutes les racines autres que b, par exemple, sans qu'il y eût, dans le résultat, d'autre différence que le changement de a en b : c'est donc la même équation à laquelle a et b doivent satisfaire; et, comme on en peut dire autant des autres racines, il est évident que l'équation en a doit avoir pour racines a, b, $c\ldots$ k, l, et qu'elle ne doit, par conséquent (**177**), pas différer de l'équation proposée elle-même. Cette conclusion peut d'ailleurs se vérifier d'une manière bien simple.

Reprenons, en effet, les équations [3] :

$$[3]\quad \begin{cases} A_1 = -(a+b+c+\ldots+k+l), \\ A_2 = (ab+ac+\ldots), \\ A_3 = -(abc+abd+\ldots), \\ \vdots \\ A_m = \pm\, abc \ldots kl. \end{cases}$$

Multiplions la première par a^{m-1}, la seconde par a^{m-2}, la troisième par $a^{m-3}\ldots$, l'avant-dernière par a, la dernière par 1, et ajoutons-les; on reconnaîtra facilement, que l'on obtient ainsi l'équation :

$$A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots + A_{m-1}a + A_m = -a^m,$$

qui n'est autre chose que l'équation proposée, dans laquelle x est remplacé par a.

183. Remarque II. Il ne faut pas affirmer, en vertu de ce qui précède, que les équations [3] ne peuvent jamais conduire à la résolution d'une équation algébrique. Il est prouvé seulement, qu'en cherchant à atteindre ce but par l'élimination de $(m-1)$ des racines cherchées, on serait ramené à l'équation proposée elle-même; mais on peut concevoir d'autres manières de procéder. Cherchons, par exemple, à déterminer les deux racines a et b de l'équation du second degré,

$$x^2 + A_1x + A_2 = 0,$$

en faisant usage des relations :

$$a + b = -A_1, \quad ab = A_2.$$

Formons le carré de la première équation, et retranchons-en, membre à membre, la seconde équation, après avoir multiplié tous les termes par 4; il viendra :

$$(a+b)^2 - 4ab = A_1^2 - 4A_2,$$

ou

$$(a-b)^2 = A_1^2 - 4A_2;$$

d'où

$$a - b = \pm\sqrt{A_1^2 - 4A_2}.$$

Connaissant $(a+b)$ et $(a-b)$, on en conclut facilement a et b

§ VI. Théorème sur les racines d'une équation.

184. Nous terminerons ce chapitre, en précisant davantage les conséquences que l'on peut tirer (**170**) de la substitution de deux nombres différents dans le premier membre d'une équation.

Théorème. *Si deux nombres, α et β, substitués à* x *dans le premier membre d'une équation algébrique* $X = 0$, *donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent un nombre impair de racines.*

Il faut entendre que les racines multiples sont comptées un nombre de fois égal à leur degré de multiplicité.

Soient $a, b, \ldots p$, les racines comprises entre α et β, Q le quotient de la division de X par $(x-a)(x-b)\ldots(x-p)$; en sorte que l'on a identiquement :

$$X = (x-a)(x-b)\ldots(x-p)\,Q,$$

Q désignant le produit des facteurs qui correspondent aux racines imaginaires et aux racines réelles non comprises entre α et β. Si l'on fait successivement, dans cette égalité, $x=\alpha$, $x=\beta$, on aura :

$$X_\alpha = (\alpha-a)(\alpha-b)\ldots(\alpha-p)\,Q_\alpha,$$

$$X_\beta = (\beta-a)(\beta-b)\ldots(\beta-p)\,Q_\beta,$$

X_α, Q_α, X_β, Q_β désignant ce que deviennent les polynomes X, Q, lorsque l'on y substitue à x la valeur α ou la valeur β. Par hypothèse, X_α et X_β sont de signes contraires : il doit donc en être de même des seconds membres. Or Q_α et Q_β sont de même signe : car, sans cela, l'équation $Q = 0$ aurait une racine, au moins (**170**), comprise entre α et β. Il faut donc que les produits

$$\begin{cases} (\alpha-a)(\alpha-b)\ldots(\alpha-p), \\ (\beta-a)(\beta-b)\ldots(\beta-p), \end{cases}$$

soient de signes contraires; et, comme tous les facteurs du premier sont négatifs, et tous ceux du second positifs, il faut évi-

demment que le nombre de ces facteurs, et, par suite, le nombre des racines a, b,...p, soit impair.

On verrait absolument de la même manière que, *si deux nombres donnent des résultats de même signe, ils comprennent un nombre pair de racines* (ce nombre peut être zéro).

RÉSUMÉ.

165. Forme générale d'une fonction entière de x. — **166.** Toute fonction, entière et rationnelle, d'une variable x, varie d'une manière continue. — **167.** Il en est de même de toute fonction, dont la dérivée ne devient pas infinie. — **168.** On peut toujours donner à x une valeur assez grande pour que la fonction prenne le signe de son premier terme. — **169.** Signe d'une fonction, de degré pair, ou d'une fonction, de degré impair, lorsque la variable reçoit de grandes valeurs positives ou négatives. — **170.** Si deux nombres, a et b, substitués à x, donnent à $f(x)$ des valeurs de signes contraires, l'équation $f(x)=0$ admet, au moins, une racine comprise entre a et b. — **171.** Même théorème, pour toute équation dont le premier membre est une fonction continue de x. — **172.** Une équation, de degré impair, a toujours une racine réelle, de signe contraire à son dernier terme. — **173.** Une équation, de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines, l'une positive, l'autre négative. — **174.** On admet que toute équation a une racine réelle ou imaginaire. — **175.** Toute équation, de degré m, a précisément m racines; et son premier membre est le produit de m facteurs du premier degré. — **176.** Un produit de facteurs imaginaires ne peut être nul, que si l'un des facteurs est égal à zéro. — **177.** Deux équations, qui ont les mêmes racines, ne diffèrent que par un facteur constant. — **178.** Deux polynomes, de degré m, égaux pour $(m+1)$ valeurs de la variable, sont identiques. — **179.** Définition des racines égales. — **180.** Si $(a+b\sqrt{-1})$ est m fois racine d'une équation, à coefficients réels, il en sera de même de $(a-b\sqrt{-1})$. — **181.** Expression des coefficients d'une équation, en fonction des racines. — **182.** Les relations ne peuvent pas conduire, par élimination, à la résolution de l'équation. — **183.** Il ne faut pas affirmer que, par une autre voie, il soit impossible qu'elles fournissent l'expression des racines. — **184.** Si deux nombres, α et β, substitués dans $f(x)$, donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent un nombre impair de racines, s'ils donnent des résultats de même signe, ils en comprennent un nombre pair, ou n'en comprennent aucune.

EXERCICES.

I. Trouver le maximum du produit $x(p-x^2)$, lorsque x varie de 0 à p. En conclure les conditions, pour que l'équation

$$x(p-x^2)=q$$

admette deux racines positives.

On trouve la condition $\qquad 4p^3 > 27q^2.$

II. Chercher les conditions, pour que l'équation

$$x^m - px^n + q = 0$$

admette deux racines positives.

On trouve la condition

$$n^n(m-n)^{m-n}p^m > m^m q^{m-n}.$$

III. L'équation

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots+\frac{L}{x-l}=P,$$

admet m racines réelles, si a, b, ... l representent m nombres distincts.

On applique le théorème (**170**).

IV. Si l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} - \ldots\ldots = 0.$$

a toutes les racines réelles, on a, nécessairement :

$$A^2 - 2B > 0,$$

$$B^2 - 6AC + 2D > 0,$$

$$C^2 - 2BD + 2AE - 2F > 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On le démontrera, en posant $y=x^2$; et en remarquant, qu'après avoir rendu l'équation en y rationnelle, les coefficients de celle-ci doivent être alternativement positifs et négatifs.

V. Si α_1, α_2, ... α_n, sont n racines de l'équation

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0,$$

les $(m-n)$ autres racines satisfont à l'équation

$$x^{m-n}+(A_1+\Sigma\alpha_1)x^{m-n-1}+(A_2+A_1\Sigma\alpha_1+\Sigma\alpha_1\alpha_2)x^{m-n-2}$$

$$+(A_3+A_2\Sigma\alpha_1+A_1\Sigma\alpha_1\alpha_2+\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3)x^{m-n-3}+\ldots=0;$$

$\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1\alpha_2$, $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ désignant la somme des racines, les sommes de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., en comprenant, dans ces sommes, les produits où la même racine figure plusieurs fois.

On applique le théorème (**181**).

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE DESCARTES. — THÉORÈME DE ROLLE.

§ I. Théorème de Descartes.

185. Définition. Le but de ce paragraphe est la démonstration d'un théorème célèbre, qui permet d'assigner, à la seule inspection d'une équation algébrique, une limite supérieure du nombre des racines positives qu'elle peut avoir.

La démonstration de ce théorème repose sur un lemme, que nous établirons d'abord.

Lorsque deux termes consécutifs d'un polynome sont de signes contraires, on dit qu'ils présentent une *variation* de signe : lorsqu'ils ont le même signe, on dit qu'ils présentent une *permanence*.

186. Lemme. *Si l'on multiplie par* $(x - \alpha)$ *un polynome rationnel et entier, ordonné suivant les puissances décroissantes de* x, *les coefficients du produit, considérés à partir du premier, présentent au moins une variation de signe de plus que ceux du multiplicande.* On suppose, bien entendu, dans l'énoncé précédent que α désigne un nombre positif.

Soit $f(x)$ le multiplicande considéré. Supposons, pour fixer les idées, que son premier terme ait un coefficient positif; décomposons ce polynome en groupes de termes, dans chacun desquels tous les coefficients aient le même signe. Le premier groupe se composera du premier terme et de tous les termes positifs qui le suivent sans interruption; le second groupe commencera au premier terme négatif, et comprendra tous les termes négatifs compris entre celui-là et le premier des termes positifs qui viennent après; ce terme sera le premier du troisième groupe, et ainsi de suite : il est bien entendu que chaque groupe peut ne contenir qu'un seul terme. Écrivons le premier terme de chaque groupe :

$$[1] \qquad Ax^m + + \ldots - Px^p - - \ldots + Qx^q + \ldots$$
$$- Rx^h - - \ldots \pm Ux^u \pm \ldots \pm V,$$

les termes, que l'on n'écrit pas, étant tous de même signe que le premier terme écrit à leur gauche, et qui commence le groupe auquel ils appartiennent. Il est bon de remarquer, que tous les termes écrits servent de commencement à un groupe, à l'exception du terme $\pm V$, qui termine, au contraire, le groupe auquel il appartient.

Multiplions, actuellement, le polynome ainsi écrit par le multiplicateur $(x-\alpha)$; et attachons-nous seulement à former, dans le produit, les termes en x^{m+1}, x^{p+1}, x^{q+1}, x^{r+1}, ... x^{u+1}, et, en outre, le dernier terme $\pm V\alpha$.

On verra tout de suite :

Que le coefficient du terme en x^{m+1} est positif;

Que le coefficient du terme en x^{p+1} est négatif;

Que le coefficient du terme en x^{q+1} est positif;

⋮

Que le coefficient du terme x^{u+1} a le signe $\pm$, c'est-à-dire le même signe que celui du terme en x^u dans le multiplicande.

Le terme en x^{m+1}, dans le produit, provient, en effet, du produit de Ax^m par x.

Le terme en x^{p+1} provient du produit $-Px^{p+1}$ de $-Px^p$ par x, et du produit, par $-\alpha$, du terme qui précède immédiatement $-Px^p$; or, ce terme ayant, d'après nos conventions, un coefficient positif, son produit par $-\alpha$ aura un coefficient négatif, qui, ajouté à $-P$, coefficient de $-Px^{p+1}$, donnera nécessairement une somme négative. Le terme en x^{q+1} provient du produit $+Qx^{q+1}$ de $+Qx^q$ par x, et du produit, par $-\alpha$, du terme qui précède immédiatement Qx^q; or, ce terme ayant, d'après nos conventions, un coefficient négatif, son produit par $-\alpha$ aura un coefficient positif, qui, réuni à $+Q$, coefficient de $+Qx^{q+1}$, donnera nécessairement une somme positive.

La démonstration est la même pour les termes suivants.

Ajoutons que le dernier terme du produit, provenant, sans réduction, du produit de $\pm V$ par $-\alpha$, aura nécessairement le signe $\mp$, en sorte que le produit peut s'écrire :

[2] $Ax^{m+1} \ldots - P'x^{p+1} \ldots + Q'x^{q+1} \ldots - R'x^{r+1} \ldots \pm U'x^{u+1} \ldots \mp V\alpha;$

P', Q', R', U', ... désignant des nombres positifs, et les termes non écrits ayant un signe incertain.

Or, à l'inspection de ce produit [2], on voit qu'il a au moins une variation de plus que le multiplicande [1]. En effet : de Ax^{m+1} à $-P'x^{p+1}$, nous avons au moins une variation ; et il n'y en a qu'une dans la partie correspondante du multiplicande. De $-P'x^{p+1}$ à $+Q'x^{q+1}$, nous avons au moins une variation ; et il n'y en a qu'une dans la partie correspondante du multiplicande. Nous continuerons le même raisonnement jusqu'au terme $\pm U'x^{u+1}$; et nous verrons qu'il y a, jusqu'à ce terme, autant de variations de signe, au moins, dans le produit, qu'il y en a en tout dans le multiplicande. Mais, après le terme $\pm U'x^{u+1}$, le produit présente encore, au moins, une variation, puisque ce terme n'a pas le même signe que le dernier terme $\mp V\alpha$; et, par conséquent, il y a dans le produit, au moins, une variation de plus que dans le multiplicande. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

187. Remarque. Si le premier groupe du produit [2], de Ax^{m+1} à $-P'x^{p+1}$, offre plus d'une variation, il en présente un nombre impair, puisque ses termes extrêmes n'ont pas le même signe. Donc le nombre des variations *introduites*, par la multiplication, dans cette partie du produit, est pair. Il en est de même du nombre des variations introduites dans chaque groupe, jusqu'au dernier exclusivement. Mais ce dernier groupe, qui ne présentait aucune variation dans le multiplicande, en présente dans le produit un nombre impair. Donc, *le nombre total des variations introduites est impair.*

188. Limite supérieure du nombre des racines positives d'une équation. Supposons actuellement que l'on considère une équation algébrique

$$\varphi(x) = 0 ;$$

et soit $f(x)$ le produit des facteurs simples, qui répondent aux racines négatives ou imaginaires de cette équation ; de telle sorte qu'en nommant α, β, γ, ... les racines positives, on ait :

$$\varphi(x) = f(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots.$$

D'après le lemme précédent, le produit $f(x)(x-\alpha)$ admet au moins une variation de plus que $f(x)$: le produit $f(x)(x-\alpha)(x-\beta)$ en admet une, au moins, de plus que le précédent, et, par suite, deux de plus que $f(x)$: $f(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ en admet au moins trois de plus, et ainsi de suite ; et, par conséquent, lors même que $f(x)$ aurait tous ses termes de même signe, le produit $\varphi(x)$ a autant de variations, au moins, qu'il y a de racines α, β, γ,....

Si toutes les racines de $\varphi(x)=0$ étaient positives, on supposerait $f(x)=1$; et la conclusion n'en subsisterait pas moins.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Une équation algébrique,

$$\varphi(x)=0,$$

dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière de x, *ne peut pas avoir plus de racines positives qu'il n'y a de variations de signes dans les coefficients de* $\varphi(x)$.

C'est là le théorème connu sous le nom de *règle des signes* de Descartes.

189. Limite supérieure du nombre des racines négatives. Soit

$$[1] \qquad \varphi(x)=0,$$

une équation algébrique. Si $-\alpha$ désigne une racine négative de cette équation, on a :

$$\varphi(-\alpha)=0;$$

et, par suite, $x=+\alpha$ est racine de l'équation

$$[2] \qquad \varphi(-x)=0,$$

obtenue en changeant, dans la proposée, x en $-x$. Cette équation [2] admet donc, pour racines positives, les racines négatives de l'équation [1]; et, par suite, en lui appliquant le théorème de Descartes, on aura une limite supérieure du nombre de ces racines négatives. *Une équation ne peut donc avoir plus de racines négatives qu'il n'y a de variations dans le premier membre de sa transformée en* $-x$.

190. Remarque. Le théorème de Descartes fournit une limite supérieure du nombre des racines positives ou négatives, que peut avoir une équation. Mais il arrive souvent que cette limite n'est pas atteinte, et que le nombre des racines positives, par exemple, est moindre que le nombre des variations du premier membre.

On peut démontrer seulement que, *si ces deux nombres son différents, leur différence est toujours un nombre pair.*

En d'autres termes, *si une équation a un nombre pair de variations, elle a aussi un nombre pair de racines positives; et, si elle a un nombre impair de variations, elle a un nombre impair de racines positives.*

Remarquons, pour le prouver, qu'une équation, qui a un nombre pair de variations, a évidemment son dernier terme positif; par suite, en faisant $x=0$ et $x=\infty$, on aura des résultats de même signe; le nombre des racines positives est donc (**184**) pair. Si le nombre des variations est impair, le dernier terme est négatif; $x=0$, substitué dans le premier membre, donne donc un résultat négatif; $x=\infty$ donne toujours (**168**) un résultat positif; et, par suite (**184**), entre 0 et ∞, il y a un nombre impair de racines positives.

191. Limite inférieure du nombre des racines imaginaires. Il arrive souvent que l'application de la règle de Descartes rend certaine l'existence de racines imaginaires. Si, en effet, le nombre possible de racines positives, ajouté au nombre possible de racines négatives, forme une somme moindre que le degré de l'équation, il faut bien qu'il y ait des racines imaginaires.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^8+5x^3+2x-1=0;$$

son premier membre n'a qu'une variation; elle ne peut donc avoir qu'une seule racine positive.

Si on change x en $-x$, la transformée est:

$$x^8-5x^3-2x-1=0,$$

qui n'a aussi qu'une variation, et qui ne peut avoir, par suite, qu'une racine positive. La proposée ne peut donc avoir que deux racines réelles; et elle a, par conséquent, au moins, six racines imaginaires.

On peut remarquer que les deux racines, que la règle de Descartes indique comme possibles, existent certainement dans ce cas; l'excès du nombre des variations sur le nombre des racines positives étant, en effet, pair (**190**), il faut bien qu'il soit 0, dans le cas où il n'y a qu'une seule variation.

§ II. Théorème de Rolle.

192. THÉORÈME. *Deux racines réelles consécutives* a *et* b, *d'une équation* $\varphi(x) = 0$, *comprennent au moins une racine réelle de la dérivée* $\varphi'(x) = 0$.

En effet, si l'on fait varier x depuis a jusqu'à b, $\varphi(x)$ part de zéro pour revenir à zéro; cette fonction, qui est continue, va donc d'abord en augmentant, pour diminuer ensuite; ou bien, elle commence par diminuer, pour aller ensuite en augmentant. Dans les deux cas, la dérivée change de signe; et comme elle est continue, elle passe par zéro, pour une valeur de x comprise entre a et b. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Comme la fonction peut subir, entre a et b, plusieurs alternatives d'accroissement et de diminution, la dérivée peut s'annuler plusieurs fois dans l'intervalle. *Il peut donc y avoir plusieurs racines de la dérivée comprises entre deux racines consécutives de la proposée.*

Ce théorème est vrai pour toute équation dont le premier membre est une fonction continue de x, quand sa dérivée elle-même est continue.

193. COROLLAIRE. Il résulte de là que *deux racines consécutives de la dérivée peuvent ne comprendre aucune racine de la proposée, mais qu'elles n'en comprennent jamais plus d'une.* On voit, en effet, d'une part, que, si deux racines consécutives a, b de la proposée comprennent plusieurs racines a', b', ... de la dérivée, ces racines a', b' de la dérivée ne comprennent pas de racine de la proposée : et l'on voit, d'autre part, que si deux racines consécutives a', b' de la dérivée comprenaient plusieurs

racines a, b,... de la proposée, ces racines a, b de la proposée ne comprendraient pas de racines de la dérivée : ce qui n'est pas possible.

194. Nombre des racines réelles d'une équation. On conclut de ce qui précède, que, *si l'on sait trouver les racines de la dérivée, on pourra compter le nombre des racines réelles de la proposée.* Soient, en effet, a', b', c',... l', les racines réelles de la dérivée, rangées par ordre de grandeur : substituons successivement à x, dans le premier membre de la proposée, les nombres

$$-\infty,\ a',\ b',\ c',\dots\ l',\ +\infty.$$

Si deux substitutions consécutives donnent des résultats de signes contraires, il y a, dans l'intervalle correspondant, une racine au moins de la proposée (**170**) et une seule (**193**). Si les résultats sont de même signe, il n'existe dans l'intervalle aucune racine de la proposée; car il ne saurait s'en trouver plus d'une (**193**). Ainsi chaque changement de signe, dans les substitutions successives, prouvera l'existence d'une racine réelle de la proposée.

Si l'on désigne par n le nombre des racines réelles de la dérivée, $(n+1)$ sera le nombre des intervalles; et par suite $(n+1)$ sera la limite supérieure du nombre des racines réelles de la proposée.

On voit encore que, si une équation a toutes ses racines réelles, sa dérivée a aussi toutes ses racines réelles; car les m racines réelles de la proposée fournissent $(m-1)$ intervalles, dans chacun desquels doit se trouver, au moins, une racine de la dérivée (qui n'a que $m-1$ racines.) La réciproque n'est pas vraie.

195. Application a l'équation du troisième degré. Si l'on considère, en particulier, l'équation du troisième degré, sous la forme simple

$$x^3+px+q=0,$$

on remarque que, pour qu'elle ait ses trois racines réelles, il faut d'abord que sa dérivée, $3x^2+p=0$, ait ses deux racines réelles; car si celles-ci étaient imaginaires, la proposée ne pour-

rait avoir (194) plus d'une racine réelle. Il faut donc que p soit négatif; et alors les racines de la dérivée sont :

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Il faut, en outre, qu'en substituant successivement à x, dans le premier membre de la proposée,

$$-\infty, \quad -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad +\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad +\infty,$$

chaque substitution amène un changement de signe (194). Or, la substitution de $-\infty$ rend l'expression négative, et celle de $+\infty$ la rend positive; il faut donc, et cela suffit, que l'on obtienne le signe $+$ en substituant la plus petite racine de la dérivée, et le signe $-$ en substituant la plus grande. Or, le premier membre $x^3 + px + q$ peut se mettre sous la forme $x(x^2 + p) + q$. Les conditions nécessaires et suffisantes sont donc fournies par les inégalités :

$$\begin{cases} -\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3}+p\right)+q>0, \\ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3}+p\right)+q<0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0, \\ \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q<0. \end{cases}$$

Distinguons deux cas : 1° Si q est positif, comme p est négatif, la première inégalité est nécessairement vérifiée; quant à la seconde, on peut l'écrire :

$$q < -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}};$$

et, comme les deux membres sont positifs, on peut les élever au carré (I, 205); et l'on a :

$$q^2 < -\frac{4p^3}{27}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

2° Si q est négatif, la seconde inégalité est nécessairement vérifiée. Quant à la première, on peut l'écrire :

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -q,$$

ou, en élevant au carré les deux membres qui sont positifs,

$$-\frac{4p^3}{27} > q^2, \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0. \qquad [1]$$

Telle est donc [1] la condition nécessaire et suffisante, pour que l'équation du troisième degré ait ses trois racines réelles. (Cette condition, on le voit aisément, comprend la première $p<0$.)

RÉSUMÉ.

185. Définition des variations et des permanences. — **186.** Si l'on multiplie un polynome entier en x par $(x-\alpha)$, α étant positif, le produit a, au moins, une variation de plus que le multiplicande. — **187.** Le nombre des variations introduites est impair. — **188.** Le nombre des racines positives d'une équation ne peut surpasser le nombre des variations de son premier membre. — **189.** Limite supérieure du nombre des racines négatives. — **190.** L'excès du nombre des variations sur le nombre des racines positives est un nombre pair. — **191.** Limite inférieure du nombre des racines imaginaires. — **192.** Deux racines réelles consécutives d'une équation comprennent, au moins, une racine réelle de la dérivée. — **193.** Deux racines réelles consécutives de la dérivée peuvent ne comprendre aucune racine de la proposée; elles n'en comprennent jamais plus d'une. — **194.** Lorsqu'on sait trouver les racines de la dérivée, on peut compter les racines réelles de la proposée. Pour qu'une équation ait toutes ses racines réelles, il faut que sa dérivée ait toutes ses racines réelles; mais cela n'est pas suffisant. — **195.** Condition pour que l'équation du troisième degré ait ses trois racines réelles.

EXERCICES.

I. Lorsqu'une équation algébrique, de degré m, à coefficients réels, est complète, c'est-à-dire, lorsque son premier membre contient toutes les puissances de x, depuis la puissance m jusqu'à la puissance zéro, si toutes ses racines sont réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences.

II. Si une équation incomplète, de degré m, contient n termes, le nombre des racines réelles ne peut surpasser $(2n-2)$, si m est pair, et $(2n-3)$, si m est impair.

On applique les théorèmes (**188** et **189**), pour ces deux exercices.

III. Si, dans une équation incomplète, il manque un nombre pair de termes entre deux termes de même signe ou de signes contraires, l'équation a, au moins, autant de racines imaginaires qu'il y a de termes manquants.

IV. Si, dans une équation incomplète, il manque un nombre impair de termes entre deux termes de même signe, il y a, au moins, autant de racines imaginaires qu'il y a de termes manquants plus un. Et si les deux termes, qui comprennent la lacune, sont de signes contraires, il y a, au moins, autant de racines imaginaires qu'il y a de termes manquants, moins un.

V. Lorsqu'une équation incomplète a toutes ses racines réelles, il ne peut manquer de terme entre deux termes de même signe; et il n'en peut manquer plus d'un entre deux termes de signes contraires.

VI. Lorsqu'une équation incomplète a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations; et le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences, augmenté du nombre des lacunes.

On applique, pour les exercices III, IV, V, VI, les théorèmes (**188**), **189** et **191**).

VII. Deux racines consécutives d'une équation comprennent toujours un nombre impair de racines de la dérivée, pourvu que l'on compte pour deux chaque racine double que peut avoir la dérivée, pour trois chaque racine triple, etc.

On étudie les variations du premier membre de l'équation (**192**).

VIII. Si l'on a une équation

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

et que l'on multiplie respectivement ses termes par a, $a+b$, $a+2b$,.... $a+(m-1)b$, $a+mb$ (a et b étant des nombres positifs), on forme une équation nouvelle, qui a une racine comprise entre deux racines consécutives de la proposée, excepté entre la plus petite racine positive et la racine négative qui la précède.

On applique le théorème précédent (VII).

IX. Si dans une équation $f(x)=0$, on change x en $-x$, le nombre des variations, tant de la proposée que de la transformée, ne peut être supérieur au degré de l'équation; et, quand il lui est inférieur, la différence est un nombre pair.

On examine comment la suppression de certains termes, dans l'équation, influe sur le nombre des variations.

X. Si une équation, de degré m, présente v variations, elle a, au plus, $(m-v)$ racines négatives.

Corollaire du théorème IX.

XI. S'il arrive, qu'en multipliant le premier membre d'une équation par $(x-\alpha)$, on introduise $(2v+1)$ variations, l'équation proposée a, au moins, $2v$ racines imaginaires.

Application des théorèmes X et **191**.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

§ I. Facteurs communs à deux polynomes.

196. Définition du plus grand commun diviseur algébrique. Nous avons vu (**175**), qu'une fonction entière de la variable x peut toujours se décomposer en facteurs du premier degré, de la forme $(x-\alpha)$, α désignant un nombre réel ou une expression imaginaire indépendante de x. La décomposition ne peut se faire que d'une seule manière; et chaque polynome admet seulement un nombre de facteurs égal à son degré. En général, deux polynomes différents admettront des facteurs inégaux; et ce sera seulement dans des cas particuliers, qu'ils en auront un ou plusieurs de communs. Il est important, dans plusieurs recherches d'algèbre, de savoir décider, si deux polynomes donnés se trouvent précisément dans un de ces cas, et quel est alors le produit des facteurs communs, que l'on nomme *plus grand commun diviseur* des deux polynomes.

197. Recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes. Soient $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ les deux polynomes, ordonnés suivant les puissances décroissantes de x. Supposons $\varphi(x)$ de degré supérieur à $\varphi_1(x)$, et divisons le premier de ces polynomes par le second. Soient Q le quotient et $\varphi_2(x)$ le reste; on aura:

$$\varphi(x)=Q\varphi_1(x)+\varphi_2(x);$$

et cette égalité prouve, que le produit des facteurs communs à $\varphi(x)$ et à $\varphi_1(x)$ est le même que celui des facteurs communs à $\varphi_1(x)$ et à $\varphi_2(x)$.

Soit, en effet, $(x-\alpha)$ un facteur commun à $\varphi(x)$ et à $\varphi_1(x)$, qui figure p fois dans chacun de ces deux polynomes; $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant divisibles par $(x-\alpha)^p$, la somme $\varphi(x)$ et l'une des parties $Q\varphi_1(x)$ admettent évidemment ce diviseur; il en est, par suite, de même de l'autre partie de la somme, c'est-à-dire de $\varphi_2(x)$.

On verra de même, que, si $\varphi_2(x)$ et $\varphi_1(x)$ admettent p fois un facteur $(x-\alpha)$, il en sera de même de $\varphi(x)$.

Il est bien entendu que, dans ce qui précède, on peut avoir $p = 1$.

D'après cela, les facteurs communs à $\varphi(x)$ et à $\varphi_1(x)$ sont les mêmes que les facteurs communs à $\varphi_1(x)$ et à $\varphi_2(x)$; ils doivent être pris, dans les deux cas, avec les mêmes exposants; et, par suite, le plus grand commun diviseur de $\varphi(x)$ et de $\varphi_1(x)$ est le même que celui de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$.

On ramènera, de la même manière, la recherche du plus grand commun diviseur de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$ à celle du plus grand commun diviseur entre $\varphi_2(x)$ et le reste $\varphi_3(x)$ de la division de φ_1 par φ_2. On continuera ainsi à substituer aux polynomes proposés d'autres polynomes, dont le degré ira sans cesse en diminuant; et *lorsqu'on parviendra à une division qui se fera exactement, le diviseur de cette dernière opération sera le plus grand commun diviseur cherché.*

Si l'on parvient à un reste numérique, avant d'avoir rencontré une division qui réussisse, les polynomes proposés n'ont aucun facteur commun, et il n'y a pas de plus grand commun diviseur.

198. Remarque. En cherchant le produit des facteurs communs à deux polynomes, on ne se préoccupe aucunement des facteurs numériques. On peut donc multiplier l'un des polynomes donnés, ou l'un quelconque des restes obtenus dans l'opération par un facteur numérique quelconque. On profite souvent de cette remarque, pour éviter l'introduction des dénominateurs numériques. Il suffit, pour cela, de multiplier les dividendes successifs par le coefficient du premier terme du diviseur; et l'on doit prendre cette précaution, non-seulement pour les fonctions successives φ, φ_1, φ_2, φ_3,..., qui servent successivement de diviseurs, mais aussi pour les dividendes partiels, qui se présentent dans le cours de chaque division.

Supposons, par exemple, qu'en divisant $\varphi(x)$ par $\varphi_1(x)$, on ait trouvé au quotient un certain nombre de termes, dont nous représenterons l'ensemble par Q_1.

Soit $\psi(x)$ ce qui reste du dividende, lorsqu'on en a retranché le produit de Q_1 par le diviseur; on a:

$$\varphi(x) = Q_1\varphi_1(x) + \psi(x)$$

et l'on prouvera, comme au n° **197**, que les facteurs communs à $\varphi(x)$ et à $\varphi_1(x)$ sont les mêmes que les facteurs communs à $\psi(x)$ et à $\varphi_1(x)$, et, par suite aussi, que les facteurs communs à $k\psi(x)$ et à $\varphi_1(x)$, k étant une constante quelconque. Il est donc permis de continuer l'opération, après avoir multiplié le dividende partiel $\psi(x)$ par un facteur numérique k.

On peut aussi diviser l'un des polynomes ou l'un des restes, par un diviseur numérique qui serait commun.

199. Exemple I. Soit à chercher le produit des facteurs communs aux deux polynomes :

$$\begin{cases} x^7 - 3x^6 + x^5 - 4x^2 + 12x - 4, \\ 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1. \end{cases}$$

Voici le tableau des opérations :

$$\varphi(x) = x^7 - 3x^6 + x^5 - 4x^2 + 12x - 4,$$

$$\varphi_1(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

Première opération partielle.

$$\begin{array}{l|l}
\text{Prod}^{\text{t}}\text{ du div}^{\text{de}}\text{ par 2...}\quad 2x^7-6x^6+2x^5-8x^2+24x-8 & 2x^4-6x^3+3x^2-3x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; \underline{2x^7-6x^6+3x^5-3x^4+x^3} & \overline{x^3-x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x^5+3x^4-x^3-8x^2+24x-8 & \\
\text{Prod}^{\text{t}}\text{ du reste par 2...}\qquad -2x^5+6x^4-2x^3-16x^2+48x-16 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-2x^5+6x^4-3x^3+3x^2-x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^3-19x^2+49x-16 &
\end{array}$$

Deuxième opération partielle.

$$\begin{array}{l|l}
2x^4-6x^3+3x^2-3x+1 & x^3-19x^2+49x-16 \\
\underline{2x^4-38x^3+98x^2-32x} & \overline{2x+32} \\
\quad 32x^3-95x^2+29x+1 & \\
\quad \underline{32x^3-608x^2+1568x-512} & \\
\qquad 513x^2-1539x+513 & \\
\text{Quotient du reste par 513...}\quad x^2-3x+1 &
\end{array}$$

Troisième opération partielle.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-19x^2+49x-16 & x^2-3x+1 \\
\underline{x^3-3x^2+x} & \overline{x-16} \\
\quad -16x^2+48x-16 & \\
\quad -16x^2+48x-16 &
\end{array}$$

Ainsi donc, le produit des facteurs communs est $(x^2 - 3x + 1)$; et l'on a :

$$\varphi(x) = (x^2 - 3x + 1)\,(\,x^3 - 4),$$

$$\varphi_1(x) = (x^2 - 3x + 1)\,(2x^3 + 1).$$

On remarquera que, dans les opérations précédentes, le polynome $\varphi(x)$ et le premier reste de la première division ont été multipliés par 2, et que le reste de la seconde division a été divisé par 513. Cette introduction et cette suppression de facteurs numériques sont permises, comme on l'a remarqué plus haut, quoiqu'elles changent les quotients successivement obtenus. Ainsi, par exemple, en divisant $\varphi(x)$ par $\varphi_1(x)$, sans faire usage de ces simplifications, on trouverait pour quotient $\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}\right)$, au lieu de $(x^3 - x)$ que nous avons obtenu; mais, les quotients n'étant d'aucun usage, cela n'a pas d'inconvénients.

Exemple II. Considérons, pour second exemple, les deux polynomes :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(x) = x^6 - 49x^4 + 67x^3 + 10x^2 - 25x - 4, \\ \varphi_1(x) = 2x^5 - 18x^4 + 39x^3 - 25x^2 + x + 1. \end{array}\right.$$

Voici le tableau des opérations :

$$\begin{array}{r|l}
2x^6 \qquad - 98x^4 + 134x^3 + 20x^2 - 50x - 8 & \underline{2x^5 - 18x^4 + 39x^3 - 25x^2 + x + 1} \\
\underline{2x^6 - 18x^5 + 39x^4 - 25x^3 + x^2 + x} & x + 9 \\
18x^5 - 137x^4 + 159x^3 + 19x^2 - 51x - 8 & \\
\underline{18x^5 - 162x^4 + 351x^3 - 225x^2 + 9x + 9} & \\
25x^4 - 192x^3 + 244x^2 - 60x - 17 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
50x^5 - 450x^4 + 975x^3 - 625x^2 + 25x + 25 & \underline{25x^4 - 192x^3 + 244x^2 - 60x - 17} \\
\underline{50x^5 - 384x^4 + 488x^3 - 120x^2 - 34x} & 2x - 66 \\
\underline{-66x^4 + 487x^3 - 505x^2 + 59x + 25} & \\
-1650x^4 + 12175x^3 - 12625x^2 + 1475x + 625 & \\
\underline{-1650x^4 + 12672x^3 - 16104x^2 + 3960x + 1122} & \\
\underline{- 497x^3 + 3479x^2 - 2485x - 497} & \\
- x^3 + 7x^2 - 5x - 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
25x^4 - 192x^3 + 244x^2 - 60x - 17 & \underline{x^3 - 7x^2 + 5x + 1} \\
\underline{25x^4 - 175x^3 + 125x^2 - 25x} & 25x - 17 \\
- 17x^3 + 119x^2 - 85x - 17 & \\
- 17x^3 + 119x^2 - 85x - 17 & \\
\text{»} &
\end{array}$$

Le produit des facteurs communs est donc $(x^3 - 7x^2 + 5x + 1)$; et, en divisant par ce produit les deux polynomes $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$, on aura :

$$\varphi(x) = (x^3 - 7x^2 + 4x + 1)\ (x^3 + 7x^2 - 5x - 4),$$

$$\varphi_1(x) = (x^3 - 7x^2 + 5x + 1)\ (2x^2 - 4x + 1).$$

Nous remarquerons, comme plus haut, que diverses simplifications ont été apportées aux divisions précédentes. Dans la première on a multiplié le dividende par 2. Dans la seconde, le dividende a été multiplié par 25, ainsi que le premier dividende partiel; le reste a été divisé par 497.

Exemple III. Nous chercherons encore le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes :

$$\begin{cases} \varphi(x) = x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 48x - 16, \\ \varphi_1(x) = 6x^5 - 35x^4 + 60x^3 - 80x + 48. \end{cases}$$

Voici le tableau des opérations :

$$\begin{array}{r|l}
6x^6 - 42x^5 + 90x^4 - 240x^2 + 288x - 96 & 6x^5 - 35x^4 + 60x^3 - 80x + 48 \\ \cline{2-2}
6x^6 - 35x^5 + 60x^4 - 80x^2 + 48x & x - 7 \\ \cline{1-1}
-7x^5 + 30x^4 - 106x^2 + 240x - 96 & \\ \cline{1-1}
-42x^5 + 180x^4 - 760x^2 + 1440x - 576 & \\
-42x^5 + 245x^4 - 420x^3 + 560x - 336 & \\ \cline{1-1}
-65x^4 + 420x^3 - 960x^2 + 880x - 240 & \\ \cline{1-1}
-13x^3 + 84x^5 - 192x^2 + 176x - 48 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
78x^5 - 455x^4 + 780x^3 - 1040x + 624 & 13x^4 - 84x^3 + 192x^2 - 176x + 48 \\ \cline{2-2}
78x^5 - 504x^4 + 1152x^3 - 1056x^2 + 288x & 6x + 59 \\ \cline{1-1}
+49x^4 - 372x^3 + 1056x^2 - 1328x + 624 & \\ \cline{1-1}
637x^4 - 4836x^3 + 13728x^2 - 17264x + 8112 & \\
637x^5 - 4116x^3 + 9408x^2 - 8624x + 2352 & \\ \cline{1-1}
-720x^3 + 4320x^2 - 8640x + 5760 & \\ \cline{1-1}
-\ x^3 = 6x^2 - 12x + 8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
13x^4 - 84x^3 + 192x^2 - 176x + 48 & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ \cline{2-2}
13x^3 - 78x^3 + 156x^2 - 104x & 13x - 6 \\ \cline{1-1}
-6x^3 + 36x^2 - 72x + 48 & \\ \cline{1-1}
-6x^3 + 36x^3 - 72x + 48 & \\
» &
\end{array}$$

Donc le facteur commun est $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Dans ces divisions, on a introduit et supprimé, comme dans les précédentes, des facteurs numériques, que le lecteur, suffisamment averti, apercevra sans peine.

§ II. Racines communes à deux équations.

200. MOYEN D'OBTENIR LES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS. La théorie qui précède permet de ramener la recherche des racines communes à deux équations, à la résolution d'une équation qui ne contient plus qu'elles seules, et qui est, par conséquent, de degré moindre que les proposées. Il est clair, en effet, que *le produit des facteurs communs à deux polynomes, étant égalé à zéro, donnera précisément les racines qui les annulent l'un et l'autre.*

Soient, par exemple, les équations :

$$x^5 - 49x^4 + 67x^3 + 10x^2 - 25x - 4 = 0,$$

$$2x^5 - 18x^4 + 39x^4 - 25x^3 + x + 1 = 0;$$

on a vu (**199**, exemple II), que le produit des facteurs, communs à leurs premiers membres, est :

$$x^3 - 7x^2 + 5x + 1;$$

et, par suite, les racines communes s'obtiendront en résolvant l'équation du troisième degré

$$x^3 - 7x^2 + 5x + 1 = 0.$$

Cette équation a évidemment pour racine $x = 1$: son premier membre est donc divisible par $(x - 1)$. Le quotient, $x^2 - 6x - 1$, égalé à zéro, fournira les deux autres racines communes, $x = 3 \pm \sqrt{10}$.

§ III. Des racines égales.

201. BUT DE LA THÉORIE DES RACINES ÉGALES. Les procédés, employés pour la résolution des équations numériques, exigent que ces équations n'admettent pas de racines égales. Il est donc essentiel de résoudre les deux questions suivantes.

1° Une équation algébrique étant donnée, reconnaître si elle a des racines égales.

2° Une équation ayant des racines égales, ramener sa résolution à celle de plusieurs autres équations, de degré moindre, et dont les racines soient inégales.

202. MOYEN DE RECONNAÎTRE SI UNE ÉQUATION A DES RACINES ÉGALES. On dit qu'une équation, $\varphi(x)=0$, admet n fois la racine a, lorsque $\varphi(x)$ est divisible par $(x-a)^n$. Le théorème suivant exprime les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'il en soit ainsi.

THÉORÈME I. *Pour qu'un nombre* a *soit* n *fois racine d'une équation algébrique* $\varphi(x)=0$, *il est nécessaire et suffisant que, substitué à* x, *il annule la fonction* $\varphi(x)$ *et ses* $(n-1)$ *premières dérivées.*

On a, en effet, identiquement :

$$x=a+(x-a),$$

et, par suite, $$\varphi(x)=\varphi[a+(x-a)].$$

En développant $\varphi[a+(x-a)]$ par la formule générale donnée (**110**), on a :

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\frac{\varphi'(a)}{1}(x-a)+\frac{\varphi''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots+\frac{\varphi^n(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n$$

$$+\ldots+\frac{\varphi^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^m.$$

A la seule inspection de cette formule, on voit que la condition énoncée est suffisante. Si l'on a, en effet, $\varphi(a)=0, \varphi'(a)=0$, $\varphi^{n-1}(a)=0$, tous les termes qui restent dans le second membre contiennent $(x-a)^n$ en facteur; et $\varphi(x)$ est, par conséquent, divisible par $(x-a)^n$.

Je dis, de plus, que cette condition est nécessaire; supposons, en effet, que $\varphi(x)$ étant divisible par $(x-a)^n$, et $\varphi^p(x)$ étant la

première des dérivées de $\varphi(x)$ qui ne s'annule pas pour $x=a$, on ait $p<n$; l'équation précédente deviendra :

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^p(a)}{1.2...p}(x-a)^p+\frac{\varphi^{p+1}(a)}{1.2...(p+1)}(x-a)^{p+1}$$

$$+\ldots+\frac{\varphi^m(a)}{1.2...m}(x-a)^m.$$

Si l'on divise les deux membres par $(x-a)^p$, il viendra :

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\frac{\varphi^p(a)}{1.2...p}+\frac{\varphi^{p+1}(a)}{1.2...(p+1)}(x-a)+\ldots+\frac{\varphi^m(a)}{1.2...m}(x-a)^{m-p},$$

égalité impossible; car $\varphi(x)$ renfermant, par hypothèse, $(x-a)^n$ en facteur, et n étant plus grand que p, le premier membre s'annule pour $x=a$, et le second prend une valeur différente de zéro, savoir : $\frac{\varphi^p(a)}{1.2...p}$.

On peut déduire du théorème précédent les conditions suivantes.

203. Théorème II. *Pour qu'un nombre* a *soit* n *fois racine d'une équation algébrique* $\varphi(x)=0$, *il est nécessaire et suffisant que, substitué à* x, *il annule le polynome* $\varphi(x)$, *et qu'il soit, en outre,* $(n-1)$ *fois racine de l'équation dérivée* $\varphi'(x)=0$.

Il résulte, en effet, du théorème précédent, que les conditions nécessaires et suffisantes sont exprimées par les équations :

$$\varphi(a)=0,\quad \varphi'(a)=0...,\quad \varphi^{n-1}(a)=0,$$

dont les $(n-1)$ dernières expriment, que a est racine de l'équation $\varphi'(x)=0$ et de ses $(n-2)$ premières dérivées; et, par suite, en vertu du même théorème, que a est $(n-1)$ fois racine de l'équation $\varphi'(x)=0$.

204. Remarque. Il résulte du théorème précédent, que, si l'on décompose le premier membre d'une équation et sa dérivée en facteurs simples correspondants à leurs diverses racines, à chaque racine multiple a, entrant n fois dans l'équation, correspondront, dans la dérivée, $(n-1)$ facteurs égaux à $(x-a)$; en sorte que, si une équation $\varphi(x)=0$ admet n racines égales à a, p

racines égales à b, q racines égales à c, r racines égales à d, etc., on a :

$$\varphi(x) = (x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q(x-d)^r\ldots,$$

$$\varphi'(x) = (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}(x-d)^{r-1}\ldots;$$

et, par suite, $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ admettent les facteurs communs $(x-a)^{n-1}$, $(x-b)^{p-1}$, $(x-c)^{q-1}$, $(x-d)^{r-1}$. Je dis, de plus, qu'ils n'en admettent pas d'autres; car, s'ils admettaient un facteur commun $(x-k)$, k serait racine de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$, et, par suite (**202**), racine double de $\varphi(x)$.

Le plus grand commun diviseur, entre le premier membre d'une équation et sa dérivée, est donc le produit des facteurs simples correspondants aux racines multiples, l'exposant de chacun d'eux étant diminué d'une unité.

Et, pour décider si une équation a des racines égales, on cherche le plus grand commun diviseur entre son premier membre et sa dérivée. S'il n'existe pas de plus grand commun diviseur, c'est qu'il n'y a pas de racines égales.

205. Réduction d'une équation qui a des racines égales. Les théorèmes précédents permettent de ramener la résolution d'une équation, qui a des racines égales, à celle de plusieurs autres équations qui n'en ont pas. Considérons, en effet, une équation $\varphi(x) = 0$; et concevons son premier membre décomposé en facteurs correspondants à ses racines. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 les produits des facteurs de chaque degré de multiplicité, pris chacun une fois seulement, savoir : X_1 le produit des facteurs simples; X_2 le produit des facteurs qui correspondent à des racines doubles, pris chacun une fois seulement; et ainsi de suite. En sorte que l'on ait :

$$\varphi(x) = X_1X_2^2X_3^3X_4^4.$$

Le produit des facteurs, communs au polynome X et à sa dérivée, est, d'après les théorèmes précédents :

$$P = X_2X_3^2X_4^3.$$

Le produit P_1 des facteurs, communs à P et à sa dérivée, est de même :

$$P_1 = X_3 X_4^2.$$

Enfin, le produit P_2 des facteurs, communs à P_1 et à sa dérivée, est :

$$P_2 = X_4.$$

Si l'équation proposée n'admet pas de racines, dont le degré de multiplicité surpasse 4, P_2 n'aura plus de facteurs communs avec sa dérivée; sinon il faut continuer à opérer de la même manière, jusqu'à ce que l'on rencontre un résultat, qui n'ait pas de diviseur commun avec sa dérivée. Maintenant, en divisant chacune des égalités précédentes par la suivante, il vient :

$$\frac{\varphi(x)}{P} = Q = X_1 X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{P}{P_1} = Q_1 = X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{P_1}{P_2} = Q_2 = X_3 X_4,$$

$$P_2 = X_4;$$

et, en divisant chacune de celles-ci par la suivante :

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = X_2, \quad \frac{Q_2}{P_2} = X_3, \quad P_2 = X_4.$$

On pourra donc, par de simples divisions, trouver X_1, X_2, X_3, X_4; et, en résolvant les équations,

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

qui n'ont plus de racines multiples, on obtiendra séparément les racines simples, doubles, triples, quadruples.... de la proposée.

206. Exemple I. Appliquons la méthode précédente à l'équation

$$\varphi(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x + 45 = 0.$$

On a : $$\varphi'(x)=4x^3+12x^2+4x+12$$
$$=4.(x^3+3x^2+x+3).$$

Par des divisions successives, on obtient les équations suivantes :

$$4.\varphi(x)=(x+1).\varphi'(x)-8(x^2-4x-21)$$
$$\varphi'(x)=4(x+7).(x^2-4x-21)+200(x+3)$$
$$x^2-4x-21=(x+3).(x-7).$$

Par conséquent, le facteur commun à $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ est $(x+3)$. Donc -3 est une racine double; on trouve, en effet, par la division :

$$\varphi(x)=(x+3)^2.(x^2-2x+5).$$

Exemple II. Soit encore l'équation

$$\varphi(x)=x^5-10x^2+15x-6=0.$$

On a: $$\varphi'(x)=5(x^4-4x+3).$$

Les divisions consécutives donnent :

$$x^5-10x^2+15x-6=x(x^4-4x+3)-6(x^2-2x+1)$$
$$x^4-4x+3=(x^2-2x+1).(x^2+2x+3)$$
$$=(x-1)^2.(x^2+2x+3).$$

Le plus grand commun diviseur, entre $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$, est donc $(x-1)^2$; la seule racine multiple est donc, $x=1$, qui figure trois fois dans la proposée; et l'on a, en effet :

$$\varphi(x)=(x-1)^3.(x^2+3x+6).$$

Exemple III. Soit l'équation :

$$\varphi(x)=x^6-7x^5+15x^4-40x^2+48x-16=0;$$

la première dérivée est :

$$\varphi'(x)=6x^5-35x^4+60x^3-80x+48.$$

Nous avons déjà trouvé (**199**), que le produit des facteurs communs à ces deux fonctions est :

$$x^3-6x^2+12x-8,$$

ou

$$(x-2)^3.$$

Donc, l'équation proposée admet quatre racines égales à 2; on a, en effet :

$$\varphi(x)=(x-2)^4.(x^2+x-1).$$

Exemple IV. Soit enfin l'équation :

$$\varphi(x)=x^6-10x^5+47x^4-140x^3+271x^2-530x+225=0;$$

sa dérivée est :

$$\varphi'(x)=6x^5-50x^4+188x^3-420x^2+542x-330.$$

Les divisions successives donnent :

$$6.\varphi(x)=\varphi'x\left(x-\tfrac{5}{3}\right)+\tfrac{32}{3}\left(x^4-10x^3+36x^2-70x+75\right)$$

$$\varphi'(x)=2(3x+5)(x^4-10x^3+36x^2-70x+75)+72(x^3-5x^2+11x-15)$$

$$x^4-10x^3+36x^2-70x+75=(x^3-5x^2+11x-15)(x-5).$$

Le produit des facteurs, communs aux deux polynomes, sera donc :

$$x^3-5x^2+11x-15.$$

Si nous divisons ce produit par sa dérivée, après l'avoir multiplié par 3, nous trouvons :

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-15x^2+33x-45 & 3x^2-10x+11 \\ \cline{2-2} -5x^2+22x-45 & x-5 \end{array}$$

ou, en multipliant de nouveau par 3,

$$-15x^2+66x-135$$

$$16x-\ 80;$$

en supprimant le facteur 16, le dernier reste peut être remplacé par $(x-5)$; sans avoir besoin de continuer l'opération, après cette simplification, on voit que $(3x^2-10x+11)$ n'est pas divisible par $(x-5)$; car il ne s'annule pas pour $x=+5$. Le commun

diviseur $(x^3-5x^2+11x-15)$ entre $\varphi(x)$ et sa dérivée, n'a donc pas de facteurs multiples; et, par suite, $\varphi(x)$ a seulement trois racines doubles, dont les valeurs sont les racines de l'équation :

$$x^3-5x^2+11x-15=0.$$

RÉSUMÉ.

196. Définition du plus grand commun diviseur de deux polynomes. — 197. Moyen de l'obtenir, par un procédé analogue à celui que l'on suit pour deux nombres. — 198. Remarque importante sur l'introduction ou la suppression des facteurs numériques, dans le cours des divisions à effectuer. — 199. Quelques exemples. — 200. Recherche des racines communes à deux équations. — 201. But de la théorie des racines égales. — 202. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation admette n fois la racine a. — 203. Autre forme de cette condition. — 204. Produit des facteurs communs au premier membre d'une équation et à sa dérivée; règle pour décider, si une équation a des racines égales. — 205. Réduction d'une équation, qui a des racines multiples, à plusieurs autres qui n'en ont pas. — 206. Quelques exemples.

EXERCICES.

I. Décomposer en facteurs le polynome

$$f(x)=x^5-2x^4+3x^3-7x^2+8x-3.$$

On trouve $$f(x)=(x-1)^3(x^2+x+3).$$

II. Décomposer en facteurs le polynome

$$f(x)=x^6-6x^5+9x^4+8x^3-24x^2+16.$$

On trouve $$f(x)=(x+1)^2(x-2)^4.$$

III. Décomposer en facteurs le polynome

$$f(x)=x^6-24x^4+32x^3+144x^2-384x+256.$$

On trouve $$f(x)=(x+4)^2(x-2)^4.$$

IV. Décomposer en facteurs le polynome

$$f(x)=x^7+2x^6+3x^5-x^4-8x^3-13x^2-12x-4.$$

On trouve $$f(x)=(x^2+x+2)^2(x+1)(x^2-x-1)$$

V. **Décomposer** en facteurs le polynome

$$f(x) + x^7 - 12x^5 - 2x^4 + 39x^3 - 6x^2 + 44x + 24.$$

On trouve $$f(x) = (x-1)^3(x+2)^3(x-3).$$

VI. P et Q désignant deux polynomes en x, à coefficients réels ou imaginaires, qui n'ont aucun facteur commun, et P′, Q′, représentant leurs dérivées : si l'équation $P^2 + Q^2 = 0$ admet une racine double, cette racine, réelle ou imaginaire, appartiendra à l'équation $P'^2 + Q'^2 = 0$.

Exemple :

$$P = x^2 - 1, \quad Q = 2x, \quad P^2 + Q^2 = (x^2+1)^2, \quad P'^2 + Q'^2 = 4(x^2+1).$$

on s'appuie sur l'identité :

$$\left(P + Q\sqrt{-1}\right)\left(P - Q\sqrt{-1}\right) = P^2 + Q^2.$$

VII. Si a est n fois racine de l'équation $\varphi(x) = 0$, il sera $(n-1)$ fois racine de l'équation qu'on obtient, en multipliant les termes de la proposée, supposée complète, par les termes successifs d'une progression arithmétique.

On s'appuie sur le théorème (**203**).

CHAPITRE IV.

DES RACINES COMMENSURABLES.

§ I. Des limites des racines.

207. Définition. On appelle *limite supérieure* des racines positives d'une équation, tout nombre plus grand que la plus grande des racines positives; *limite inférieure*, tout nombre plus petit que la plus petite d'entre elles.

On nomme *limite inférieure* des racines négatives tout nombre plus petit que la plus petite des racines négatives; *limite supérieure*, tout nombre plus grand que la plus grande d'entre elles.

Lorsqu'on a à résoudre une équation numérique, il est utile de connaître les limites de ses racines. Voici quelques règles à cet égard.

208. Pemière règle. *Si, dans une équation, de degré* m,

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

la valeur absolue du plus grand coefficient négatif est N, *et si* n *est la différence entre le degré de l'équation et celui du premier terme négatif,* $1+\sqrt[n]{N}$ *est une limite supérieure des racines positives.*

En effet, si l'on substitue à x, un nombre l, tel que, pour cette valeur et pour toute valeur plus grande, le premier membre de l'équation reste constamment positif, l sera évidemment une limite supérieure des racines positives. Or, pour satisfaire à cette condition, il suffit évidemment de choisir l, de manière à vérifier l'inégalité

$$[1] \qquad x^m - N(x^{m-n} + x^{m-n-1} + \ldots + x + 1) > 0;$$

car nous avons supprimé, d'une part, tous les termes positifs qui pouvaient exister entre x^m et x^{m-n}; et nous avons, de l'autre,

remplacé, dans tous les termes suivants, chaque coefficient par $-$N. L'inégalité [1] équivaut à

$$x^m - N\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1} > 0,$$

ou à [2] $$x^m(x-1) - N(x^{m-n+1}-1) > 0,$$

parce qu'on peut toujours supposer $x > 1$. Or cette dernière inégalité sera vérifiée, si l'on satisfait à cette autre,

[3] $$x^m(x-1) - Nx^{m-n+1} > 0,$$

que l'on obtient en diminuant le premier membre. D'ailleurs, en divisant par x^{m-n+1} les deux membres de l'inégalité [3], celle-ci devient :

$$x^{n-1}(x-1) - N > 0;$$

et elle sera vérifiée, si l'on a :

$$(x-1)^{n-1}(x-1) - N > 0, \quad \text{ou} \quad (x-1)^n - N > 0.$$

Il suffira donc de choisir x, de manière à vérifier l'inégalité

[4] $$x > 1 + \sqrt[n]{N}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si le premier terme négatif est le terme en x^{m-1}, on a $n = 1$; et la limite devient, dans ce cas, $1 + N$.

209. Deuxième règle, donnée par Newton. *Tout nombre* l, *qui rend positifs le premier membre d'une équation* $f(x) = 0$ *et toutes ses dérivées, est une limite supérieure des racines positives.*

En effet, si l'on diminue de l chacune des racines de l'équation, en posant $y = x - l$, ou $x = l + y$, l'équation devient:

$$f(l+y) = f(l) + f'(l)y + f''(l)\frac{y^2}{1.2} + \dots + f^{(m)}(l)\frac{y^m}{1.2\dots m} = 0.$$

Or, par hypothèse, tous les coefficients $f(l), f'(l), f''(l) \dots f^m(l)$ sont positifs; aucun nombre positif, substitué à y, ne peut donc vérifier cette équation, qui n'a, par conséquent, pas de racines positives. En d'autres termes, toutes les racines réelles sont

négatives ; ; et, par suite, toute valeur réelle de x est plus petite que l. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Pour appliquer cette règle, on range les fonctions dans l'ordre suivant :

$$f^m(x),\ f^{m-1}(x),\ f^{m-2}(x),\dots\ f'(x),\ f(x);$$

comme $f^m(x)$ est égal à $1.2.3\dots m$, et est, par suite, toujours positif, on choisit d'abord le plus petit nombre entier qui rend positif $f^{m-1}(x)$. On substitue ce nombre dans $f^{m-2}(x)$; et, s'il le rend négatif, on l'augmente d'une ou de plusieurs unités, jusqu'à ce que $f^{m-2}(x)$ devienne positif. Puis on substitue le nouveau nombre dans $f^{m-3}(x)$; et l'on fait en sorte, en l'augmentant si cela est nécessaire, que $f^{m-3}(x)$ prenne à son tour une valeur positive. On continue ainsi pour toutes les fonctions jusqu'à $f(x)$. Le nombre l qui, après toutes ces substitutions, rend $f(x)$ positive, est le nombre cherché.

Supposons, en effet, qu'un nombre a, obtenu par cette méthode, rende positifs $f^{m-1}(x)$, $f^{m-2}(x)$,... $f^{m-n}(x)$, il est facile de voir que le même nombre, augmenté d'un nombre quelconque h d'unités, ne cessera pas de rendre positives les mêmes fonctions. Il suffit, pour le prouver, de remarquer que l'on a, en général :

$$f^p(a+h) = f^p(a) + f^{p+1}(a)h + f^{p+2}(a)\frac{h^2}{1.2} + f^{p+3}(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots;$$

et, si $f^p(a)$, $f^{p+1}(a)$, $f^{p+2}(a)\dots$, sont positifs, comme h est aussi positif, il en résulte que $f^p(a+h)$ est nécessairement positif. En faisant $p = m-1$, on reconnaîtra d'abord que, $f^{m-1}(a)$ étant positif, il en sera de même de $f^{m-1}(a+h)$. Puis, en faisant $p = m-2$, on verra que $f^{m-2}(a)$ et $f^{m-1}(a)$ étant positifs, il en sera de même de $f^{m-2}(a+h)$, et ainsi de suite.

210. Troisième méthode. On peut enfin, en partageant le premier membre de l'équation en groupes de plusieurs termes, déterminer une limite supérieure des racines. Soit, par exemple, l'équation :

$$x^5 + 7x^4 - 12x^3 - 49x^2 + 52x - 13 = 0.$$

Groupons les termes de la manière suivante :

$$x^3(x^2 - 12) + 7x^2(x^2 - 7) + 52\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Il est évident que le nombre 4, substitué à x, rendant positif chacun des groupes, est une limite supérieure des racines.

De même, les termes de l'équation

$$x^4 - 5x^3 + 37x^2 - 3x + 39 = 0$$

peuvent se grouper ainsi :

$$x^2(x^2 - 5x + 7) + 30x\left(x - \frac{1}{10}\right) + 39 = 0.$$

Or le trinome $x^2 - 5x + 7$, ayant ses racines imaginaires, est positif, quel que soit x; d'ailleurs le second groupe est positif pour $x = 1$; donc 1 est une limite supérieure des racines.

On voit que l'artifice consiste à disposer les termes, de manière que chaque groupe commence par un terme positif, et à chercher le plus petit entier qui donne le signe + à chacun de ces groupes.

211. Remarque. La première méthode aurait donné $1 + \sqrt{49}$ ou 8 pour limite des racines de la première équation, et $1 + 5$ ou 6 pour limite des racines de la seconde.

Pour appliquer à la première la méthode de Newton, on a :

$$f(x) = x^5 + 7x^4 - 12x^3 - 49x^2 + 52x - 13$$

$$f'(x) = 5x^4 + 28x^3 - 36x^2 - 98x + 52$$

$$\frac{1}{1.2} f''(x) = 10x^3 + 42x^2 - 36x - 49$$

$$\frac{1}{1.2.3} f'''(x) = 10x^2 + 28x - 12$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} f''''(x) = 5x + 7$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} f^{v}(x) = 1.$$

On voit que tout nombre positif rend $f'''(x)$ positif; que 1 rend positif $f''(x)$, que 2 rend positifs $f''(x)$ et $f'(x)$, et qu'enfin 3, qui rend positif $f(x)$, est une limite supérieure.

Pour appliquer la même méthode à la seconde, on a :

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 37x^2 - 3x + 39$$

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 74x - 3$$

$$\frac{1}{1.2} f''(x) = 6x^2 - 15x + 37$$

$$\frac{1}{1.2.3} f'''(x) = 4x - 5$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} f''''(x) = 1.$$

On voit que 2 rend positifs $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$, et $f(x)$. Donc 2 est une limite supérieure.

212. Limite inférieure des racines positives. On pose $x = \frac{1}{y}$ dans l'équation, et l'on cherche une limite supérieure l des racines de la transformée : il est évident que $\frac{1}{l}$ sera une limite inférieure des racines positives de la proposée. Car si l'on a $y < l$, on en conclut $x > \frac{1}{l}$.

213. Limites des racines négatives. On pose $x = -y$, et l'on cherche les limites supérieure et inférieure, l et l', des racines positives de la transformée : $-l$ et $-l'$ seront les limites inférieure et supérieure des racines négatives de la proposée. Car, si l'on a :

$$l > y > l',$$

on en conclut :

$$-l < x < -l'.$$

§ II. Recherche des racines commensurables.

214. On peut obtenir, par des essais réguliers et fort simples,

les racines commensurables d'une équation à coefficients commensurables.

Nous commencerons par montrer, que cette recherche se ramène à celle des racines entières ; et, pour cela, nous établirons le théorème suivant :

THÉORÈME. *Une équation de la forme*

$$[1] \qquad x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m = 0,$$

dont le premier terme a pour coefficient l'unité, et dont les autres coefficients sont entiers, ne peut avoir de racine commensurable fractionnaire.

Si, en effet, $\frac{a}{b}$ est racine de l'équation [1], on a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m + A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} + A_2\left(\frac{a}{b}\right)^{m-2} + \dots + A_m = 0;$$

d'où l'on déduit, en multipliant tous les termes par b^{m-1}, et en faisant passer tous ceux qui suivent le premier dans le second membre :

$$\frac{a^m}{b} = -(A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2}b + \dots + A_mb^{m-1}).$$

Si l'on suppose, ce qui évidemment est permis, que la fraction $\frac{a}{b}$ ait été réduite à sa plus simple expression, a et b sont premiers entre eux ; la fraction $\frac{a^m}{b}$ est, par conséquent, irréductible, et ne peut être égale à un nombre entier. Il est donc impossible qu'elle soit égale au second membre, dont tous les termes sont entiers ; et, par conséquent, il est impossible que l'équation [1] admette une racine de la forme $\frac{a}{b}$. Les seules racines commensurables, qu'elle puisse avoir, sont donc entières.

215. COROLLAIRE. Une équation, à coefficients entiers, étant donnée, le théorème précédent permet de la transformer, de manière que toutes les racines commensurables deviennent entières.

Soit, en effet, l'équation

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

dans laquelle on peut supposer que A, A_1,... A_m soient des nombres entiers; car il est toujours facile de chasser les dénominateurs, en multipliant tous les termes par leur plus petit multiple commun. Posons $x = \frac{y}{A}$, y étant une nouvelle inconnue qui, évidemment, devra satisfaire à l'équation :

$$A\left(\frac{y}{A}\right)^m + A_1\left(\frac{y}{A}\right)^{m-1} + \ldots + A_m = 0;$$

ou, en multipliant les deux membres par A^{m-1},

$$y^m + A_1y^{m-1} + A_2Ay^{m-2} + \ldots + A_mA^{m-1} = 0.$$

Or cette équation a ses coefficients entiers, et le premier terme y^m a pour coefficient l'unité; les valeurs commensurables de y sont donc toutes entières. Il est évident, d'ailleurs, qu'elles correspondent aux valeurs commensurables de x; car la relation $x = \frac{y}{A}$, prouve que, x étant commensurable, il en est de même de y.

Si nous pouvons obtenir les racines entières de l'équation en y, d'après ce qui précède, nous aurons toutes les racines commensurables de l'équation en x.

216. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR QU'UN NOMBRE ENTIER SOIT RACINE D'UNE ÉQUATION A COEFFICIENTS ENTIERS. Nous avons vu comment la recherche des racines commensurables peut se ramener à celle des racines entières. Il nous reste donc à montrer, comment on peut obtenir les racines entières d'une équation à coefficients entiers.

Soit l'équation

$$[1] \qquad Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

et α une de ses racines entières; le premier membre doit être

divisible par $(x-\alpha)$. Représentons le quotient, qui est un polynome du degré $(m-1)$, par

$$Ax^{m-1}+P_1x^{m-2}+P_2x^{m-3}+\ldots+P_{m-2}x+P_{m-1}.$$

$P_1, P_2 \ldots P_{m-1}$ sont évidemment des nombres entiers; car le premier terme du diviseur $(x-\alpha)$ ayant pour coefficient l'unité, la division ne peut introduire aucun dénominateur.

En écrivant que le dividende est le produit du diviseur par le quotient, on aura identiquement :

$$[2] \qquad (x-\alpha)(Ax^{m-1}+P_1x^{m-2}+\ldots+P_{m-2}x+P_{m-1})$$
$$=Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m.$$

En effectuant les opérations indiquées dans le premier membre, et en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, il vient :

$$[3] \qquad \begin{cases} -P_{m-1}\alpha=A_m, \\ P_{m-1}-P_{m-2}\alpha=A_{m-1} \\ P_{m-2}-P_{m-3}\alpha=A_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_2-P_1\alpha=A_2, \\ P_1-A\alpha=A_1. \end{cases}$$

Tous les nombres, qui figurent dans ces formules, étant entiers, la première équation prouve que α doit être un des diviseurs de A_m, et que le quotient $\frac{A_m}{\alpha}$ est égal à $-P_{m-1}$.

La seconde équation peut s'écrire :

$$-P_{m-2}\alpha=A_{m-1}-P_{m-1}=A_{m-1}+\frac{A_m}{\alpha};$$

elle prouve que α doit être un diviseur de la somme $A_{m-1}+\frac{A_m}{\alpha}$, et que le quotient $\dfrac{A_{m-1}+\frac{A_m}{\alpha}}{\alpha}$ est $-P_{m-2}$.

La troisième équation peut s'écrire :

$$-P_{m-3}\alpha=A_{m-2}-P_{m-2}=A_{m-2}+\frac{A_{m-1}+\frac{A_m}{\alpha}}{\alpha}.$$

Elle prouve que α doit être un diviseur de la somme $A_{m-1} + \frac{A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}}{\alpha}$, c'est-à-dire de la somme obtenue en ajoutant A_{m-2} au quotient précédent, et que le quotient est $-P_{m-3}$.

On peut continuer ainsi jusqu'à la dernière équation, qui prouvera que le dernier quotient $-P_1$, augmenté de A_1, doit être divisible par α, et donner pour quotient $-A$.

Ces conditions sont nécessaires. J'ajoute qu'elles sont suffisantes, pour que α soit racine; car, si elles sont remplies, on pourra trouver des nombres $P_{m-1}, P_{m-2} \ldots P_1$, qui rendent identiques les équations [3]; et, par suite, le premier membre de la proposée sera divisible par $(x - \alpha)$.

On peut remarquer que les opérations, à l'aide desquelles on s'assure qu'un nombre α est racine, font connaître les coefficients du quotient de la division du premier membre par $(x - \alpha)$. Ces coefficients $P_{m-1}, P_{m-2}, \ldots$ sont égaux, en effet, aux quotients, changés de signes, des différentes divisions, dont la réussite est nécessaire pour que le nombre α ne soit pas rejeté.

217. Recherche des racines entières. Il résulte de là que, pour trouver les racines entières d'une équation telle que [1], on devra chercher d'abord les diviseurs entiers, positifs ou négatifs, du dernier terme : eux seuls peuvent être racines. On déterminera ensuite la limite supérieure des racines positives et la limite inférieure des racines négatives; et l'on rejettera tous les diviseurs qui ne seront pas compris entre ces limites. Si α est un des diviseurs qui restent, pour l'essayer, on divisera le dernier terme A_m par α, et l'on ajoutera au quotient le coefficient A_{m-1} : la somme devra être divisible par α. On formera le quotient; on y ajoutera A_{m-2} : la somme devra encore être divisible par α; et en continuant ainsi, on devra trouver un quotient qui, ajouté au coefficient du second terme, et divisé par α, donne pour dernier quotient $-A$.

218. Moyen de diminuer le nombre des essais. On peut diminuer le nombre des essais à faire par la remarque suivante. Si α est une racine de l'équation

$$[1] \qquad Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots A_m = 0,$$

le premier membre de cette équation est divisible par $(x-\alpha)$; et les coefficients du quotient sont tous entiers, ainsi qu'on l'a exposé plus haut. Si donc on attribue à x une valeur entière quelconque, la valeur numérique du premier membre de [1] sera divisible par la valeur numérique de $(x-\alpha)$. Or les valeurs les plus simples, que l'on puisse attribuer à x, sont 1 et -1. Si donc on nomme Q et Q_1 les valeurs correspondantes du premier membre de [1], on ne devra essayer α, que si, d'une part, Q est divisible par $(1-\alpha)$, ou, en changeant le signe, par $(\alpha-1)$; et que si, d'autre part, Q_1 est divisible par $(-1-\alpha)$, ou, en changeant le signe, par $(1+\alpha)$.

219. APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE. Voici la manière la plus avantageuse de disposer les calculs :

$$\begin{array}{l|l}
A_1,\ A_2,\ldots\ A_{m-2},\ A_{m-1},\ A_m & \\
\hline
A,\ P_1,\ldots\ P_{m-3},\ P_{m-2},\ P_{m-1} & \alpha.
\end{array}$$

J'écris, sur une ligne horizontale, les coefficients de l'équation proposée, à partir du second, et dans une colonne, à droite, le diviseur à essayer α. Sur la même ligne que α, et en allant de droite à gauche, j'écris au-dessous de A_m, $A_{m-1}\ldots$, les quotients, *changés de signes*, P_{m-1}, $P_{m-2}\ldots$, calculés comme il a été dit (**216**). Si tous ces quotients sont entiers, et si, en outre, le nombre écrit sous A_1, est $+A$, α est racine; et A, P_1, $P_2\ldots$, P_{m-1} sont les coefficients de l'équation débarrassée de la racine α. Il n'y aura donc plus alors qu'à opérer sur cette seconde ligne comme sur la première. Si quelques-unes des divisions ne peuvent se faire, on passera à un autre diviseur.

EXEMPLE. $f(x)=x^4-2x^3-19x^2+68x-60=0$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
-2, & -19, & +68, & -60 & \\
\hline
1, & 0, & -19, & +30 & 2 \text{ est racine} \\
\hline
 & 1, & 2, & -15 & 2 \text{ est racine} \\
\hline
 & & 1, & +5 & 3 \text{ est racine} \\
\hline
 & & & +1 & -5 \text{ est racine}
\end{array}$$

60 admet 24 diviseurs; mais on trouve, par la règle de Newton, que toutes les racines sont comprises entre 4 et -6. On ne doit donc essayer que les diviseurs de 60, plus petits que 4 et plus grands que -6. On commence par essayer $+1$ et -1, en les

substituant directement à la place de x : aucun d'eux n'est racine ; mais ce premier calcul nous apprend que $f(1) = -12$, et que $f(-1) = -144$. Dès lors on ne doit, parmi les diviseurs positifs, essayer que ceux qui, diminués de 1, divisent 12, et qui, augmentés de 1, divisent 144 ; et, parmi les diviseurs négatifs, on ne doit essayer que ceux dont la valeur absolue, augmentée de 1, divise 12, et, diminuée de 1, divise 144.

Le diviseur 2 satisfaisant à ces conditions, on l'essaye : on trouve que 2 est racine, et que l'équation, débarrassée de cette racine, est :

$$x^3 - 19x + 30 = 0.$$

Comme 2 divise 30, on l'essaye de nouveau ; et l'on continue de la même manière, en n'opérant que sur les diviseurs *qui* satisfont aux conditions précédentes, et qui, en outre, divisent le terme tout connu de la dernière équation simplifiée.

Tout calcul fait, on trouve que l'équation proposée a pour racines 2, 2, 3, —5, et que son premier membre est égal à

$$(x-2)^2 (x-3)(x+5).$$

RÉSUMÉ.

207. Ce qu'on nomme limite supérieure ou inférieure des racines positives ou négatives d'une équation. — **208, 209, 210.** Diverses règles pour trouver une limite supérieure des racines. — **211.** Applications. — **212.** Limite inférieure des racines positives. — **213.** Limites des racines négatives. — **214.** Si le premier terme d'une équation a pour coefficient l'unité, et que les autres coefficients soient entiers, les racines commensurables sont toutes entières. — **215.** Le théorème précédent permet de transformer une équation, à coefficients rationnels, en une autre dont les racines soient entières. — **216.** Conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'un nombre entier soit racine d'une équation à coefficients entiers. — **217.** Recherche des racines entières. — **218.** Théorème qui permet de diminuer le nombre des essais. — **219.** Application de la méthode à un exemple.

EXERCICES.

I. Rechercher les racines commensurables des équations :

$$x^7 - 5x^6 - 78x^5 + 499x^4 + 172x^3 - 4269x^2 + 1156x + 11320 = 0,$$

$$x^4 - x^3 - 13x^2 + 16x - 48 = 0,$$

$$15x^5 - 19x^4 + 6x^3 + 15x^2 - 19x + 6 = 0,$$

$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0.$$

II. Chercher les racines commensurables d'une équation, sans les ramene préalablement à être entières. Montrer, qu'en désignant par $\frac{a}{b}$ une telle racine réduite à sa plus simple expréssion, a doit être diviseur du dernier terme, et b diviseur du coefficient du premier terme. Chercher par quels essais, analogues à ceux qui ont été indiqués pour les racines entières, on peut vérifier que $\frac{a}{b}$ est racine.

III. Chercher si l'équation

$$x^3 - (a + b + ab)x^2 + ab(a + b + 1)x - ab^2 - a^2b = 0$$

admet des racines exprimées rationnellement en a et b.

IV. Si une équation du troisième degré n'admet pas de racines commensurables, elle n'admet pas de racines multiples.

V. Le théorème précédent s'applique à une équation du cinquième degré, et ne s'applique pas à une équation du quatrième.

CHAPITRE V.

THÉORÈME DE STURM.

220. Le théorème à la démonstration duquel est consacré ce chapitre donne le moyen d'obtenir exactement, et sans aucun tâtonnement, le nombre des racines réelles d'une équation comprises entre deux limites données quelconques.

Soit

$$(1)\qquad Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \quad + A_{m-1}x + A_m = 0.$$

Une équation numérique de degré quelconque n'ayant pas de racines multiples, on commencera par exécuter le calcul qui sert à trouver si elle a des racines égales, en opérant de la manière que nous allons indiquer. En désignant par V le premier membre de l'équation (1) et par V′ sa dérivée, on divisera V par V′, et quand on aura obtenu un reste de degré inférieur à V′, on changera les signes de tous les termes. Soit V_2 le reste ainsi changé de signe : on divisera V′ par V_2, et en changeant le signe de reste on obtiendra un polynome V_3 de degré moindre que V_2; la division de V_2 par V_3 donnera de même un reste qui, changé de signe, sera désigné par V_4, et l'on continuera cette opération autant de fois qu'elle sera possible, en obtenant une série de polynomes de degrés décroissants, liés les uns aux autres, d'après la définition de la division, par des relations de la forme

$$(2)\qquad \begin{array}{l} V = V'Q_1 - V_2, \\ V' = V_2\,Q_2 - V_3, \\ V_2 = V_3\,Q_3 - V_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ V_{r-1} = V_{r-2}\;Q_{r-2} - V_r. \end{array}$$

Le dernier reste V_r sera numérique; car, d'une part, aucun des polynomes $V', V_2, V_3\ldots$ ne peut évidemment diviser le précédent sans diviser tous ceux qui le précèdent, et par suite V et V′, qui

par hypothèse n'ont pas de facteur commun; et, d'autre part, si V_r n'est pas numérique, on peut diviser V_{r-1} par V_r et obtenir un reste de plus, V_{r+1}.

Cela posé, la considération des fonctions V, V', $V_2 \dots V_r$ fournit le moyen de savoir combien l'équation $V = 0$ admet de racines réelles comprises entre deux nombres α et β; β étant plus grand que α, voici la règle qui fait connaître le nombre de racines :

On substituera à la place de x *le nombre* α *dans les fonctions* V, V', $V_2 \dots V_{r-1}$, V_r, *puis on écrira par ordre, sur une même ligne, les signes des résultats, et l'on comptera le nombre de variations qui se trouvent dans cette suite de signes. On écrira de même la suite des signes que prennent ces mêmes fonctions quand on y remplace* x *par le nombre* β, *et l'on comptera le nombre des variations de cette seconde suite. Autant elle aura de variations de moins que la première, autant l'équation* $V = 0$ *aura de racines réelles comprises entre* α *et* β. *Si la seconde suite a autant de variations que la première, l'équation* $V = 0$ *n'admet aucune racine comprise entre* α *et* β; *la seconde suite ne pourra, dans aucun cas, admettre plus de variations que la première.*

221. Pour démontrer ce théorème, il faut examiner comment le nombre des variations formées par les signes des fonctions V, V', $V_2, \dots V_r$, pour une valeur quelconque de x, peut s'altérer lorsque x passe d'une manière continue de la valeur α à la valeur plus grande β.

Quels que soient les signes de ces fonctions pour une valeur de x déterminée, lorsque x croît par degrés insensibles au delà de cette valeur, il ne peut arriver de changement dans cette suite de signes qu'autant que l'une des fonctions V, $V' \dots V_r$ change de signe, et par conséquent devient nulle. Il y a deux cas à examiner, selon que la fonction qui s'évanouit est la première V, ou l'une des autres fonctions V', $V_2, \dots V_{r-1}$ intermédiaires entre V et V_r. La dernière V_r ne peut changer de signe, puisque c'est un nombre positif ou négatif.

Voyons, premièrement, quelle altération éprouve la suite des signes, lorsque x, en croissant d'une manière continue, atteint et dépasse une valeur qui annule la première fonction V.

Désignons cette valeur par a; la fonction V' dérivée de V ne peut pas être nulle en même temps que V, puisque par hypothèse l'équation $V=0$ n'a pas de racines égales; considérons des valeurs de x très-peu différentes de a : si en désignant par h une quantité positive aussi petite qu'on le voudra, on fait, tour à tour, $x=a-h$ et $x=a+h$, la fonction V' aura, pour ces deux valeurs, le même signe que pour $x=a$, car on peut prendre h assez petit pour qu'elle ne s'évanouisse pas, et, par suite, ne change pas de signe tandis que x croît de la valeur $a-h$ à la valeur $a+h$; cela posé, désignons V par $F(x)$, on a

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{1.2}F''(a)+\ldots$$

ou, en observant que $F(a)$ est nul et que $F'(a)$ ne l'est pas,

$$F(a+h)=h(F'(a)+\frac{F''(a)}{1.2}h+\frac{F'''(a)}{1.2.3}h^2+\ldots$$

On voit, d'après cette formule, que pour des valeurs très-petites de h, $F(a+h)$ a le même signe que $F'(a)$, et, par suite, que $F'(a+h)$; il n'y a donc pas, pour $x=a+h$, de variations entre V et V'.

On trouvera de même

$$F(a-h)=-h(F'(a)-\frac{F''(a)}{1.2}h+\frac{F'''(a)}{1.2}h^2\ldots$$

et $F(a-h)$ est, par conséquent, de signe contraire à $F'(a)$, par suite à $F'(a-h)$, en sorte que pour $x=a-h$, il y a une variation entre V et V'.

Les signes des fonctions V et V' formaient donc, dans la suite, une variation avant la valeur pour laquelle V est nulle, et cette variation s'est changée en permanence lorsque x a franchi cette valeur.

Quant aux autres fonctions V', V_2 ... V_r, chacune aura pour $x=a+h$ le même signe que pour $x=a-h$, si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x=a$ en même temps que V.

La suite des signes des fonctions $V, V_1, \ldots V_r$ perd donc une variation lorsque x, en croissant, dépasse une valeur a qui annule V sans annuler aucune des autres fonctions $V', V_2, \ldots V_r$. Il faut examiner ce qui arrive lorsque l'une de ces fonctions s'évanouit, soit pour une valeur de x égale à une racine de $V = 0$, soit pour toute autre valeur de cette variable.

222. Soit V_n une fonction intermédiaire entre V et V_r, qui s'annule pour $x = b$ (V_n, bien entendu, peut désigner la fonction V' aussi bien que les autres), cette valeur b de x ne peut réduire à zéro ni la fonction V_{n+1} qui suit V_n, ni la fonction V_{n-1} qui le précède. (Si V_n désignait V', V_{n-1} désignerait V.) On a, en effet, entre les trois fonctions consécutives, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, une relation de la forme

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}, \tag{3}$$

et si deux fonctions consécutives V_{n-1}, V_n étaient nulles pour la même valeur de x, cette équation prouve que V_{n+1} le serait aussi; et comme on a

$$V_n = V_{n+1} Q_{n+1} - V_{n+2},$$

il en serait de même de V_{n+2}, puis de $V_{n+3} \ldots$, et l'on prouverait enfin que V_r est nul pour cette même valeur de x; or, cela est impossible puisqu'il est égal à une constante.

Cela posé, substituons à x deux nombres $b - h$ et $b + h$, très-peu différents de b, les deux fonctions V_{n-1} et V_{n+1} auront, pour ces deux valeurs de x, les mêmes signes que pour $x = b$, puisqu'on peut prendre h assez petit pour que V_{n-1} et V_{n+1} ne changent pas de signes dans l'intervalle; mais V_n étant nul par hypothèse pour $x = b$, l'équation (3) prouve que V_{n-1} et V_{n+1} sont de signes contraires, et, par suite, quels que soient les signes de V_n pour $x = b - h$ et pour $x = b + h$, les trois fonctions

$$V_{n-1}, \qquad V_n, \qquad V_{n+1}$$

présenteront toujours une permanence et une variation, V_n ayant nécessairement le même signe que l'un des deux qui le comprennent et un signe différent de l'autre.

Il n'y a donc, lorsque x, franchissant la valeur b, passe de $b-h$ à $b+h$, aucun changement dans le nombre total des variations de la suite.

Il est donc prouvé que chaque fois que la variable x, en croissant d'une manière continue, atteint et dépasse une valeur qui rend V égal à zéro; la suite des signes des fonctions V, V', V_2, V_r perd une variation formée sur sa gauche par les signes de V et de V', laquelle est remplacée par une permanence; tandis que les changements de signes des fonctions intermédiaires V', $V_2 \ldots V_{r-1}$ ne peuvent jamais augmenter ni diminuer le nombre total des variations. En conséquence, si l'on prend un nombre quelconque α, positif ou négatif, et un autre nombre quelconque β, plus grand que α, et si l'on fait croître x de α à β, autant il y aura de valeurs de x comprises entre α et β qui rendent V égal à zéro, autant la suite des fonctions V, V' ... V_r pour $x = \beta$ présentera de variations de signes de moins que pour $x = \alpha$. C'est le théorème qu'il fallait démontrer.

223. Dans les divisions successives qui servent à former les fonctions V_2, $V_3 \ldots V_r$, on peut, avant de prendre un polynome pour dividende ou pour diviseur, le multiplier ou le diviser par tel nombre positif qu'on voudra. Les fonctions V_2, $V_3, \ldots V_r$, qu'on obtiendra en opérant ainsi, ne différeront que par des facteurs numériques positifs de celles que nous avons considérées, et qui figurent dans les équations (2); de sorte qu'elles auront respectivement les mêmes signes que celles-ci pour chaque valeur de x.

Cette remarque permet de faire en sorte que les coefficients des divers polynomes soient entiers, pourvu que ceux de l'équation $V = 0$ le soient eux-mêmes. Mais il faut bien prendre garde que les facteurs numériques que l'on introduit ou qu'on supprime soient tous positifs.

224. Si l'une des fonctions V', $V_2 \ldots V_{r-1}$ se trouve nulle pour l'une des limites $x = \alpha$, $x = \beta$, il suffit de compter les variations en omettant la fonction qui est nulle. Cela résulte de la démonstration qui a été donnée (**222**) dans le cas où l'une des fonctions intermédiaires s'évanouit. Lorsque la fonction V_n s'annule en

effet pour $x = \alpha$, on a vu que pour $x = \alpha - h$, V_{n-1}, V_n et V_{n+1} forment une variation, et une seule. Or cette variation subsistera lorsqu'en omettant la fonction V_n, on considérera V_{n-1} et V_{n+1} qui sont de signes contraires, comme formant deux fonctions consécutives.

Si V se trouve nul pour $x = \alpha$, on en conclut que α est racine de l'équation proposée, et la règle s'appliquera à la recherche de nombre de racines comprises entre $\alpha + h$ et β. $\alpha + h$ fournira entre V et V' (**221**) une permanence, et donnera aux autres fonctions le même signe que la valeur α.

225. Lorsque l'on pourra reconnaître que l'une des fonctions V_n, intermédiaire entre V et V_r, conserve constamment le même signe, pour les valeurs de x comprises entre α et β, il ne sera pas nécessaire de considérer les fonctions qui suivent V_n, la démonstration pourra se faire sans aucun changement, en réduisant la suite à $V, V', V_2 \ldots V_n$.

226. Si l'on prend l'un des nombres α et β très-grand et négatif, et l'autre très-grand et positif, en faisant $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, le théorème de Sturm fera connaître le nombre total des racines réelles. Pour que toutes les racines soient réelles, il faut et il suffit que leur nombre soit égal au degré m de l'équation $V = 0$. Mais le nombre des fonctions $V, V', V_2 \ldots V_r$ est, tout au plus, $m + 1$, et, par conséquent, le nombre des variations, au plus égal à m, ne peut atteindre cette limite que si la suite est *complète*, c'est-à-dire si les degrés successifs vont en diminuant précisément d'une unité de chaque fonction à la suivante. Il faut de plus, pour que toutes les racines soient réelles, que la substitution de $-\infty$ à la place de x ne donne que des variations, et celle de $+\infty$ que des permanences. Les degrés des fonctions étant alternativement pairs et impairs, on voit aisément que les deux conditions exigent l'une et l'autre que les coefficients des premiers termes soient tous de même signe, et que cela est suffisant.

227. Considérons l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

on a

$$V = x^3 - 2x - 5,$$
$$V' = 3x^2 - 2.$$

Pour former V_2, il faut diviser V par V'; mais afin d'éviter les coefficients fractionnaires, multiplions d'abord V par 3, on obtient ainsi le reste $-4x - 15$, et l'on a

$$V_2 = 4x + 15.$$

on divise ensuite V' par V_2 après avoir multiplié V' par 4, ainsi que le reste du premier degré; le reste obtenu est $+643$; on a donc

$$V_3 = -643.$$

Si l'on fait dans les fonctions V, V', V_2, V_3, $x = -\infty$, la suite des signes est $-+-$, elle présente deux variations; pour $x = +\infty$, les signes sont $+++-$, il y a une variation seulement et l'équation proposée admet par conséquent une seule racine réelle.

228. Cherchons, comme seconde application, la condition pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ait les trois racines réelles.

On a

$$V = x^3 + px + q,$$
$$V' = 3x^2 + p,$$

on obtient V_2 et V_3 par les divisions successives. Pour éviter les fractions, on a soin de multiplier le dividende par 3 dans la première division, et dans la seconde, par $4p^2$, qui est positif. on trouve

$$V_2 = -2px - 3q,$$
$$V_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Lorsque x passe de $-\infty$ à $+\infty$, la suite V, V', V_2, V_3 doit perdre trois variations; il faut donc qu'elle en présente trois pour $x = -\infty$, et n'en ait plus aucune pour $x = +\infty$. C'est-à-dire que les coefficients des premiers termes

$$1,\ 3,\ -2p,\ -4p^3 - 27q^2$$

soient tous de même signe. On doit donc avoir

$$p < 0,$$
$$4p^3 + 27q^2 < 0$$

qui sont bien les conditions obtenues par d'autres méthodes.

RÉSUMÉ.

220. Énoncé du théorème de Sturm. — **221**. La suite des fonctions définies dans l'énoncé perd une variation lorsque x, en croissant, franchit une racine de l'équation proposée. — **222**. Aucun changement ne se produit dans le nombre total des variations, lorsque x franchit une racine de l'une des fonctions auxiliaires. — **223**. Il est permis, dans les opérations, d'introduire ou de supprimer des facteurs numériques positifs. — **224**. Cas où l'une des limites est racine de la proposée. — **225**. Cas où l'on peut réduire le nombre des fonctions. — **226**. Conditions pour que toutes les racines d'une équation soient réelles. — **227**, **228**. Applications du théorème.

LIVRE IV.

DES DIFFÉRENCES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS SUR LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

§ I. Différences des divers ordres.

229. Définition des différences. Si l'on considère une suite de nombres qui se succèdent suivant une loi quelconque, les différences, obtenues en retranchant chacun d'eux de celui qui le suit, forment une nouvelle suite, dont les termes se nomment les *différences* des termes de la première.

Ainsi, la suite proposée étant représentée par

[1] $$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1}, y_n;$$

la suite des différences sera

[2] $$y_1 - y_0,\ y_2 - y_1,\ y_3 - y_2, \dots\ y_n - y_{n-1};$$

$(y_1 - y_0)$ est la *différence* de y_0; $(y_2 - y_1)$, la *différence* de y_1; $(y_n - y_{n-1})$, la *différence* de y_{n-1}. Pour former la différence de y_n, il faudrait connaître un terme de plus dans la suite [1].

Pour désigner les différences, on se sert souvent du signe Δ.

Ainsi, Δy_k désigne la différence $(y_{k+1} - y_k)$. D'après cette notation, les termes de la suite

$$y_0, y_1, y_2, \dots y_n,$$

auront pour différences

$$\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \dots \Delta y_{n-1}.$$

230. Définition des différences secondes. Une suite quelconque de nombres étant donnée, leurs différences forment une nouvelle suite, ayant un terme de moins que la première.

L'on peut opérer sur cette suite, comme sur celle qui lui a donné naissance, et former les différences des différences, que l'on nomme des *différences secondes*. On les désigne par le signe Δ^2.

Ainsi, étant donnée la suite

$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_n,$$

les différences premières seront désignées par

$$\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots \Delta y_{n-1};$$

et les différences secondes

$$\Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2},$$

le seront par

$$\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \ldots \Delta^2 y_{n-2}.$$

Cette nouvelle série a évidemment un terme de moins que la précédente, et, par suite, deux termes de moins que la proposée.

231. Définition des différences d'ordre quelconque. Si l'on opère sur la suite des différences secondes, comme on l'a fait sur la suite proposée, on formera les différences des différences secondes, que l'on nomme des *différences troisièmes*, et que l'on désigne par le signe Δ^3.

Ainsi, les différences

$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \ldots \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$$

se désignent par $\Delta^3 y_0, \Delta^3 y_1, \ldots \Delta^3 y_{n-3}.$

On conçoit que l'on peut continuer ainsi indéfiniment, et former les différences quatrièmes, cinquièmes, etc., qui se désigneront par les signes Δ^4, $\Delta^5 \ldots$; le nombre de ces différences n'étant limité que par celui des termes de la suite proposée. Ainsi, deux termes ne donnent lieu qu'à une différence première, et il n'y a pas lieu de considérer leur différence seconde. Trois termes donnent lieu à deux différences premières et à une différence seconde; il n'y a pas lieu de considérer leur différence troisième. En général, m termes donnent lieu à $(m-1)$ différences premières, à $(m-2)$ différences secondes, ... à une différence $(m-1)^{me}$; il n'y a pas lieu de considérer leur

différence m^{me}. Si une suite est illimitée, on peut considérer des différences d'un ordre illimité.

232. Usage des différences pour la formation des carrés. Nous commencerons par montrer, par deux exemples simples, de quelle utilité peut être la considération des différences.

Considérons la suite des carrés des nombres naturels :

[1] 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...;

les différences premières sont :

[2] 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19...;

et les différences secondes,

[3] 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2...,

sont toutes égales entre elles. La démonstration est tellement simple, que nous croyons pouvoir nous dispenser de la donner ici.

D'après cette remarque, si l'on voulait former la table des carrés des nombres naturels, on commencerait par écrire la suite [2],

[2] 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19...,

puis le premier terme de la suite des carrés, qui est 1; et il est évident que chaque carré s'obtiendrait du précédent, en ajoutant le terme correspondant de cette suite [2].

Ainsi, on dirait 3 et 1, 4; 4 et 5, 9; 9 et 7, 16, etc.

233. Usage des différences pour la formation des cubes. Considérons la suite des cubes :

[1] 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,...;

les différences premières sont :

[2] 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217,...;

les différences secondes sont :

[3] 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48,...;

et les différences troisièmes,

[4] 6, 6, 6, 6, 6, 6,

sont constantes et égales à 6. Cette loi est générale. En effet, quatre cubes consécutifs sont :

$$a^3,\ (a+1)^3,\ (a+2)^3,\ (a+3)^3;$$

les différences premières sont :

$$3a^2+3a+1,\quad 3(a+1)^2+3(a+1)+1,\quad 3(a+2)^2+3(a+2)+1;$$

les différences secondes sont :

$$3[(a+1)^2-a^2]+3,\quad 3[(a+2)^2-(a+1)^2]+3,$$

c'est-à-dire, en réduisant,

$$6a+6,\quad 6(a+1)+6;$$

et la différence de ces deux expressions, c'est-à-dire, la différence troisième, est évidemment 6.

D'après cela, pour former un tableau des cubes, on formerait successivement les suites [4] [3] [2] [1], chacune permettant d'obtenir la suivante par de simples additions. Ainsi, ayant écrit la suite [3] sur une ligne verticale, on obtiendra la suite [2] en écrivant son premier terme 7, et en remarquant que chacun des autres se forme du précédent par l'addition du terme correspondant de la suite [3].

12	7
18	19 = 12 + 7
24	37 = 18 + 19
30	61 = 24 + 37
36	91 = 30 + 61
42	127 = 36 + 91
48	169 = 42 + 127
54	217 = 48 + 169
60	271 = 54 + 217
66	331 = 60 + 271
72	397 = 66 + 331
78	469 = 72 + 397

Ayant ainsi formé la suite [2], c'est-à-dire les différences premières des cubes, chaque cube pourra se déduire du précédent, en lui ajoutant la différence correspondante, en sorte qu'ils se déduiront tous du premier 1, par de simples additions.

Ainsi, ayant écrit, sur une ligne verticale, les différences premières obtenues plus haut, on formera la série des cubes, comme l'indique le tableau suivant :

7	1
19	$8 = 7 + 1$
37	$27 = 19 + 8$
61	$64 = 37 + 27$
91	$125 = 61 + 64$
127	$216 = 91 + 125$
etc.	etc.

Le tableau suivant résume les résultats que nous venons d'obtenir.

CUBES.	DIFFÉRENCES 1^{res}.	DIFFÉRENCES 2^{mes}.	DIFFÉRENCES 3^{mes}.
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	6
64	61	30	6
125	91	36	6
216	127	42	6
343	169	48	
512	217		
729			

Pour former ce tableau, on écrit d'abord, dans la première colonne de gauche, trois cubes consécutifs, 1, 8, 27; on en conclut les deux différences premières, 7 et 19, que l'on écrit dans la seconde colonne, et la différence seconde 12, que l'on écrit dans la troisième. Puis, après avoir écrit plusieurs fois, dans la quatrième colonne, la différence troisième qui est toujours 6, on ajoute cette différence à celle qui est à sa gauche, en disant :

6 et 12... 18; 6 et 18... 24; 6 et 24... 30, etc.; on forme ainsi la troisième colonne. On forme de même la seconde colonne à l'aide de celle-ci, en disant : 18 et 19... 37; 24 et 37... 61; 30 et 61... 91, etc. Enfin la seconde colonne, ainsi construite, sert à former la première; on dit : 19 et 37... 64; 61 et 64... 125; 91 et 125... 216, et ainsi de suite.

On voit qu'*un nombre quelconque du tableau est égal au nombre placé au-dessus de lui dans la même colonne, augmenté de celui qui est à la droite de ce dernier dans la colonne suivante.*

§ II. Formules des différences.

234. Expression de $\Delta^p u_0$ en fonction de $u_0, u_1, u_2, \ldots u_p$. Lorsque $(n+1)$ quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ u_n,$$

sont données, il n'y a aucune difficulté à former, d'après ce qui précède, leurs différences successives jusqu'à la n^{me} inclusivement; nous ne nous bornerons pas cependant aux indications qui permettent d'effectuer ces calculs, et nous donnerons la formule qui en exprime le résultat général.

On a, d'après les définitions :

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,\ \Delta u_1 = u_2 - u_1,\ \Delta u_2 = u_3 - u_2, \ldots;$$

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0,\ \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1, \ldots;$$

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = (u_3 - 2u_2 + u_1) - (u_2 - 2u_1 + u_0)$$
$$= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0.$$

Sans aller plus loin, on peut prévoir la loi suivante : *la différence de rang* p *se forme en multipliant* $u_p, u_{p-1}, \ldots u_0$ *par les coefficients du développement de* $(x-a)^p$.

Pour montrer que cette loi est générale, nous allons faire voir, qu'en l'admettant comme vraie pour une différence d'un certain ordre, elle est vraie, par cela même, pour la différence d'ordre immédiatement supérieure.

Soit donc :

$$[1]\quad \Delta^p u_0 = u_p - p u_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} u_{p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} u_{p-3} + \ldots \pm u_0.$$

Cette formule, donnant la différence p^{me} du premier terme d'une suite quelconque en fonction des $(p+1)$ premiers termes, nous pouvons l'appliquer au calcul de $\Delta^p u_1$, en considérant u_1 comme premier terme de la suite

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots\ u_p,\ u_{p+1},\ldots\ u_n;$$

cela revient évidemment à remplacer, dans la formule [1], u_0 par u_1, u_1 par u_2,..., c'est-à-dire à augmenter tous les indices d'une unité. On aura, par suite, *en vertu de la même formule :*

$$[2]\quad \Delta^p u_1 = u_{p+1} - pu_p + \frac{p(p-1)}{1.2}u_{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}u_{p-2} + \ldots,$$

ou, en retranchant l'égalité [1] de l'égalité [2] :

$$\Delta^{p+1}u_0 = \Delta^p u_1 - \Delta^p u_0 = u_{p+1} - (p+1)u_p + \left(\frac{p(p-1)}{1.2} + p\right)u_{p-1}$$

$$- \left(\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} + \frac{p(p-1)}{1.2}\right)u_{p-2} + \ldots.$$

Or (46) la somme de deux coefficients successifs du développement d'un binome forme un coefficient du développement de la puissance immédiatement supérieure; on peut donc écrire :

$$\Delta^{p+1}u_0 = u_{p+1} - (p+1)u_p + \frac{(p+1)p}{1.2}u_{p-1}$$

$$- \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}u_{p-2} + \ldots;$$

c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

235. EXPRESSION DE u_p EN FONCTION DE u_0 ET DE SES p DIFFÉRENCES SUCCESSIVES. Réciproquement, si l'on donne u_0 et ses n différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0$,... $\Delta^n u_0$, on peut calculer les termes successifs u_1, u_2,... u_n; nous donnerons aussi la formule générale, à laquelle conduit ce calcul.

On a, par définition :

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0,$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1,$$

$$= u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + (\Delta u_0 + \Delta^2 u_0) + (\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0),$$

$$= u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0;$$

et l'on aperçoit immédiatement la loi suivante.

Le terme u_p, *de rang* $(p+1)$, *se forme, en multipliant* u_0 *et les différences successives*, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0 \dots \Delta^p u_0$, *par les coefficients du développement de* $(x+a)^p$.

Pour démontrer que cette loi est générale, nous prouverons encore, qu'en l'admettant comme vraie pour un terme de certain ordre, elle est vraie, par cela même, pour un terme immédiatement suivant.

Supposons donc que l'on ait prouvé la formule :

$$[1] \qquad u_p = u_0 + p\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \dots + \Delta^p u_0.$$

Cette formule donne le $(p+1)^{me}$ terme d'une suite quelconque $u_0, u_1, u_2, \dots u_p$, en fonction du premier et de ses p différences successives ; si donc nous appliquons *la même formule* à la série

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2 \dots \Delta u_p,$$

elle nous donnera le $(p+1)^{me}$ terme Δu_p, en fonction du premier Δu_0 et de ses p différences successives qui sont évidemment $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0 \dots \Delta^{p+1} u_0$; on aura donc :

$$[2] \quad \Delta u_p = \Delta u_0 + p\Delta^2 u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^3 u_0 + \dots + \Delta^{p+1} u_0;$$

formule qui se déduit de [1] en augmentant d'une unité les indices des Δ. En ajoutant les formules [1] et [2], il vient :

$$u_{p+1} = u_p + \Delta u_p = u_0 + (p+1)\Delta u_0$$

$$+ \left(\frac{p(p-1)}{1.2} + p\right)\Delta^2 u_0 + \ldots + \Delta^{p+1} u_0,$$

et, comme (46) la somme de deux coefficients consécutifs de la puissance p d'un binome est un coefficient de la puissance $(p+1)$, cette égalité peut s'écrire :

$$u_{p+1} = u_0 + (p+1)\Delta u_0 + \frac{(p+1)p}{1.2}\Delta^2 u_0$$

$$+ \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots;$$

ce qui est précisément le résultat qu'il fallait obtenir.

§ III. Différences des polynomes.

236. Nous avons reconnu (232), que la suite des carrés des nombres naturels a ses différences secondes, et la suite des cubes ses différences troisièmes égales à une constante. Cette proposition s'étend aux différences quatrièmes de la suite des quatrièmes puissances, aux différences cinquièmes de la suite des cinquièmes puissances, etc. Mais, sans nous arrêter à ces propositions, nous démontrerons le théorème suivant, dont elles sont évidemment des cas particuliers.

THÉORÈME. *Si dans un polynome en* x, *de degré* m, *on substitue à* x *une suite de nombres en progression arithmétique, les différences* m$^{\text{mes}}$ *des résultats obtenus sont constantes.*

Soit, en effet, le polynome :

[1] $y = F(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m.$

Supposons que l'on substitue à x les valeurs successives

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ldots,\ x_0+nh\ldots;$$

désignons par $$y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n\ldots,$$

les valeurs correspondantes de y. Toutes ces valeurs sont évidemment des polynomes, de degré m, en x_0, dont les coefficients dépendent de h : car on a :

$$F(x_0+ph)=F(ph+x_0)=F(ph)+F'(ph)x_0$$

$$+\frac{F''(ph)}{1.2}x_0^2+\ldots+\frac{F^m(ph)}{1.2\ldots m}x_0^m.$$

De plus, il est clair que, pour passer de l'une de ces valeurs à la suivante, il suffit d'y changer x_0 en (x_0+h). On a, en effet, en considérant deux valeurs consécutives de y, y_p et y_{p+1} :

$$y_p=F(x_0+ph),\quad y_{p+1}=F[x_0+(p+1)h];$$

et il est évident que $\{x_0+(p+1)h\}$ peut se déduire de (x_0+ph), en y changeant x_0 en (x_0+h).

Cela posé, les différences premières Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2\ldots$ sont des polynomes du degré $(m-1)$ en x_0, dont les coefficients dépendent de h. On a, en effet :

$$\Delta y_0=y_1-y_0=F(x_0+h)-F(x_0)=F'(x_0)h+F''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\ldots$$

Or on sait que $F'(x_0)$ est un polynome de degré $(m-1)$, $F''(x_0)$ un polynome de degré $(m-2)$, etc.; la proposition est donc démontrée pour Δy_0. Il en résulte qu'elle est vraie pour les différences suivantes, Δy_1, $\Delta y_2,\ldots$; car chacune d'elles se déduit de la précédente, en changeant x_0 en (x_0+h); ce qui ne change pas son degré, par rapport à x_0.

La série

[2] $$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ldots,\ \Delta y_n\ldots,$$

pourrait donc s'obtenir, en substituant successivement à x, dans un certain polynome, de degré $(m-1)$, les valeurs $x_0, x_0+h\ldots$

Si donc nous appliquons à cette suite ce qui a été dit de la suite,

$$y_0,\ y_1, \ldots,\ y_n,$$

déduite de la même manière d'un polynome de degré m, nous verrons que les différences des termes de la série [2], c'est-à-dire

[3] $$\Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_1, \ldots,\ \Delta^2 y_n,$$

sont des polynomes, de degré $(m-2)$, en x_0, et que chacun se déduit du précédent, en y changeant x_0 en (x_0+h); en sorte qu'ils peuvent tous se déduire d'un même polynome, en y changeant x en x_0, x_0+h, $x_0+2h, \ldots$

Si nous appliquons à la suite des différences secondes le théorème dont nous avons déjà deux fois fait usage, nous verrons que les différences des termes de la série [3], c'est-à-dire

[4] $$\Delta^3 y_0,\ \Delta^3 y_1, \ldots,\ \Delta^3 y_n,$$

sont des polynomes, de degré $(m-3)$, en x_0.

Et, en continuant de la même manière, nous verrons que les différences quatrièmes sont des polynomes de degré $(m-4)$, les différences cinquièmes, de degré $(m-5), \ldots$ et enfin les différences $m^{\text{ièmes}}$, de degré 0, c'est-à-dire indépendantes de x_0; ce qui prouve le théorème énoncé. Car, pour obtenir chacune de ces différences, on doit changer, dans la précédente, x_0 en (x_0+h); et elles sont, par conséquent, constantes, quand elles ne contiennent pas x_0.

237. Remarques. En revenant sur les détails de la démonstration précédente, on peut faire plusieurs remarques utiles.

Remarque I. On a trouvé la formule :

[1] $$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = \mathrm{F}(x_0+h) - \mathrm{F}(x_0)$$
$$= \mathrm{F}'(x_0)h + \mathrm{F}''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{\mathrm{F}^m(x_0)h^m}{1.2\ldots m}.$$

On voit que l'accroissement h est facteur dans le second membre; et qu'il le sera encore, si l'on remplace x par (x_0+h), (x_0+2h), pour former les différences Δy_1, $\Delta y_2, \ldots$; en sorte

que toutes les différences premières contiennent en facteur l'accroissement h.

REMARQUE II. Il est évident que, si le polynome proposé $F(x)$ renfermait h en facteur, ce facteur se retrouverait dans les dérivées successives $F'(x)$, $F''(x_0)$... $F^m(x_0)$; et, par suite, tous les termes de la différence contiendraient, non plus seulement h, mais h^2 en facteur. Il résulte de là que, la différence première étant un polynome qui contient h en facteur, la différence seconde contiendra h^2 en facteur à tous les termes. La formule [1] prouve, en général, que, si un polynome $F(x)$ contient en facteur une puissance h^p de h, sa différence contiendra à tous les termes le facteur h^{p+1}; et il en résulte de là, que les différences des différences secondes, c'est-à-dire les différences troisièmes, contiendront le facteur h^3, que les différences quatrièmes contiendront le facteur h^4, et ainsi de suite.

On voit que, si l'accroissement h décroît de plus en plus, les différence décroîtront suivant une loi d'autant plus rapide que leur ordre sera plus élevé.

REMARQUE III. L'expression générale de Δy_0,

$$\Delta y_0 = F'(x_0)h + F''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

est, comme nous l'avons dit, un polynome, de degré $(m-1)$, que l'on peut ordonner suivant les puissances de x_0. Si Ax^m représente le premier terme de $F(x)$, il est facile de voir que le premier terme de Δy_0 sera le premier terme de $F'(x_0)h$, c'est-à-dire, $mAx^{m-1}h$; et que, par suite, $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2 \ldots$, s'obtiendront en substituant à x les valeurs x_0, (x_0+h), (x_0+2h)... dans un polynome dont le premier terme est $mhAx^{m-1}$. En appliquant à ce polynome le résultat trouvé pour $F(x)$, on verra que les différences premières de ce polynome, c'est-à-dire les différences secondes de $F(x)$, peuvent s'obtenir en substituant à x les valeurs x_0, $(x_0+h)\ldots$, dans un polynome dont le premier terme est $m(m-1)Ah^2x^{m-2}$. On verra de même, que le premier terme du polynome, qui donnerait les différences troisièmes,

est $m(m-1)(m-2)Ah^3x^{m-3}$. Enfin la différence m^{me}, qui se réduit à un seul terme, puisqu'elle est indépendante de x_0, est :

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 2Ah^m.$$

Les polynomes en x, dont il est question ici, se nomment les différences première, deuxième, troisième,... m^{me}, du polynome $y=F(x)$, et se désignent par les notations Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$,... $\Delta^m y$.

238. Application au polynome du troisième degré. Si nous considérons le polynome du troisième degré :

$$[1] \qquad y = x^3 + px^2 + qx + r,$$

nous trouverons sans peine, en y remplaçant x par $(x+h)$, et en retranchant [1] du résultat :

$$[2] \qquad \Delta y = 3x^2h + (3h^2 + 2ph)x + h^3 + ph^2 + qh;$$

de même, en remplaçant x par $(x+h)$ dans [2], et en retranchant ensuite [2] du résultat, on a :

$$[3] \qquad \Delta^2 y = 6xh^2 + 6h^3 + 2ph^2;$$

et, en opérant sur [3] de la même manière, on a :

$$[4] \qquad \Delta^3 y = 6h^3.$$

Pour obtenir les valeurs de Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2\ldots$; $\Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1\ldots$, il suffira de remplacer, dans le second membre des formules [2] et [3], x par x_0, (x_0+h), etc.

Si l'on voulait former les valeurs numériques de la fonction y et de ses différences, il faudrait procéder comme on l'a indiqué pour former le tableau des cubes.

239. Exemple. Soit, par exemple, le polynome

$$y = x^3 - 5x^2 + 6x - 1;$$

formons les valeurs que prend ce polynome pour des valeurs entières de la variable. Si l'on fait successivement $x=-1$, $x=0$, $x=1$, on trouve pour valeurs correspondantes de y, $y=-13$, $y=-1$, $y=1$, dont les différences premières sont 12 et 2, et la différence seconde est -10. Quant à la différence troisième

de y, on sait qu'elle est égale à 6. On disposera ces résultats de la manière suivante :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
				6
				6
				6
-1	-13	12	-10	6
0	-1	2		6
$+1$	$+1$			6

et l'on remplira ensuite les différentes colonnes, en remarquant que chaque terme de l'une d'elles (la première colonne exceptée) est égal à celui qui est au-dessus, augmenté du terme correspondant à ce dernier dans la colonne placée à sa droite. Cette remarque permet évidemment de prolonger les colonnes dans les deux sens ; on trouve :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-5	-281	112	-34	6
-4	-169	78	-28	6
-3	-91	50	-22	6
-2	-41	28	-16	6
-1	-13	12	-10	6
0	-1	2	-4	6
1	$+1$	-2	$+2$	6
2	-1	0	$+8$	6
3	-1	8	$+14$	
4	$+7$	22		
5	$+29$			

Pour prolonger d'abord la colonne des différences secondes vers le bas, on dit : $-10+6\ldots-4$; $-4+6\ldots2$; $+2+6\ldots8$, etc. On prolonge de même la colonne des différences premières, à l'aide de la précédente, en disant : $-4+2\ldots-2$; $+2-2\ldots0$; $8+0\ldots8$, etc. On prolonge de même la série des valeurs de y (qui correspondent à $x=2, 3, 4,\ldots$) en disant : $-2+1\ldots-1$; $0=1\ldots-1$; $8-1\ldots7$, et ainsi de suite.

Pour prolonger les colonnes vers le haut, on remarque qu'un

terme d'une colonne est la différence entre le terme placé au-dessous de lui dans la même colonne, et le terme placé à droite et au-dessus dans la colonne suivante. On prolonge donc d'abord la colonne intitulée $\Delta^2 y$, en disant : $-10-6\ldots-16$; $-16-6\ldots-22$; $-22-6\ldots-28$, etc. On prolonge ensuite, à l'aide de celle-ci, la colonne des Δy, en disant : $12-(-16)\ldots 28$; $28-(-22)\ldots 50$, etc. On prolonge enfin la série des valeurs de y, en disant : $-13-28\ldots-41$; $-41-50\ldots-91$, et ainsi de suite.

240. Remarque. On voit, par l'exemple précédent, que, pour calculer les valeurs d'un polynome du troisième degré, qui correspondent à des valeurs entières de la variable, il suffit de connaître celles qui correspondent à trois nombres entiers consécutifs $-1, 0, +1$; en se fondant sur ce que la différence troisième est constante, il est très-facile d'obtenir, par de simples additions, les valeurs suivantes.

Si le polynome proposé était du quatrième degré, la différence quatrième serait constante; et, pour former la série de ses valeurs, il suffirait de connaître quatre valeurs consécutives. Il en faudrait cinq pour un polynome du cinquième degré; et ainsi de suite. Il faudrait en connaître m pour un polynome du m^{me} degré.

§ IV. Différences des fonctions.

241. Définition. Soit une fonction quelconque $y = F(x)$. Si l'on désigne par x une quelconque des valeurs attribuées à x, et par $(x+h)$ la valeur suivante, l'expression

$$\Delta y = \Delta(Fx) = F(x+h) - F(x)$$

se nomme la *différence première* de $F(x)$. De même, si l'on change x en $(x+h)$ dans $\Delta F(x)$, la différence

$$\Delta^2 y = \Delta^2 F(x) = \Delta F(x+h) - \Delta F(x)$$

se nomme la *différence seconde* de $F(x)$. Et ainsi de suite.

Exemple. Soit : $y = a^x$.

On a : $$\Delta y = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

c'est-à-dire que la différence première s'obtient en multipliant la fonction par la constante a^x. On a, par suite :

$$\Delta^2 y = a^x(a^h - 1)^2,\ \Delta^3 y = a^x(a^h - 1)^3, \ldots\ \Delta^n y = a^x(a^h - 1)^n.$$

§ V. Usage des différences pour la construction des tables numériques.

242. Tables numériques. La considération des différences est fort utile dans la construction des tables de toute espèce. Il arrive, en effet, presque toujours que, dans une série de nombres résultant d'une loi régulière, et suffisamment rapprochés les uns des autres, les différences tendent de plus en plus vers l'égalité, à mesure que leur ordre s'élève. En négligeant des quantités fort petites, on pourra, à partir d'un certain ordre, leur supposer, dans un certain intervalle, une valeur invariable, et construire la table comme s'il s'agissait des valeurs d'un polynome.

Ne pouvant donner ici la raison de ce fait général, nous nous bornerons à le développer sur deux exemples.

243. Exemple I. Si l'on pose :

$$y = \log x,$$

on aura :

$$\Delta y = \log(x+h) - \log(x) = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

ou $$\Delta y = \log e\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} \ldots\right)$$

Puis : $$\Delta^2 y = \log(x+2h) - 2\log(x+h) + \log x$$
$$= \log(x+2h) - \log x - 2\{\log(x+h) - \log x\}$$
$$= \log\left(1 + \frac{2h}{x}\right) - 2\log\left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

ou $$\Delta^2 y = -\log e\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \ldots\right).$$

Puis :

$$\Delta^3 y = \log(x+3h) - 3\log(x+2h) + 3\log(x+h) - \log x$$

$$= \log\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ou $\Delta^3 y = \log e\left(\frac{2h^3}{x^3} - \text{etc.}\right)$.

Si l'on suppose, par exemple, $x = 10000$ et $h = 1$, il viendra :

$$\Delta y = 0{,}000043427276863,$$

$$\Delta^2 y = 0{,}000000004342076,$$

$$\Delta^3 y = 0{,}000000000000868\,;$$

et, si l'on ne voulait avoir les résultats qu'avec dix chiffres décimaux, on pourrait négliger longtemps les différences du quatrième ordre, et procéder comme si la différence troisième était constante. On formera donc successivement les colonnes des différences troisièmes, secondes, premières, comme au nº **239**; d'où l'on déduira les logarithmes des nombres 10001, 10002, 10003, en partant de celui de 100000, qui est 4,000000000000000. Il faudra vérifier les résultats, au moyen de logarithmes obtenus directement à des intervalles éloignés. La méthode des différences devra les donner exacts, avec le nombre des chiffres que l'on veut conserver. Lorsque le dernier de ces chiffres cessera d'être exact, on calculera de nouveau, *à priori*, au moyen des formules (**243**), les différences Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$; et l'on se servira de ces nouvelles valeurs comme des précédentes.

244. Exemple II. Soit proposé de calculer, à 7 décimales exactes, une table de logarithmes des sinus de 10 en 10 secondes, depuis 72° jusqu'à 72° 1′ 30″.

Nous savons que

$$\sin 72° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}9510565,$$

$$\cos 72° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = 0{,}3090170\,;$$

donc, en prenant les logarithmes de ces deux valeurs, et ajoutant, comme on le fait toujours, dix unités à chacun d'eux :

$$\log \sin 72^\circ = 9{,}9782063255,$$

$$\log \cos 72^\circ = 9{,}4899824.$$

Reprenons les formules précédentes :

$$y = \log x,$$

$$\Delta y = \log e \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{x^2} + \ldots\right),$$

$$\Delta^2 y = \log e \left(\frac{h^2}{x^2} - \ldots\right).$$

Nous cherchons ici log sin φ, φ étant égal à 72°, donc :

$$x = \sin \varphi.$$

Déterminons maintenant l'accroissement h du sinus, correspondant à un accroissement de l'angle de $10''$.

On a : $$h = \sin(\varphi + 10'') - \sin\varphi;$$

$$\sin(\varphi + 10'') = \sin\varphi.\cos 10'' + \cos\varphi.\sin 10''.$$

Mais l'arc $10'' = \dfrac{\pi \times 10}{180 \times 60 \times 60} = 0{,}00004\ 84813681\ldots < \dfrac{5}{10^5}$.

Or, comme $$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

le sinus de $10''$ ne diffère de son arc, que d'une quantité moindre que $\frac{1}{6}\left(\frac{5}{10^5}\right)^3$, ou de moins de $\frac{1}{10^{13}}$. De plus, $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$; donc le cosinus de $10''$ ne diffère de l'unité, que de moins que $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10^5}\right)^2$, ou que d'une unité du neuvième ordre. On peut donc, dans la valeur de $\sin(\varphi + 10'')$, remplacer $\cos 10''$ par 1, et $\sin 10''$ par arc $10''$, et écrire :

$$\sin(\varphi + 10'') = \sin\varphi + \cos\varphi \times \text{arc } 10'';$$

donc, avec une approximation de $\frac{1}{10^9}$:

$$h = \cos\varphi \times \text{arc } 10''.$$

L'angle φ est égal à 72°; donc, en négligeant h^2, on a :

$$\Delta y = \log e \frac{\cos 72° \times \text{arc } 10''}{\sin 72°}.$$

Or :

$$\log(\log e) = \bar{1},637\ 7843$$

$$\log \cos 72° = \bar{1},489\ 9824$$

$$\log 10'' = \bar{5},685\ 5749$$

$$\text{C}^t \log \sin 72° = 0,021\ 7937$$

donc $$\log \Delta y = \bar{6},835\ 1353$$

et $$\Delta y = 0,000\ 0068412.$$

Comme nous calculons les valeurs de log sin φ, à 7 décimales exactes, les valeurs de $\frac{h^2}{x^2}$, $\frac{h^3}{x^3}$ et, par suite, de $\Delta^2 y$, n'influent plus sur le résultat que nous cherchons; et la fonction transcendante log sin φ, dans les limites indiquées, peut être considérée comme une fonction algébrique du premier degré, fonction qui augmente de $\frac{68}{10^7}$ environ pour chaque 10″ d'augmentation de l'angle φ.

Pour être assuré de l'exactitude du dernier résultat, il faudra calculer à 8 décimales et former une progression arithmétique, dont le premier terme est :

$$\log \sin 72° = \bar{1},978\ 20632....$$

et dont la différence est 684. En nous bornant aux quatre derniers chiffres des logarithmes, la progression sera :

0632, 1316, 2000, 2684, 3368, 4052, 4736, 5420, 6104, 6788.

Supprimant le dernier chiffre, et ajoutant une unité du septième ordre, lorsqu'il est plus grand que 5, nous aurons :

$$\log \sin 72°0'\ 0'' = \bar{1},978\ 2063$$

$$\log \sin 72°0'10'' = \bar{1},978\ 2132$$

$$\log \sin 72°0'20'' = \bar{1},978\ 2200$$

$$\log \sin 72^\circ 0'30'' = \bar{1},978\ 2268$$

$$\log \sin 72^\circ 0'40'' = \bar{1},978\ 2337$$

$$\log \sin 72^\circ 0'50'' = \bar{1},978\ 2405$$

$$\log \sin 72^\circ 1'\ 0'' = \bar{1},978\ 2474$$

$$\log \sin 72^\circ 1'10'' = \bar{1},978\ 2542$$

$$\log \sin 72^\circ 1'20'' = \bar{1},978\ 2610$$

$$\log \sin 72^\circ 1'30'' = \bar{1},978\ 2679$$

Ce qui s'accorde parfaitement avec les valeurs fournies par les tables de Callet.

RÉSUMÉ.

229. Définition des différences. — **230.** Définition des différences secondes. — **231.** Définition des différences d'un ordre quelconque. — **232.** Usage des différences pour la formation des carrés. — **233.** Usage des différences pour la formation des cubes. — **234.** Formule qui exprime la différence d'un ordre quelconque. — **235.** Formule inverse, qui exprime un terme quelconque d'une suite, au moyen du premier et de ses différences successives. — **236.** La différence m^{me} d'un polynome de degré m, est constante. — **237.** Les différences premières contiennent, en facteur, l'accroissement h de la variable; les différences secondes contiennent h^2; les différences troisièmes h^3, etc. Expression de la différence m^{me}. — **238.** Application au polynome du troisième degré. — **239.** Exemple. — **240.** Pour calculer les valeurs d'un polynome du m^{me} degré, qui correspondent à des valeurs entières de la variable, il suffit de connaître celles qui correspondent à m nombres entiers consécutifs. — **241.** Différences des fonctions. — **242.** Des tables numériques. — **243, 244.** Applications à la construction des tables.

EXERCICES.

I. Trouver, à l'aide des différences, la somme des carrés, la somme des cubes, etc., des p premiers nombres entiers.

On applique la formule du n° **235**, en posant $u_p = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + p^n$

II. Calculer les valeurs que prend, pour des valeurs entières de la variable, le polynome

$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 8.$$

III. Prouver que, si $\varphi(x)$ désigne une fonction quelconque d'une variable et que l'on considère la suite

$$\varphi(x), \quad \varphi(x+h), \quad \varphi(x+2h), \ldots \varphi(x+nh),$$

les fractions $$\frac{\Delta\varphi(x)}{h}, \quad \frac{\Delta^2\varphi(x)}{h^2}, \quad \frac{\Delta^3\varphi(x)}{h^3} \ldots,$$

ont respectivement pour limites les dérivées du premier, second, troisième ordre de $\varphi(x)$. En conclure que, si h est petit, les différences sont, en général, d'autant plus petites que leur ordre est plus élevé.

CHAPITRE II.

DE L'INTERPOLATION.

§ I. Énoncé de la question.

245. Définition. L'interpolation consiste à insérer, entre les termes d'une suite, de nouveaux termes assujettis à la même loi. Ce problème est quelquefois très-facile, lorsque la loi des termes de la suite est connue. C'est ainsi que, entre deux termes d'une progression, on peut insérer par un procédé fort simple, un nombre donné de moyens. Si l'on considère, au contraire, des nombres quelconques dont la loi soit inconnue, le problème de l'interpolation devient complétement indéterminé; et pour le résoudre, il faut imposer aux termes inconnus une condition qui fasse disparaître l'indétermination. Cette condition est, le plus souvent, que les *différences d'un certain ordre seront égales à zéro*, On en a vu un exemple dans la détermination des logarithmes des nombres non compris dans la table; admettre, en effet, comme on le fait, que l'accroissement des logarithmes est proportionnel à celui des nombres, c'est admettre que, pour des accroissements égaux des nombres, les accroissements des logarithmes sont aussi égaux; ou, en d'autres termes, que la différence première des logarithmes est constante, et que, par suite, la différence seconde est nulle. Dans le cas des logarithmes, les tables permettent, d'ailleurs, de vérifier qu'il en est à peu près ainsi pour des accroissements du nombre égaux à l'unité; et l'on conçoit qu'il doit, *à fortiori*, en être de même pour des accroissements plus petits : nous avons d'ailleurs montré (243), que les différences secondes des logarithmes diminuent rapidement. Cette loi s'applique, du reste, à toutes les fonctions; lorsque la variable croît par degrés égaux de plus en plus petits, les différences de la fonction diminuent d'autant plus rapidement que leur ordre est plus élevé. Lors donc que, dans la construction d'une table, on apercevra que les différences d'un certain ordre deviennent sensiblement nulles, on pourra admettre qu'il en serait *à fortiori* de même pour des accroissements plus petits :

Et alors le problème de l'interpolation peut s'énoncer ainsi : *Connaissant les valeurs* $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ *d'une fonction, qui correspondent à des valeurs* $x_0, x_0+h, x_0+2h \ldots x_0+nh$, *de la variable; en admettant que, pour des accroissements égaux quelconques de* x, *les différences* $(n+1)^{mes}$ *de la fonction soient égales à zéro, trouver les valeurs de cette fonction qui correspondent à une valeur donnée de* x *comprise entre* x_0 *et* x_0+nh.

§ II. Formules d'interpolation.

246. Formule de Newton. Reprenons la formule

$$[1]\quad u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0$$

qui a été démontré (235).

Supposons que la dernière valeur de x, pour laquelle u est connu, soit représentée par x_1, de telle sorte que l'on ait :

$$x_1 = x_0 + nh,$$

et, par suite, $$n = \frac{x_1 - x_0}{h};$$

la formule [1] devient :

$$[2]\quad u_n = u_0 + \frac{x_1 - x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{\left(\frac{x_1-x_0}{h}\right)\left(\frac{x_1-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 x_0$$
$$+ \ldots + \frac{\left(\frac{x_1-x_0}{h}\right)\left(\frac{x_1-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x_1-x_0}{h}-n+1\right)}{1.2.3\ldots n}\Delta^n u_0.$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace x_1 par la lettre indéterminée x, on formera une fonction $\varphi(x)$,

$$[3]\quad \varphi(x) = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0,$$
$$+ \ldots + \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0,$$

qui, évidemment prend la valeur u_n pour $x = x_1$, c'est-à-dire pour $x = x_0 + nh$.

Je dis, de plus, que si l'on y donne à x les valeurs, $x_0, x_0 + h$, $x_0 + 2h, \ldots x_0 + (n-1)h$, $\varphi(x)$ deviendra successivement u_0, u_1, $u_2, \ldots u_{n-1}$; et, comme d'ailleurs cette fonction est un polynome du degré n; dont la différence n^{me} est constante (235), elle remplit toutes les conditions imposées par l'énoncé, et elle est, par suite, la solution du problème proposé.

Faisons, en effet, dans la fonction $\varphi(x)$,

$$x = x_0 + ph,$$

cette valeur pouvant représenter toutes les autres, si le nombre arbitraire p devient successivement $0, 1, \ldots n$.

On aura :

$$[4] \quad \varphi(x+ph) = u_0 + p\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-p+1)}{1.2\ldots p}\Delta^p u_0;$$

et les termes suivant disparaissent; car $\frac{x-x_0}{h}$ devient égal à p, et par suite, chacun des termes, à partir du $(p+1)^{me}$, contient $(p-p)$ parmi les facteurs de son numérateur. Or, le second membre de la formule [4] est (235) l'expression de u_p; et, par suite, la fonction $\varphi(x)$ devient, comme nous l'avions annoncé, égale à u_p, quand on fait $x = x_0 + ph$, et elle remplit les conditions de l'énoncé.

247. Remarque I. En écrivant, comme nous l'avons fait, la formule :

$$u_n = u + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0,$$

il faut avoir bien soin de ne pas supprimer les facteurs communs aux deux termes des derniers coefficients. Ainsi, par exemple, le coefficient de $\Delta^n u_0$ est l'unité; mais on doit l'écrire :

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}.$$

ce qui fournit, par la substitution de $\frac{x - x_0}{h}$ à n, dans le numérateur, un polynome bien différent de l'unité.

248. Remarque II. La fonction $\varphi(x)$, que nous avons trouvée (**246**), est le seul polynome en x, qui puisse résoudre le problème tel qu'il a été posé. En effet, la différence $(n+1)^{me}$ devant être nulle d'après l'une des conditions, le polynome ne peut avoir de termes de degré plus élevé que le n^{me}. Or, un tel polynome étant désigné par $\psi(x)$, et devant prendre les mêmes valeurs que $\varphi(x)$, savoir $u_0, u_1, u_2, \dots u_n$, pour $x = x_0, x_1, x_2, \dots x_n$, il faut que la différence $\varphi(x) - \psi(x)$ s'annule $(n+1)$ fois, ou en d'autres termes, que l'équation

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0,$$

admette au moins $(n+1)$ racines, $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$; ce qui exige, puisqu'elle est du degré n, que son premier membre soit identiquement nul, et que, par suite, les fonctions φ et ψ soient identiques.

249. Exemple. Nous donnerons une application de la méthode précédente. Supposons que l'on veuille obtenir le logarithme de 3,1415926536, par le moyen d'une table de logarithmes à dix décimales. On regardera les logarithmes contenus dans cette table, comme les valeurs données de la fonction u, les nombres comme celles de x, et l'on formera le tableau suivant:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
3,14	0,4969296481	0,0013809057	—0,0000043769	0,000000077	—0,0000000003
3,15	0,4983105538	0,0013765288	—0,0000043492	0,000000074	
3,16	0,4996870826	0,0013721796	—0,0000043218		
3,17	0,5010592622	0,0013678578			
3,18	0,5024277200				

La différence quatrième étant extrêmement petite, on peut considérer la différence cinquième comme nulle.

Pour appliquer la formule

$$[3]\quad u_n = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u^0 + \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u^0$$

$$+\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$

$$+\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-3\right)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0,$$

nous devons faire:

$$u_0 = 0,4969296481,$$

$$\Delta v_0 = 0,0013809057,$$

$$\Delta^2 u_0 = -0,0000043769,$$

$$\Delta^3 u_0 = 0,0000000277,$$

$$\Delta^4 u_0 = -0,0000000003;$$

et comme $h = 0,01,$

$$x_0 = 3,14,\quad x - x_0 = 0,0015926536,$$

on obtiendra:

$$\frac{x-x_0}{h} = 0,15926536,\quad \frac{\frac{x-x_0}{h}-1}{2} = -0,42036732,$$

$$\frac{\frac{(x-x_0)}{h}-2}{3} = -0,61357821,\quad \frac{\frac{x-x_0}{h}=3}{4} = -0,71018366.$$

Avec ces valeurs, il sera facile de mettre en nombres la formule [3], qui donnera:

$$u_n = \log 3,1415926536 = 0,4971498727.$$

250. Formule de Lagrange. Il existe une autre formule, qui fait connaître approximativement les valeurs d'une fonction u, lorsqu'on connaît les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$, qu'elle prend pour des valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, de la variable. Nous supposons

comme précédemment, que u soit une fonction rationnelle de x, du degré n. Soit donc :

$$u_x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \mu x^n;$$

on aura :

$$u_0 = \alpha + \beta x_0 + \gamma x_0^2 + \ldots + \mu x_0^n,$$

$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \ldots + \mu x_1^n,$$

$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2 + \ldots + \mu x_2^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = \alpha + \beta x_n + \gamma x_n^2 + \ldots + \mu x_n^n;$$

et l'on pourrait déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$, en résolvant ces équations, qui sont du premier degré ; mais on se dispense de cette résolution, en posant :

$$u_x = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \ldots + X_n u_n.$$

$X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$, sont des fonctions de x, assujetties aux conditions suivantes :

Pour $x = x_0$: $X_1, X_2, \ldots X_n$, doivent s'annuler et X_0 devenir égal à l'unité;

Pour $x = x_1$: $X_0, X_2, \ldots X_n$, doivent s'annuler, et X_1 devenir égal à l'unité;

Pour $x = x_2$: $X_0, X_1, X_3, \ldots X_n$, doivent s'annuler, et X_2 devenir égal à l'unité.

⋮

Pour $x = x_n$: $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$, doivent s'annuler et X_n devenir égal à l'unité.

Il est évident, en effet, que, d'après ces conditions, u_x deviendra égal à $u_0, u_1, \ldots u_n$ pour les valeurs $x_0, x_1 \ldots x_n$ de x.

Or, X_0 s'annulant pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots$ de x, on peut poser :

$$X_0 = A_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n);$$

et comme, pour $x=x_0$, on doit avoir $X_0=1$, on posera :

$$A_0=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)};$$

en sorte que

$$X_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)},$$

On trouvera de même :

$$X_1=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)},$$

$$X_2=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\dots(x_2-x_n)},$$

et ainsi de suite : la formule cherchée est donc :

$$u_x=u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}+u_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$+\dots+u_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

§ III. Application de la méthode d'interpolation à la représentation exacte d'une fonction entière $f(x)$, du degré m, dont on connaît les valeurs u_0, u_1, u_2,... u_m, correspondantes aux valeurs de x_0, x_0+h,...x_0+mh de la variable.

251. Représentation d'une fonction entière. La formule d'interpolation [3], démontrée (**246**), a pour but de former une fonction entière, de degré m, qui, pour les valeurs x_0, x_0+h, $\dots x_0+mh$ de x, prenne les valeurs $u_0, u_1,\dots u_m$. Or, deux fonctions entières, de degré m, ne peuvent être égales pour $(m+1)$ valeurs de la variable, sans être complétement identiques; car, sans cela, en les égalant, on formerait une équation, de degré m, admettant $(m+1)$ racines. La fonction $f(x)$, indiquée dans

l'énoncé, est donc identique à la formule fournie par la méthode d'interpolation; et l'on a :

$$[A] \quad f(x)=u_0+\frac{(x-x_0)}{h}\Delta u_0+\frac{\frac{(x-x_0)}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots$$

$$+\frac{\frac{(x-x_0)}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)}{1.2\ldots m}\Delta^m u_0.$$

252. Limites des racines d'une équation $f(x)=0$. On conclut de cette formule que, si les quantités u_0, $\Delta u_0\ldots\ \Delta^m u_0$, sont positives, en donnant à x une valeur telle que $\frac{x-x_0}{h}$, $\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right),\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)$ soient des quantités positives, c'est-à-dire en faisant x plus grand que $x_0+(m-1)h$, $f(x)$ sera positif. On peut même ajouter qu'à partir de la valeur $x=x_0+(m-1)h$, tous les termes qui composent le second membre de la formule [A] augmentent avec x, et que, par suite, il en est de même de $f(x)$. Il résulte évidemment de là que $x_0+(m-1)h$ est une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x)=0$; et les solutions de l'équation doivent être cherchées parmi les nombres inférieurs à cette limite.

De même, si l'on donne à x une valeur x_0 telle que les quantités u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0,\ldots\ \Delta^m u_0$ soient alternativement positives et négatives, x_0 est une limite inférieure des racines : car, pour toute valeur de x inférieure à x_0, chacun des termes de $f(x)$ devenant positif, $f(x)$ ne peut plus devenir nulle.

RÉSUMÉ.

245. But de l'interpolation : Condition arbitraire que l'on s'impose. — 246. Formule d'interpolation de Newton, applicable à une fonction dont on connaît les valeurs pour des valeurs équidistantes de la variable. — 247. Remarque. — 248. La fonction trouvée est le seul polynome, entier en x, qui puisse satisfaire aux conditions demandées. — 249. Application à un exemple. — 250. Formule d'interpolation de Lagrange. — 251. Application de la méthode d'interpolation

à la représentation exacte d'une fonction entière, de degré m, dont on connaît les valeurs correspondant à $(m+1)$ valeurs équidistantes de la variable. — 282. Limites des racines d'une équation $f(x)=0$.

EXERCICES.

I. On a observé une planète, et les ascensions droites ont été trouvées.

Le 12 janvier	$12^h\ 30'$	$0^s\ 3'\ 25'',21$,
19 janvier	$9^h\ 0'$	$0^s\ 1'\ 28'',04$,
20 janvier	$9^h\ 17'$	$0^s\ 2'\ 26'',67$,
24 janvier	$8^h\ 1'$	$-0^s\ 0'\ 58'',3$.

Trouver, par interpolation, l'ascension droite du 22 janvier à midi.

II. Les données restant les mêmes, trouver le jour et l'heure pour lesquels l'ascension droite a été nulle.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

§ I. Séparation des racines.

253. Opérations préliminaires. Pour résoudre une équation numérique, il convient d'appliquer d'abord la méthode des racines commensurables, et de supprimer les facteurs qui correspondent à ces racines. On doit ensuite appliquer à l'équation la méthode exposée au livre III, chapitre III, pour la décomposer, s'il y a lieu, en plusieurs autres qui n'aient plus que des racines simples. La première de ces opérations n'a d'autre but que de rendre les calculs plus simples. La seconde est indispensable; elle nous permettra d'affirmer, dans ce qui va suivre, que, s'il existe une racine a, deux nombres $(a-h)$, $(a+h')$, qui la comprennent, étant substitués dans l'équation, doivent donner des résultats de signes contraires, quand h et h' sont suffisamment petits. Il suffit évidemment pour cela qu'il n'y ait aucune racine, autre que a, comprise entre $(a-h)$ et $(a+h')$.

Enfin, avant de commencer l'application de la méthode de recherche que nous allons exposer, il sera bon de fixer, par l'application des règles démontrées (**208** et suiv.), une limite supérieure des racines positives et une limite inférieure des racines négatives que peut avoir l'équation proposée.

254. Substitution de nombres entiers consécutifs. Après avoir exécuté les opérations préliminaires dont nous venons de parler, et dont, je le répète, celle qui est relative aux racines égales est seule indispensable, on substituera, dans le premier membre de l'équation proposée, les nombres entiers consécutifs: $-\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\ldots$, compris entre les limites des racines. Cette substitution se fera, comme il a été expliqué (**239**), par la méthode des différences: c'est-à-dire que l'on calculera directement un nombre de valeurs consécutives égales au degré m de l'équation, et l'on en déduira leurs différences jusqu'à celle de l'ordre $(m-1)$. Puis, en se fondant sur ce que la différence de l'ordre m est constante on

pourra calculer, par de simples additions ou soustractions, les valeurs des différences successives, et par suite celles du premier membre, correspondantes aux autres valeurs de la variable. Il résulte de la loi même qui préside à la formation de ce tableau, qu'en faisant croître x, on arrivera à rendre la fonction et ses différences toutes positives; et qu'en donnant à x des valeurs décroissantes, on finira par rendre la fonction et toutes ses différences alternativement positives et négatives. On s'arrêtera, dans les deux sens, lorsque ces conditions se trouveront réalisées; car aucune substitution ultérieure de nombres entier ne pourra, évidemment, modifier les signes.

Si les résultats de la substitution des nombres entiers dans le premier membre ne sont pas tous de même signe, il arrivera, une ou plusieurs fois, que deux résultats consécutifs soient de signes contraires; et nous pourrons affirmer, qu'entre les nombres entiers correspondants il existe une racine ou un nombre impair de racines.

Si le nombre des intervalles, dans lesquels l'existence des racines réelles devient ainsi manifeste, est précisément égal au nombre des racines que le théorème de Descartes permet de supposer, les racines *sont séparées*; c'est-à-dire que l'on est assuré d'avoir, pour chacune d'elles, deux nombres qui la comprennent et qui n'en comprennent pas d'autres.

Mais il s'arrive, au contraire, que le nombre de ces intervalles soit moindre que le nombre des racines possibles; et, en particulier, si les nombres entiers, substitués dans le premier membre, donnent tous des résultats de mêmes signes, on doit rester dans le doute, et recourir à de nouvelles substitutions. Mais ces substitutions ne doivent être faites que dans des intervalles choisis, où elles présentent quelque chance de succès. Voici comment on déterminera ces intervalles.

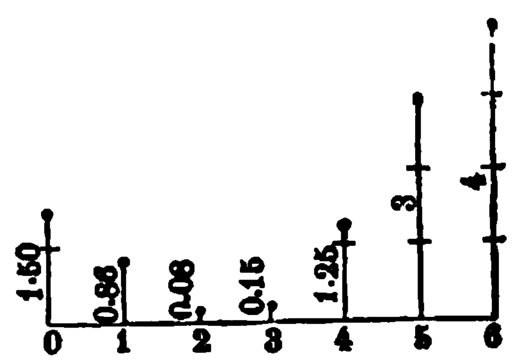
255. Choix des intervalles dans lesquels on doit faire de nouvelles substitutions. Après avoir obtenu les résultats de la substitution des nombres entiers dans le premier membre de l'équation proposée, on portera sur une ligne droite, à partir d'une origine 0, des longueurs proportionnelles aux valeurs 1, 2, 3,..., attribuées à l'inconnue x, et, en sens opposé, des longueurs destinées à représenter les valeurs négatives -1, -2,

— 3,...; puis, par l'extrémité de chacune de ces longueurs, on élèvera (sans y apporter *aucune* précision) une perpendiculaire représentant la valeur correspondante du premier membre de l'équation proposée, cette perpendiculaire étant portée dans un sens ou dans l'autre, suivant que la valeur est positive ou négative. Il est évident que, si l'on procédait de la même manière, non plus seulement pour les valeurs entières, mais pour toutes les valeurs possibles de x, le lieu des extrémités des perpendiculaires serait une courbe; et les intersections de cette courbe avec la droite, sur laquelle on porte les x, ferait connaître les racines; car elles correspondraient à la valeur de x pour laquelle, le premier membre de l'équation s'annulant, il faut porter une perpendiculaire nulle au-dessus de l'axe. Les valeurs particulières du premier membre, que nous avons obtenues, font connaître des points de cette courbe, et permettent de se faire *à peu près* une idée de sa forme, et d'en conclure, par conséquent, les intervalles dans lesquels l'existence des racines est probable, et où il convient de les chercher par des substitutions nouvelles.

Si, par exemple, en substituant à x les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, on trouve pour le premier membre d'une équation, les valeurs

1,50, | 0,86, | 0,08, | 0,15, | 1,25, | 3, | 4,

les points correspondants, qu'il faudra construire, sont placés à peu près comme il suit:



Et l'on conçoit que, si la courbe qui les réunit coupe l'axe des x, ce doit être entre les points 2 et 3. Cependant *nous ne sommes nullement en droit d'affirmer* que, dans les autres intervalles, il n'y ait pas de racines; il pourrait même, à la rigueur, en exister entre 5 et 6 (intervalle où l'inspection des résultats précédents n'en ferait certainement pas présumer). Il suffirait

que la courbe inconnue, qui réunit nos différents points, fût suffisamment contournée.

256. Théorème. Il existe cependant un théorème, qui assigne une limite aux irrégularités que peuvent présenter les courbes analogues à celles dont il vient d'être question.

Si l'équation proposée est de degré m, *une parallèle à la ligne, sur laquelle on porte les valeurs de* x, *ne peut, dans aucun cas, rencontrer la courbe en plus de* m *points.*

Soit, en effet, d la distance de cette parallèle à la ligne des x; elle rencontrera la courbe précisément aux points qui correspondent aux valeurs de x, pour lesquelles le premier membre est égal à d. Or, en égalant le premier membre à un nombre donné, on obtient une équation de degré m, qui ne peut avoir plus de m racines. J'ajoute que souvent l'application du théorème de Descartes à cette équation donnera une limite plus petite encore.

Si l'on revient à l'exemple proposé dans le chapitre précédent, on voit que l'existence d'une racine, comprise entre 5 et 6, exigerait que la courbe pût être coupée entre quatre points au moins par une parallèle à la ligne des x, et que, par suite, l'équation, obtenue en égalant le premier membre à un nombre d, pût avoir quatre racines positives.

257. Substitution de nombres équidistants d'un dixième. Lorsque l'inspection des résultats obtenus aura indiqué les intervalles, dans lesquels on présume l'existence des racines, on devra substituer, dans ces intervalles, des nombres équidistants d'un dixième; et il arrivera, le plus souvent, que ces substitutions montreront assez nettement la forme de la courbe, pour qu'on aperçoive avec certitude les limites qui comprennent les racines, ou que l'on acquière la conviction qu'il n'en existe pas. Nous n'avons rien à ajouter sur la manière de tirer parti de ces résultats nouveaux : il faudrait répéter, mot pour mot, ce que nous avons dit au sujet de la substitution des nombres entiers.

Pour calculer les résultats de la substitution des nombres, de dixièmes en dixièmes, il faudra procéder comme pour celle

des nombres entiers : calculer d'abord un nombre de résultats consécutifs égal au degré de l'équation, former les différences qui en résultent, et chercher ensuite les valeurs suivantes par de simples additions.

§ II. Étude spéciale du cas où l'équation est du troisième degré.

258. Simplification relative a cette équation. Soit un polynome du troisième degré

$$\varphi(x)=x^3+px^2+qx+r.$$

Supposons que l'on ait substitué des nombres équidistants dont la différence soit h; on connaît la valeur de la fonction $\varphi(x)$ pour une certaine valeur $x=x_0$ de la variable, et l'on a formé, de plus, $\Delta\varphi(x_0)$, $\Delta^2\varphi(x_0)$, $\Delta^3\varphi(x_0)$. Nous allons donner un moyen simple de calculer les différences qui correspondraient à un accroissement dix fois moindre, et que nous représenterons par $\delta\varphi(x_0)$, $\delta^2\varphi(x_0)$, $\delta^3\varphi(x_0)$. On a :

$$[1]\ \Delta\varphi(x_0)=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=h\varphi'_0(x_0)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_0)+\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x_0).$$

Pour former $\Delta^2\varphi(x_0)$, il faut prendre *la différence* du second membre, c'est-à-dire son accroissement quand on y change x_0 en (x_0+h); on aura

$$\Delta^2\varphi(x_0)=h[\varphi'(x_0+h)-\varphi'(x_0)]+\frac{h^2}{1.2}[\varphi''(x_0+h)-\varphi''(x_0)]$$
$$+\frac{h^3}{1.2.3}[\varphi'''(x_0+h)-\varphi'''(x_0)];$$

or, $\varphi'(x_0)$ est du second degré, $\varphi''(x_0)$ du premier et $\varphi'''(x_0)$ est constant; on a donc :

$$\varphi'(x_0+h)-\varphi'(x_0)=h\varphi''(x_0)+\frac{h^2}{1.2}\varphi'''(x_0),$$

$$\varphi''(x_0+h)-\varphi''(x_0)=h\varphi'''(x_0),$$

$$\varphi'''(x_0+h)-\varphi'''(x_0)=0;$$

donc, en substituant, il vient :

$$[2]\qquad \Delta^2\varphi(x_0)=h^2\varphi''(x_0)+h^3\varphi'''(x_0).$$

On trouvera de même :

$$\Delta^3\varphi(x_0)=h^2[\varphi''(x_0+h)-\varphi''(x_0)]+h^3[\varphi'''(x_0+h)-\varphi'''(x_0)];$$

ou, d'après ce qui précède,

$$[3] \qquad \Delta^3\varphi(x_0)=h^3\varphi'''(x_0).$$

Ainsi donc :

$$[1] \qquad \Delta\varphi(x_0)=h\varphi'(x_0)+\frac{h^2}{2}\varphi''(x_0)+\frac{h^3}{6}\varphi'''(x_0),$$

$$[2] \qquad \Delta^2\varphi(x_0)=h^2\varphi''(x_0)+h^3\varphi'''(x_0),$$

$$[3] \qquad \Delta^3\varphi(x_0)=h^3\varphi'''(x_0).$$

Si, dans ces formules, on remplace h par $\frac{h}{10}$, on aura :

$$[4] \qquad \delta\varphi(x_0)=\frac{h}{10}\varphi'(x_0)+\frac{h^2}{200}\varphi''(x_0)+\frac{h^3}{6000}\varphi'''(x_0),$$

$$[5] \qquad \delta^2\varphi(x_0)=\frac{h^2}{100}\varphi''(x_0)+\frac{h^3}{1000}\varphi'''(x_0),$$

$$[6] \qquad \delta^3\varphi(x_0)=\frac{h^3}{1000}\varphi'''(x_0).$$

A l'inspection de ces formules, on voit que, connaissant les valeurs des différences Δ, on formera immédiatement $\delta^3\varphi(x_0)$, qui est la millième partie de $\Delta^3\varphi(x_0)$. $\delta^2\varphi(x_0)$ se compose de deux termes dont le second est précisément $\delta^3\varphi(x_0)$ que l'on vient de former, et le premier est la centième partie de la différence $\Delta^2\varphi(x_0)-\Delta^3\varphi(x_0)$, c'est-à-dire de la différence qui précède $\Delta^2\varphi(x_0)$ dans la série des Δ^2. Enfin $\delta\varphi(x_0)$ se compose de trois termes; les deux derniers sont connus. L'un est la sixième partie de $\delta^3\varphi(x_0)$; l'autre est la moitié de $\frac{h^2}{100}\varphi''(x_0)$, c'est-à-dire d'un terme déjà calculé pour former δ^2. Quant au troisième terme $\frac{h}{10}\varphi'(x_0)$, on remarquera qu'il est la dixième partie de $h\varphi'(x_0)$, et que l'on a :

$$h\varphi'(x_0)=\Delta\varphi(x_0)-\frac{h^2}{2}\varphi''(x_0)-\frac{h^3}{6}\varphi'''(x_0).$$

Le second membre se compose de trois termes connus, et on le calculera facilement.

En résumé :

$\delta^3\varphi(x_0)$ est la millième partie de $\Delta^3\varphi(x_0)$;

$\Delta^2\varphi(x_0)$ est la somme de $\delta^2\varphi(x_0)$ et de la centième partie du terme qui précède $\Delta^2\varphi(x_0)$ dans la série des Δ^2;

$\delta\varphi(x_0)$ se compose de la sixième partie de $\delta^3\varphi(x_0)$, de la moitié du terme calculé pour obtenir $\delta^2\varphi(x_0)$ et de la dixième partie de l'expression

$$\Delta\varphi(x_0) - \frac{h^2}{2}\varphi''(x_0) - \frac{h^3}{6}\varphi'''(x_0),$$

dont les trois termes sont connus.

259. Application de la méthode précédente. Considérons l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

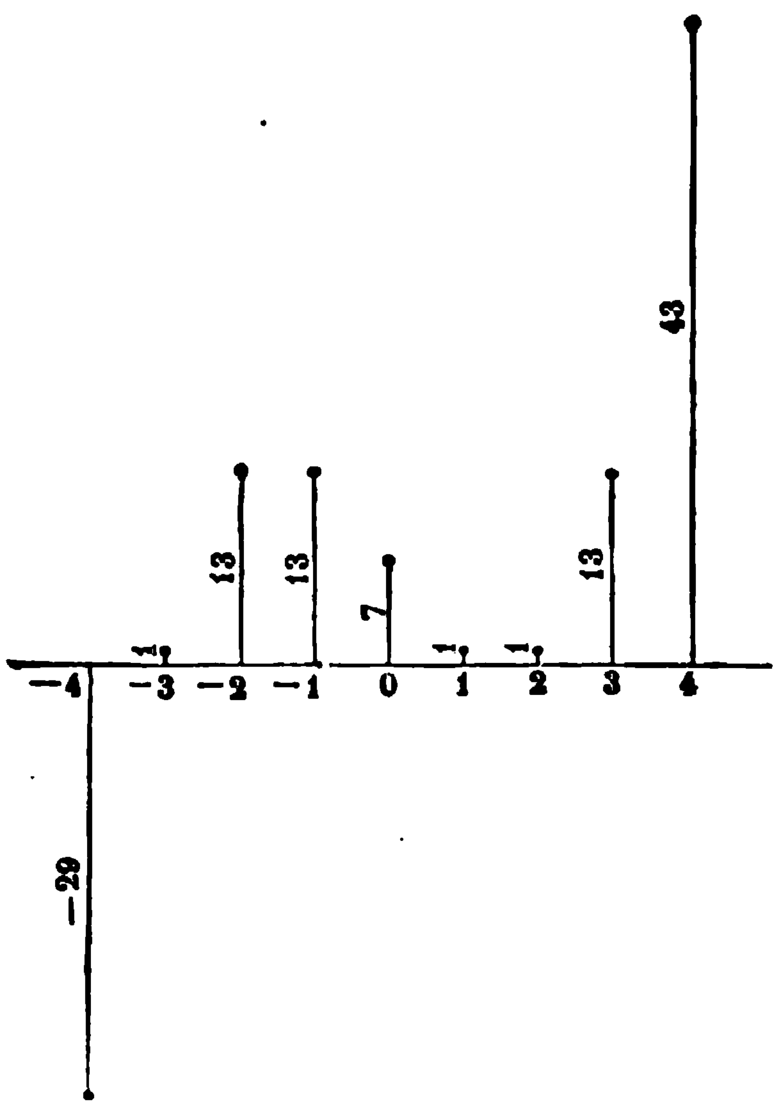
Si nous substituons à x les valeurs -1, 0, $+1$, nous trouvons, pour le premier membre, les valeurs correspondantes 13, 7, 1, dont les différences premières sont -6, -6, et la différence seconde 0. Quant à la différence troisième, on sait (**236**) qu'elle est égale à 6. Nous formerons donc le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
				6
				6
-1	13	-6	0	6
0	7	-6		6
1	1			6
				6

nous en déduirons, par des additions successives, la table des valeurs de $\Delta^2 y$, Δy, y, que j'inscris dans un nouveau tableau, afin que l'on aperçoive mieux, dans le précédent, les résultats qui servent de base à tous les autres.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-4	-29	30	-18	6
-3	1	12	-12	6
-2	13	0	-6	6
-1	13	-6	0	6
0	7	-6	6	6
1	1	0	12	6
2	1	12	18	
3	13	30		
4	43			
5				

A l'inspection des valeurs de y, on voit qu'il existe une racine négative comprise entre -3 et -4; et, comme la règle de Descartes apprend qu'il n'en existe qu'une, il n'y a pas lieu d'en chercher d'autres.



Quant aux racines positives, il peut en exister deux; mais pour les découvrir, nous devons recourir à de nouvelles substitutions. Si nous représentons graphiquement les résultats obtenus, nous obtenons la figure ci-contre.

La courbe, qui réunit ces points, ne devant être coupée qu'en trois points par une parallèle à la ligne des x, ne peut évidemment couper cette ligne qu'entre les points 1 et 2; c'est donc entre $x=1$ et $x=2$, que nous devons substituer des valeurs distantes de 0,1.

Nous savons que, pour $x=1$, le premier nombre, que nous désignons par y, est lui-même égal à 1; on a, de plus, pour des

accroissements de x égaux à l'unité, $\Delta y = 0$, $\Delta^2 y = 12$, $\Delta^3 y = 6$. L'accroissement devenant égal à $\frac{1}{10}$, nous trouverons (258) :

$$\delta^3 y = 0{,}006, \quad \delta^2 y = 0{,}066, \quad \delta y = -0{,}369;$$

et nous pourrons, d'après ces valeurs, former le tableau suivant :

x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
1	1	−0,369	0,066	0,006
1,1	0,631	−0,303	0,072	0,006
1,2	0,328	−0,231	0,078	0,006
1,3	0,097	−0,153	0,084	0,006
1,4	−0,056	−0,069	0,090	0,006
1,5	−0,125	0,021	0,096	0,006
1,6	−0,104	0,117	0,102	0,006
1,7	+0,013	0,219	0,108	0,006
1,8	0,232	0,327	0,114	
1,9	0,559	0,441		
2	1			

On voit, à l'inspection de ce tableau, que y change de signe, quand x passe de la valeur 1,3 à la valeur 1,4 et de la valeur 1,6 à 1,7. Il y a donc deux racines positives, dont les valeurs, à un dixième près, sont 1,3 et 1,6.

260. Calcul des racines a moins de 0,01. Pour obtenir une plus grande approximation, il faudra substituer à x des valeurs distantes de 0,01, entre 1,3 et 1,4, et entre 1,6 et 1,7. Ces substitutions se feront, comme les précédentes, au moyen des différences. On commencera par remarquer que, pour $x = 1{,}3$, on a $y = 0{,}097$; à partir de cette valeur, les différences relatives à un accroissement de x égal à 0,1, sont, comme on le voit par le tableau précédent :

$$y = 0{,}097, \quad \Delta y = -0{,}153, \quad \Delta^2 y = 0{,}084, \quad \Delta^3 y = 0{,}006.$$

Pour en déduire les valeurs des différences relatives à un ac-

croissement de x égal à 0,01, nous appliquerons les formules données plus haut; et nous trouverons :

$$\delta^3\varphi(x_0) = \tfrac{1}{1000} \times \Delta^3\varphi(x_0) = 0{,}000006,$$
$$\delta^2\varphi(x_0) = 0{,}000006 + \tfrac{1}{100} \times 0{,}078 = 0{,}000786,$$
$$\delta\varphi(x_0) = 0{,}000001 + 0{,}00039 + \tfrac{1}{10}(-0{,}153 - 0{,}039 - 0{,}001)$$
$$= 0{,}018909;$$

et, comme on a, d'ailleurs, pour $x = 1{,}3$, $y = 0{,}097$, on peut former le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,3	0,097000	−0,018909	0,000786	0,000006
1,31	0,078091	−0,018123	0,000792	id.
1,32	0,059968	−0,017331	0,000798	id.
1,33	0,042637	−0,016533	0,000804	id.
1,34	0,026104	−0,015729	0,000810	id.
1,35	0,010375	−0,014919	0,000816	id.
1,36	−0,004544	−0,014103	0,000822	id.
1,37	−0,018647	−0,013281	0,000828	id.
1,38	−0,031928	−0,012453	0,000834	
1,39	−0,044381	−0,011619		
1,4	−0,056000			

On calculera, au moyen des mêmes formules, les valeurs de Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, qui correspondent à des accroissements de x égaux à 0,01, à partir de la valeur $x = 1{,}6$; et l'on formera le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,6	−0,104000	0,007281	0,000966	0,000006
1,61	−0,096719	0,008247	0,000972	id.
1,62	−0,088472	0,009219	0,000978	id.
1,63	−0,079253	0,010197	0,000984	id.
1,64	−0,069056	0,011181	0,000990	id.
1,65	−0,057875	0,012171	0,000996	id.
1,66	−0,045704	0,013167	0,001002	id.
1,67	−0,032537	0,014169	0,001008	id.
1,68	−0,018368	0,015177	0,001014	
1,69	−0,003191	0,016191		
1,7	+0,013000			

On voit, d'après ces tableaux, que les deux racines sont comprises, l'une entre 1,35 et 1,36, l'autre entre 1,69 et 1,70. Pour calculer la plus grande, à un millième près, il faut substituer, entre 1,69 et 1,70, des valeurs distantes d'un millième. Ces valeurs, calculées par le même procédé que les précédentes, résultent du tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,69	−0,003191000	0,001573371	0,000010146	0,000000006
1,691	−0,001617629	0,001583517	0,000010152	id.
1,692	−0,000034112	0,001593669	0,000010158	id.
1,693	+0,001559557	0,001603827	0,000010164	id.
1,694	0,003163384	0,001613991	0,000010170	id.
1,695	0,004777375	0,001624161	0,000010176	id.
1,696	0,006401536	0,001634337	0,000010182	id.
1,697	0,008035873	0,001644519	0,000010188	id.
1,698	0,009680392	0,001654707	0,000010194	
1,699	0,011335099	0,001664901		
1,70	0,013000000			

On voit que y change de signe, lorsque x passe de la valeur 1,692 à 1,693. La racine est donc, à un millième près, égale à 1,692.

261. Emploi d'une proportion pour obtenir la racine. Les tableaux précédents permettent de pousser l'approximation plus loin encore. Remarquons en effet, que, dans le dernier de ces tableaux, la différence seconde est extrêmement petite. On peut donc, *sans erreur sensible*, la considérer comme nulle, et admettre, par suite, que les accroissements de y soient proportionnels à ceux de x. Nous pourrons alors obtenir la valeur de x, pour laquelle y est nul, en procédant comme on le fait dans l'emploi des tables de logarithmes. Nous dirons :

Lorsque x augmente de 0,001, et passe de la valeur 1,692 à la valeur 1,693, la variation de y est 0,001593669. Pour que la variation de y soit 0,000034112, c'est-à-dire pour que y devienne zéro, il faut donc que la variation δ de x satisfasse la proportion

$$\frac{\delta}{0{,}001}=\frac{0{,}000034112}{0{,}001593669},$$

d'où l'on déduit :

$$\delta=\frac{0{,}000000034112}{0{,}001593669}=0{,}0000214$$

en sorte que la racine est égale, approximativement, à 1,6920214.

On doit observer que la différence seconde, que nous avons considérée comme nulle, étant, en réalité, un peu plus grande que 0,00001, peut influer sur le septième des chiffres décimaux; et il n'y a, par conséquent, aucune raison pour le considérer comme exact.

On doit donc considérer la racine comme égale à 1,692021.

262. Autre application. Dans l'exemple précédent, la détermination des intervalles, dans lesquels il convenait d'effectuer de nouvelles substitutions, n'a présenté aucune difficulté. Malheureusement il n'en est pas toujours ainsi. Nous en citerons un exemple.

$$y = 9x^3 - 24x^2 + 16x - 0,001 = 0.$$

Si nous substituons à x les valeurs -1, 0, 1, nous trouvons pour valeurs correspondantes de y, $-49,001$, $-0,001$, 0,999, dont les différences sont 49, 1, et la différence seconde -48. Quant à la différence troisième, elle est (236) égale à 54.

Nous pouvons, d'après cela, former le tableau suivant:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	$-49,001$	49	-48	54
0	$-\ 0,001$	1	6	54
1	$+\ 0,999$	7	60	54
2	7,999	67	114	
3	74,999	181		
4	255,999			

si l'on représente ces valeurs graphiquement, ainsi qu'on l'a indiqué (255), on voit clairement qu'il existe une racine entre $x = 0$ et $x = 1$; mais rien ne fait pressentir qu'il y en ait d'autres, et ne porte à essayer de nouvelles substitutions. Si, cependant, on substitue les valeurs distantes de 0,1 entre $x = 1$ et $x = 2$, on trouve que les valeurs des différences, relatives à $x = 1$ et à un accroissement de x égal à 0,1, sont $\Delta y = -0,461$, $\Delta^2 y = 0,114$, $\Delta^3 y = 0,054$; ce qui permet de former le tableau suivant:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	0,999	−0,461	0,114	0,054
1,1	0,538	—0,347	0,168	id.
1,2	0,191	—0,179	0,222	id.
1,3	0,012	+0,043	0,276	id.
1,4	0,055	0,319	0,330	id.
1,5	0,374	0,649	0,384	id.
1,6	1,023	1,033	0,438	id.
1,7	2,056	1,471	0,492	id.
1,8	3,527	1,963	0,546	
1,9	5,490	2,509		
2	7,999			

En représentant graphiquement les résultats qui y sont contenus, l'on voit clairement que la courbe, qui passe par les points obtenus, ne peut couper la ligne des x qu'entre le point 1,3 et le point 1,4. Substituons donc, entre ces deux valeurs, des valeurs de x distantes de 0,01 : ces valeurs se calculeront, comme les précédentes, en formant d'abord, par les formules (258), les valeurs de Δy, $\Delta^2 y$, et $\Delta^3 y$ qui correspondent à $x = 1,3$, et à des accroissements de la variable égaux à 0,01 : nous formerons ainsi le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,3	+0,012000	−0,006501	0,002274	0,000054
1,31	+0,005419	—0,004307	0,002328	id.
1,32	+0,001112	—0,001979	0,002382	id.
1,33	—0,000867	+0,000403	0,002436	id.
1,34	−0,000464	0,002839	0,002490	id.
1,35	+0,002375	0,005329	0,002544	id.
1,36	+0,007704	0,007873	0,002598	id.
1,37	+0,015577	0,010471	0,002652	id.
1,38	+0,026048	0,013123	0,002706	
1,39	+0,039171	0,015829		
1,4	+0,055000			

Ce tableau prouve que l'une des racines est comprise entre 1,32 et 1,33, l'autre entre 1,34 et 1,35.

§ III. Méthode de Newton.

263. Exposé de la méthode. Lorsque l'on considère une fonction dans un intervalle très-peu considérable, on peut presque toujours, sans erreur sensible, regarder ses accroissements comme proportionnels à ceux de la variable, et les représenter par le produit de la dérivée de la fonction par l'accroissement même de la variable. L'erreur, commise dans cette substitution, sera d'autant moindre, que l'on prendra des accroissements plus petits. Cette remarque s'applique à toutes les fonctions, mais nous la développerons seulement ici sur les fonctions algébriques entières, pour l'appliquer à la résolution des équations considérées dans ce chapitre.

Soient

$$[1] \qquad F(x)=0,$$

une équation algébrique, et a une valeur approchée d'une racine, dont nous désignerons par $(a+h)$ la valeur exacte; on aura évidemment :

$$[2] \qquad F(a+h)=0,$$

ou

$$[3] \quad F(a)+F'(a)h+F''(a)\frac{h^2}{1.2}+\ldots+F^m(a)\frac{h^m}{1.2\ldots.m}=0$$

or, en négligeant les termes qui contiennent h à une puissance plus élevée que la première, on a, avec une approximation d'autant plus grande que h est plus petit :

$$F(a+h)=F(a)+F'(a)h;$$

l'équation [3] devient donc :

$$F(a)+F'(a)h=0;$$

et l'on en déduit : $h=-\dfrac{F(a)}{F'(a)}$;

la valeur approchée de la racine est, par conséquent :

$$a-\frac{F(a)}{F'(a)}.$$

En désignant cette valeur par b, et appliquant de nouveau le même procédé, on trouvera une valeur plus approchée encore

$$b-\frac{F(b)}{F'(b)};$$

et, en répétant cette opération plusieurs fois de suite, on obtiendra rapidement une très-grande approximation.

Il est impossible d'indiquer, d'une manière générale, et indépendamment de tout exemple particulier, la rapidité avec laquelle croissent les approximations; mais, dans chaque cas, on s'en forme facilement une idée en procédant comme nous allons le faire dans l'exemple suivant.

264. Application. Exemple I. Reprenons l'équation (**259**) :

$$F(x)=x^3-7x+7=0;$$

nous avons trouvé que l'une de ses racines est, à 0,001 près, égale à 1,692; si nous la désignons par $1,692+h$, ou, pour abréger par $(a+h)$, h sera plus petit que 0,001; et nous aurons :

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{1.2}F''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(a)=0;$$

par suite :

$$h=-\frac{F(a)}{F'(a)}-\frac{h^2}{1.2}\frac{F''(a)}{F'(a)}-\frac{h^3}{1.2.3}\frac{F'''(a)}{F'(a)}.$$

Or, pour $a=1,692$, les coefficients de h^2 et de h^3 sont, l'un plus petit que 3,2, l'autre moindre que l'unité; en sorte que le second et le troisième terme du second membre sont moindres, l'un que 0,0000032, l'autre que 0,000000001: nous avons donc, à *4 millionièmes près*,

$$h=-\frac{F(a)}{F'(a)}.$$

Or on a, d'après le tableau (**260**), pour $x=1,692=a$:

$$F(a)=-0,000034112;$$

d'ailleurs $$F'(a)=3a^2-7=+1,588592;$$

donc $$h=\frac{0,000034112}{0,588592}=0,000021473.$$

Mais, d'après le résultat que nous venons d'obtenir, la valeur $x=1,692$ était exacte, non-seulement jusqu'à 0,001, mais encore à 0,0001 près, puisque la quatrième décimale est un zéro; de plus, d'après le même résultat, pour $x=1,6920$, l'erreur h est moindre que 0,000025, ou $\frac{1}{40000}$; donc, le nombre obtenu est approché à moins de $\frac{1}{10^8}$; et la valeur de x est, avec 8 décimales,

$$x=1,6920\,2147.$$

Nous avons donc une nouvelle valeur approchée de la racine

$$1,6920\,2147=b;$$

représentons sa valeur exacte par

$$1,6920\,2147+h'=b+h';$$

nous aurons :

$$0=F(b+h')=F(b)+h'F'(b)+\frac{h'^2}{2}.F''(b)+\frac{h'^3}{2.3}F'''(b);$$

d'où
$$h'=-\frac{F(b)}{F'(b)}-\frac{h'^2}{2}.\frac{F''(b)}{F'(b)}-\frac{h'^3}{2.3}\frac{F'''(b)}{F'(b)}.$$

Or h' est plus petit que $\frac{1}{10^8}$; par suite, h'^2 est moindre que $\frac{1}{10^{16}}$; son coefficient, d'ailleurs, est moindre que 3,2. D'un autre côté, h'^3 est plus petit que $\frac{1}{10^{24}}$, et son coefficient est moindre que l'unité. Donc si l'on prend

$$h'=-\frac{F(b}{F'(b)},$$

l'erreur commise sera de l'ordre $\frac{1}{10^{15}}$. Cet exemple suffit pour donner une idée de la rapidité des approximations, et pour montrer comment on doit l'apprécier dans chaque cas.

265. Exemple II. Soit donnée l'équation :

$$F(x)=x^3-2x-5=0.$$

La première dérivée sera

$$F'(x)=3x^2-2;$$

et, par suite, le terme de correction :

$$h=-\frac{F(x)}{F'(x)}=-\frac{x^3-2x-5}{3x^2-2}.$$

Première approximation. On trouve immédiatement, que la racine réelle de l'équation est comprise entre 2,0 et 2,1.

Posons donc $a=2,1$; et partons de cette valeur pour trouver la racine x avec plus d'exactitude. En remplaçant x par 2,1, dans les fonctions $F(x)$ et $F'(x)$, nous aurons :

$$F(a)=0,061$$

et $$F'(a)=11,23;$$

donc $$h=-\frac{0,061}{11,23}=-0,0543,$$

et, par suite, $$b=2,095.$$

Deuxième approximation. Partant de cette nouvelle valeur approchée de la racine, nous aurons d'abord :

$$b=2,095,$$

$$b^2=4,389,$$

$$b^3=9,195;$$

donc $$F(b)=0,005 \quad \text{et} \quad F'(b)=11,167;$$

$$h_1=-\frac{0,005}{11,167}=-0,000\,448$$

et $$c=b+h_1=2,094\,552.$$

L'erreur h_1 étant moindre que $\frac{1}{10^3}$, et les coefficients de h_1^2

et h_1^3 étant, le premier environ $\frac{1}{2}$, le second $\frac{1}{11}$, il s'ensuit que l'erreur de la nouvelle valeur de x sera plus petite que $\frac{1}{10^6}$.

Troisième approximation. Posons maintenant $x = 2{,}094\,552$; comme l'erreur de c est moindre que $\frac{1}{10^6}$, et que, de plus, les coefficients de h_1^2 et de h_1^3 restent à très-peu près les mêmes, nous pourrons compter sur une approximation de $\frac{1}{10^{12}}$.

On a d'abord :

$$c^2 = 4{,}387148\ 080704,$$

$$c^3 = 9{,}189109\ 786734;$$

donc
$$F(c) = 0{,}000005\ 786734,$$

et
$$F'(c) = 11{,}161444\ 242112,$$
ce qui donne :

$$h_2 = -\frac{F(c)}{F'(c)} = -\frac{0{,}000005\ 786734}{11{,}161444...} = -0{,}000000\ 518458,$$

et
$$d = c + h_2 = 2{,}094551\ 481542,$$

exacte à moins de $\frac{1}{10^{12}}$.

Quatrième approximation. Pour pousser encore plus loin l'approximation de la racine, posons :

$$x = 2{,}094551\ 481542;$$

nous aurons, pour les puissances de x ou de d:

$$d^2 = 4{,}387145\ 908829\ 787166\ 697764,$$

et
$$d^3 = 9{,}189102\ 963080\ 354769\ 507339;$$

et, par conséquent,

$$F(d) = -0{,}000000\ 000003\ 645230\ 492661,$$

$$F'(d) = 11{,}161437\ 726489\ 3615....$$

Donc, la valeur de h_3 sera :

$$h_3 = -\frac{F(d)}{F'(d)} = +\frac{0{,}0\ldots3\ 645230\ 492661}{11{,}161437\ 726489\ 36\ldots}.$$

ou $$h_3 = +0{,}000000\ 000000\ 326591\ 482386:$$

on a donc pour la nouvelle valeur :

$$x = 2{,}094551\ 481542\ 326591\ 482386,$$

valeur exacte à moins de $\frac{1}{10^{24}}$. Un nouveau calcul donnerait la racine, à moins de $\frac{1}{10^{48}}$.

266. Représentation graphique de la méthode de Newton. La méthode d'approximation, que nous venons d'exposer, peut se représenter graphiquement d'une manière très-simple, que nous croyons devoir indiquer ici, quoiqu'elle exige des notions de géométrie analytique.

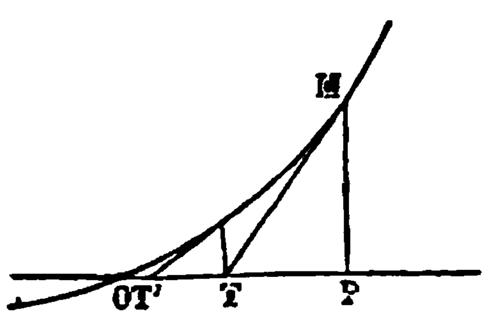
La recherche des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ revient à celle des points où la courbe, qui a pour équation $y = f(x)$, coupe l'axe des x. En désignant par a une valeur approchée de la racine, et par $f(a)$ la valeur correspondante de y, l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$, au point dont les coordonnées sont a et $f(a)$, est :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Cette tangente coupe l'axe des x en un point dont l'abscisse x est évidemment

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

c'est-à-dire précisément égale à la valeur fournie par la méthode de Newton.



D'après cela, la méthode de Newton équivaut à la construction suivante :

Ayant la position approchée, P, du point O où une courbe coupe l'axe des x, pour en obtenir une autre plus approchée encore, on mène, au point M de la courbe qui se projette en P, une tangente MT; et le point T est, *en général*, beau-

coup plus près que P de l'intersection cherchée. En répétant la même construction, on obtiendra un nouveau point T′ encore plus rapproché que le précédent; et ainsi de suite.

Il peut arriver, cependant, qu'en appliquant la méthode de Newton, on obtienne une valeur de la racine moins approchée que celle que l'on a déjà : et il importe, pour opérer avec certitude, d'entourer la méthode de quelques précautions indispensables.

267. Cas qui peuvent se présenter dans l'application de la méthode. Supposons que l'on ait trouvé deux nombres, a, b, $(a<b)$, qui comprennent une racine, et une seule, de l'équation $f(x)=0$; de telle sorte que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires. Supposons, en outre, que ces deux nombres a, b, soient assez rapprochés, pour que, x variant depuis a jusqu'à b, $f'(x)$ et $f''(x)$ ne changent pas de signe. Puisque $f'(x)$ conserve son signe, $f(x)$ est constamment croissant ou constamment décroissant; et, puisque $f''(x)$ conserve le sien, $f'(x)$ est également toujours croissant ou toujours décroissant. En d'autres termes, l'ordonnée de la courbe $y=f(x)$ va toujours en augmentant ou toujours en diminuant; et l'angle, que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x, varie aussi toujours dans le même sens.

D'après cela, quatre cas peuvent se présenter. Si $f(a)>0$, on

Fig. 1.

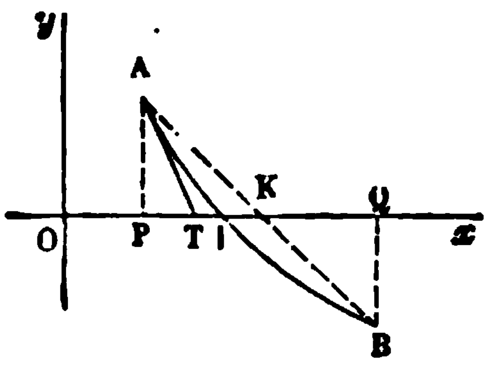


Fig. 2.

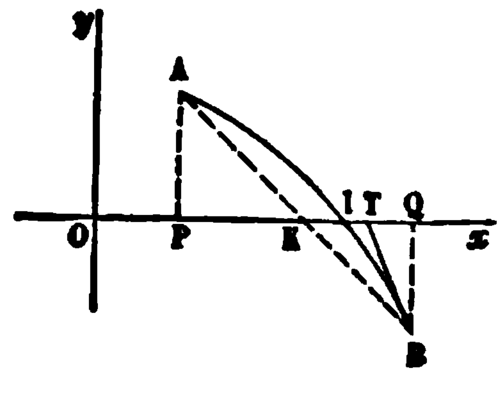


Fig. 3.

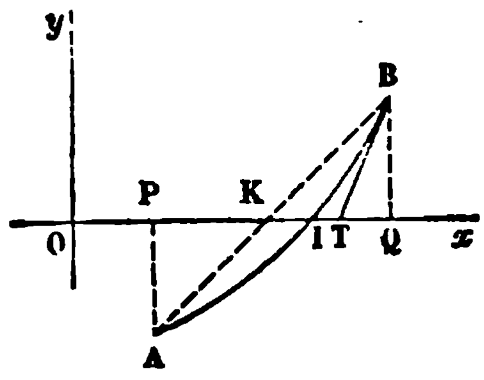
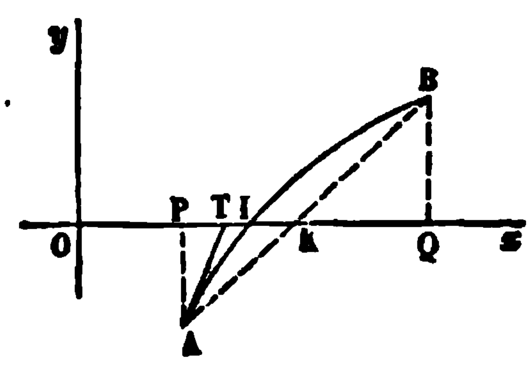


Fig. 4.



a $f(b)<0$; par suite, $f(x)$ diminue, et $f'(x)$ est constamment

négatif. La courbe affecte alors l'une des deux premières formes : savoir, la première, si $f''(x)$ est constamment positif, et la deuxième, si $f''(x)$ est constamment négatif.

Si, au contraire, $f(a)$ est négatif, on a $f(b)>0$; par suite, $f'(x)$ est constamment positif : et la courbe affecte alors l'une des deux dernières formes : la troisième, si $f''(x)$ est positif, et la quatrième, si $f''(x)$ est négatif.

268. Moyen d'opérer avec certitude. Cela posé, il est évident que, pour avoir avec certitude une valeur de x plus approchée que l'une des limites a, b, qui la comprennent, il faut, dans le premier cas (fig. 1), mener la tangente au point A, qui correspond à la limite inférieure a, c'est-à-dire, poser

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}; \tag{1}$$

il faut, dans le second cas, mener la tangente au point B, qui correspond à la limite supérieure b, et poser

$$x=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{2}$$

Il faut de même appliquer la formule [2] dans le troisième cas, et la formule [1] dans le quatrième.

On remarque d'ailleurs que, dans le premier et le quatrième cas, où l'on doit appliquer la formule [1], $f(a)$ et $f''(a)$ sont de même signe, tandis que $f(b)$ et $f''(b)$ sont de signes contraires; et que, dans le second et le troisième, où l'on doit appliquer la formule [2], $f(b)$ et $f''(b)$ sont aussi de même signe, tandis que $f(a)$ et $f''(a)$ sont de signes contraires. On conclut de là cette règle générale :

Lorsque l'on connaîtra deux limites, a, b, *qui comprennent une seule racine de l'équation* $f(x)=0$, *et qui en sont ainsi, chacune, une valeur approchée, si ces deux limites sont assez rapprochées pour que,* x *variant de* a *à* b, $f'(x)$ *et* $f''(x)$ *ne puissent changer de signe, on prendra la formule*

$$x=z-\frac{f(z)}{f'(z)},$$

et l'on y remplacera z *par celle des deux limites qui rendra* $f(z)$ *et* $f''(z)$ *de même signe.*

Le résultat sera une valeur de x *plus approchée que la limite dont on se sera servi. En substituant cette valeur dans la même formule, on obtiendra une nouvelle valeur encore plus approchée; et ainsi de suite.*

269. Emploi simultané de la méthode de Newton et de la méthode des parties proportionnelles. Il est facile de voir, que la méthode des parties proportionnelles (**261**) donnerait pour valeur approchée $x = \mathrm{OK}$, K étant le point où la corde AB rencontre l'axe des x. Car on a, dans chacune des figures,

$$x = \mathrm{OP} + \mathrm{PK}, \quad \text{et } x = \mathrm{OQ} - \mathrm{QK},$$

ou

$$x = a + \mathrm{PK}, \quad \text{et } x = b - \mathrm{QK},$$

et l'on voit que :

$$\mathrm{PK} = \mathrm{PQ} \times \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}}, \text{ et } \mathrm{QK} = \mathrm{PQ} \times \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}}:$$

c'est-à-dire que les accroissements PK et QK sont proportionnels aux variations des ordonnées.

On remarque, d'ailleurs, que si la méthode de Newton donne une valeur trop petite pour x, la méthode des parties proportionnelles donne une valeur trop grande, et *vice versa*. Par conséquent, la valeur exacte de x est comprise entre les deux; et l'erreur commise est moindre que leur différence.

RÉSUMÉ.

253. Opérations préliminaires à exécuter, quand on veut résoudre une équation numérique. — **254**. Substitution de nombres entiers consécutifs. — **255**. Choix des intervalles dans lesquels on doit faire de nouvelles substitutions. — **253**. Théorème qui limite les irrégularités que peut présenter la courbe dont on fait usage. — **257**. Substitution de nombres équidistants d'un dixième. — **258**. Simplification des calculs dans le cas où l'équation est du troisième degré. — **259**. Application à un exemple. Calcul des racines à 0,1 près. — **260**. Calcul à 0,01 près. — **261**. Emploi d'une proportion analogue à celle dont on fait usage dans la théorie des logarithmes. — **262**. Exem-

ple d'une équation à laquelle les règles précédentes s'appliquent mal. — 263. Méthode de Newton. — 264, 265. Applications à deux exemples. — 266. Représentation graphique de la méthode. — 267, 268. Rectification de la méthode, qui permet d'opérer avec certitude. — 269. Emploi simultané de la méthode de Newton et de la méthode des parties proportionnelles.

EXERCICES.

I. Déterminer la racine réelle de l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

On trouve : $x = 2,09455.$

II. Déterminer la racine réelle de l'équation

$$x^3 - 5x - 3 = 0.$$

On trouve : $x = 2,4908.$

III. Déterminer les racines réelles de l'équation

$$x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 39x^2 - 20x + 4 = 0.$$

On trouve $x = -4,00317.$

IV. Déterminer les racines réelles de l'équation

$$x^3 - 8x^2 - 6x + 9 = 0.$$

On trouve $x_1 = 8,577,$ $x_2 = 3,5577,$ $x_3 = -3,2438.$

V. Déterminer les racines réelles de l'équation

$$x^3 - 8x - 1 = 0.$$

On trouve : $x_1 = 2,88879,$ $x_3 = -2,7639,$ $x_2 = -0,12509.$

VI. Partager une demi-sphère, de rayon 1, en deux parties équivalentes, par un plan parallèle à la base.

En désignant par x la distance du plan parallèle au centre, on trouve .

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

270. But de ce chapitre. Nous nous bornerons à traiter, dans ce chapitre, quelques équations transcendantes, choisies parmi celles que l'on rencontre dans les applications des sciences mathématiques, et qui nous permettront d'exposer, d'une manière complète, les méthodes auxquelles les géomètres ont le plus souvent recours pour leur résolution.

§ I. Application de la théorie des différences à la résolution des équations transcendantes.

271. Méthode de résolution. La méthode, que nous appliquons aux deux exemples qui vont suivre, est très-fréquemment employée; elle consiste à substituer dans l'équation proposée des nombres équidistants, absolument comme dans le cas d'une équation algébrique. Lorsque l'on a trouvé deux substitutions qui donnent, dans le premier membre, des résultats de signes contraires, on conclut qu'il existe une racine entre les valeurs correspondantes de x; et dans l'intervalle on substitue des nombres plus rapprochés, qui permettent de resserrer la racine entre deux limites nouvelles et plus étroites. Cela fait, on considère le tableau qui comprend : 1° les valeurs attribuées à l'inconnue; 2° les valeurs correspondantes du premier membre de l'équation; 3° les différences des divers ordres qui s'en déduisent. S'il arrive que les différences d'un certain ordre, du troisième par exemple, soient négligeables, on en conclut que la fonction peut être remplacée, sans erreur sensible, dans l'intervalle considéré, par une fonction algébrique (du second degré, si la différence troisième est considérée comme nulle). La théorie de l'interpolation fera connaître cette fonction; et, en la substituant au premier membre de l'équation, on aura ramené le problème à la résolution d'une équation du second degré.

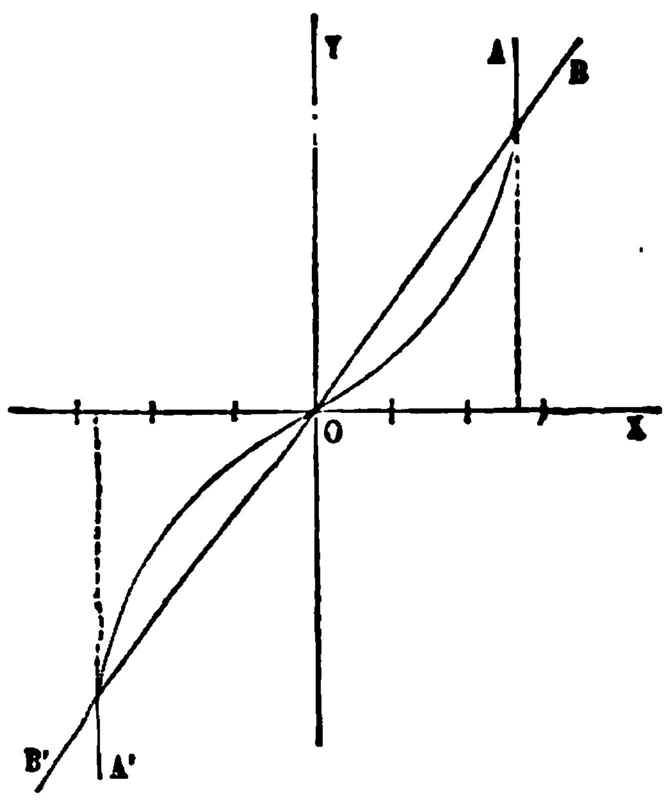
Si les différences du second ordre étaient négligeables, on ramènerait l'équation à une équation du premier degré; et la

méthode reviendrait à l'emploi des parties proportionnelles, dont on fait usage, dans un cas analogue, en se servant des tables de logarithmes.

272. Exemple I. Soit donnée l'équation

$$e^x - e^{-x} = 5,284x,$$

équation qui se présente, en mécanique, dans l'étude de la chaînette.



Nous voyons que cette équation ne change pas, lorsqu'on remplace x par $(-x)$; par conséquent, à chaque racine correspond une autre racine égale, mais de signe contraire.

Pour mieux étudier cette équation, posons :

$$y = e^x - e^{-x}, \quad \text{et} \quad y = 5,284x;$$

nous aurons alors les équations de deux lignes, dont les points d'intersection ont pour abscisses les racines de l'équation.

La première de ces deux lignes AA' est une courbe transcendante, n'ayant qu'une seule branche infinie dans les deux sens. Cette branche, qui a pour asymptotes les lignes logarithmiques dont les équations sont :

$$x = \log y \quad \text{et} \quad -x = \log y,$$

passe par l'origine des coordonnées, qui est, en même temps, son centre.

La seconde de ces deux lignes BB' est une droite qui passe également par l'origine.

Comme les deux lignes passent par l'origine, l'équation est vérifiée par $x = 0$. En outre, il est facile de voir qu'elles n'ont qu'une seule intersection du côté des x positifs ; par conséquent, l'équation a une racine positive que nous allons déterminer.

Mettons d'abord l'équation sous la forme,

$$u_x = e^x - e^{-x} - 5,2084x = 0;$$

et cherchons les valeurs que prend cette fonction pour des valeurs entières de la variable x. Nous aurons :

$$x=0,\quad e^x=1,\quad e^{-x}=1,\quad u_0=0;$$
$$x=1,\quad e^x=2,718,\quad e^{-x}=0,368,\quad u_1=-2,934;$$
$$x=2,\quad e^x=7,389,\quad e^{-x}=0,135,\quad u_2=-3,314;$$
$$x=3,\quad e^x=20,086,\quad e^{-x}=0,050.\quad u_3=+4,184.$$

La racine est donc comprise entre 2 et 3.

Si maintenant nous cherchons les valeurs de u, correspondant à $x=2,5$, $x=2,6$, $x=2,7$..., nous aurons :

$$x=2,5,\quad u=-1,1096;$$
$$x=2,6,\quad u=-0,3489;$$
$$x=2,7,\quad u=+0,5447;$$

et la racine est comprise entre 2,6 et 2,7.

En partageant cet intervalle en dix parties égales, et en calculant les valeurs intermédiaires de u avec leurs différences, nous aurons le tableau suivant :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$
2,64	$-0,00792$	8871	140
2,65	$+0,08079$	9011	142
2,66	$+0,17090$	9153	145
2,67	$+0,26243$	9298	145
2,68	$+0,35541$	9443	
2,69	$+0,44984$		

Les différences du second ordre étant peu différentes, la fonction u_x, prise entre $x=2,64$ et $x=2,65$, peut être considérée comme une fonction algébrique du second degré. On appliquera donc la formule d'interpolation de Newton,

$$v_x=u_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta u_0+\frac{1}{2}\,\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\Delta^2 u_0,$$

dans laquelle on devra poser : $x_0=2,64$ $h=0,01$,

$u_0=-0,00792$, $\Delta u_0=0,08871$, $\Delta^2 u_0=0,00140$.

Comme $x - x_0$ est la correction à faire à la valeur approchée x_0, $\frac{x - x_0}{h}$ sera le nombre de centièmes de cette correction. Donc, en nommant z le nombre de centièmes que l'on doit ajouter à 2,64 pour former la racine, on a :

$$u_x = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0;$$

et u_x devant être nul, on en déduit :

$$[1] \qquad z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} - \frac{z(z-1)}{1.2} \cdot \frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0}.$$

Pour résoudre cette équation du second degré, on peut profiter de ce que z est très-petit, pour négliger d'abord le second terme du second membre, et prendre comme première approximation :

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} = 0,0892797.$$

Puis remplacant z par cette valeur dans le second membre de l'équation [1], on trouve plus exactement :

$$z = 0,089921;$$

par suite, la valeur de x est :

$$x = \pm 2,64089921.$$

273. Exemple II. Résoudre l'équation

$$[1] \qquad a \sin^4 x = \sin(x - q),$$

équation importante qui se présente dans le calcul des orbites des planètes. Soient donnés :

$$\log a = 0,5997582,$$

et

$$q = 13°40'5'',01.$$

Comme nos tables ordinaires ne donnent pas les valeurs des sinus naturels, mais celles de leurs logarithmes, nous prendrons les logarithmes vulgaires des deux membres de l'équation ; ce

qui du reste simplifiera beaucoup le calcul. L'équation se présentera alors sous la forme

$$\log a + 4 \log \sin x = \log \sin (x - q),$$

ou

$$[2] \qquad u_x = \log a + 4 \log \sin x - \log \sin (x - q) = 0.$$

Pour obtenir une première valeur approchée de x, posons d'abord :

$$x = q = 13°40'5'',01\,;$$

nous aurons :

$$\begin{array}{lr} & \log \sin x = \bar{1},3734 \\ \hline & 4 \log \sin x = \bar{3},4936 \\ & \log a = 0,5998 \\ \text{et} & C^t \log \sin (x - q) - 10 = \infty \\ \hline \text{donc} & u_x = +\infty. \end{array}$$

De la même manière, nous trouverons pour $x = 14°$:

$$\begin{array}{lr} & \log \sin x = \bar{1},3837 \\ \hline & 4 \log \sin x = \bar{3},5348 \\ & \log a = 0,5998 \\ \text{et} & C^t \log \sin (x - q) - 10 = 2,2371 \\ \hline \text{donc} & u_x = +0,3717. \end{array}$$

De cette diminution rapide de la fonction u_x, nous pouvons conclure, avec quelque probabilité, que la valeur $x = 14°$ est très-rapprochée de l'une des racines de l'équation.

En effet, on trouve par des substitutions directes :

$$x = 14°20', \qquad u_x = +0,1096,$$

$$x = 14°30', \qquad u_x = +0,0322,$$

$$x = 14°40', \qquad u_x = -0,0277.$$

La racine est donc comprise entre 14°30' et 14°40'.

Partageant cet intervalle en deux parties égales, on aura :

pour $\qquad x = 14°35', \qquad u_x = +0,0005.$

Par conséquent la racine est comprise entre 14°35' et 14°40'; et elle est très-près du premier de ces deux nombres.

Pour obtenir une valeur plus approchée de x, cherchons, à 7 décimales, les valeurs de la fonction u_x correspondant aux valeurs de x, de dix en dix secondes, depuis $x = 14°35'$; et formons le tableau suivant, après avoir pris les différences successives :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$
14°35'	+0,0004870	0,0009924	−0,0000040
14°35'10"	−0,0005054	−0,0009884	−0,0000040
14°35'20"	−0,0014938	−0,0009844	−0,0000039
14°35'30"	−0,0024782	−0,0009805	
14°35'40"	−0,0034587		

On voit que, pour des valeurs de x équidistantes et assez voisines, les différences secondes de la fonction u_x sont à peu près égales; donc le premier membre de l'équation proposée, dans les limites restreintes que nous lui avons tracées, peut être considéré comme une fonction algébrique du second degré.

En procédant comme dans le cas précédent, on trouve :

$$0 = u_0 + z.\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 u_0;$$

et en substituant les valeurs de u_0, Δu_0 et $\Delta^2 u_0$ contenues dans le tableau, savoir :

$$u_0 = +0,000\ 4870,$$

$$\Delta u_0 = -0,000\ 9924,$$

$$\Delta^2 u_0 = +0,000\ 0040,$$

nous aurons :

$$0 = +4870 - 9924z + 20(z^2 - z).$$

ou
$$z^2 - 497,2z + 243,5 = 0;$$

et, en prenant la plus petite racine de cette équation du second degré (la plus grande surpasserait 596), on a :

$$z = 0,4902267...$$

Dans ce calcul, nous avons pris pour unité d'intervalle l'arc de

dix secondes; la correction sera donc $= 4'',902$, et la racine exacte aux millièmes de secondes, est :

$$x = 14°35'4'',902.$$

Si nous voulons vérifier ce résultat, nous trouverons :

$$\begin{array}{rl}
x - q = & 54'59'',892, \\
\log \sin x = & \bar{1},401\ 07445 \\
\hline
4 \log \sin x = & \bar{3},604\ \ 2978 \\
\log a = & 0,599\ \ 7582 \\
\text{et} \quad C^{\circ}\log \sin (x - q) - 10 = & 1,795\ \ 9440 \\
\hline
\text{donc} \qquad u_{n} = & 0;
\end{array}$$

le résultat obtenu est exact.

Mais l'équation [1] étant une équation transcendante, outre cette première racine réelle, il peut y en avoir encore une ou plusieurs autres, ou même une infinité.

En effet, lorsqu'on continue les recherches, on trouve encore sur la première circonférence du cercle, trois autres racines

$$x_1 = 32°\ 2'28'',$$

$$x_2 = 137°27'59'',$$

$$x_3 = 193°\ 4'18'';$$

de plus, à chacune de ces quatre valeurs de x, correspondent une infinité d'autres, positives ou négatives, et qui sont toutes comprises dans l'expression générale

$$x + k \times 360°,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

§ II. Résolution des équations transcendantes par la méthode des substitutions successives.

274. Méthode des substitutions successives. La méthode, que nous appliquerons à l'exemple qui va suivre, est d'un emploi très-commode dans tous les cas où la nature du problème permet de l'adopter. Voici, d'abord, d'une manière générale, le principe sur lequel elle repose.

Soit
$$x = \varphi(x)$$
une équation (mise, comme on voit, sous une forme particulière) ; et supposons que l'on ait trouvé une valeur approchée a de sa racine : on aura, par suite, approximativement :
$$x = \varphi(a);$$
soit b cette valeur; en l'adoptant, on trouvera :
$$x = \varphi(b);$$
soit c cette troisième valeur; on en déduira :
$$x = \varphi(c) = d,$$
et la série des nombres $a, b, c, d\ldots$, qui peut se continuer indéfiniment, convergera, quelquefois, très-rapidement vers la véritable racine.

Pour apprécier la rapidité de cette convergence, nommons $(a+h)$ la valeur exacte de la racine; nous aurons :
$$a+h = \varphi(a+h).$$
Or, la fraction
$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}$$
diffère peu de la dérivée $\varphi'(a)$. On a donc, en désignant cette fraction par $\varphi'(a)+\varepsilon$:
$$\varphi(a+h) = h\varphi'(a)+\varphi(a)+h\varepsilon;$$
donc
$$a+h = h\varphi'(a)+\varphi(a)+h\varepsilon;$$
et, par suite,
$$(a+h)-\varphi(a) = h\varphi'(a)+h\varepsilon;$$
l'erreur commise, en prenant $\varphi(a)$ pour racine, est donc, à très-peu près, $h\varphi'(a)$, c'est-à-dire le produit de l'erreur précédente h par $\varphi'(a)$. On voit que l'erreur diminue, si $\varphi'(a)$ est moindre que 1 ; dans le cas contraire, la méthode n'est pas applicable.

275. Exemple. Déterminer les racines réelles de l'équation
$$\frac{10^x}{\sqrt{x}} = 329476.$$

Il est évident que cette équation ne peut pas avoir de racines négatives, parce que, pour un x négatif, le radical deviendrait imaginaire; nous n'avons donc qu'à nous occuper de la recherche des racines positives.

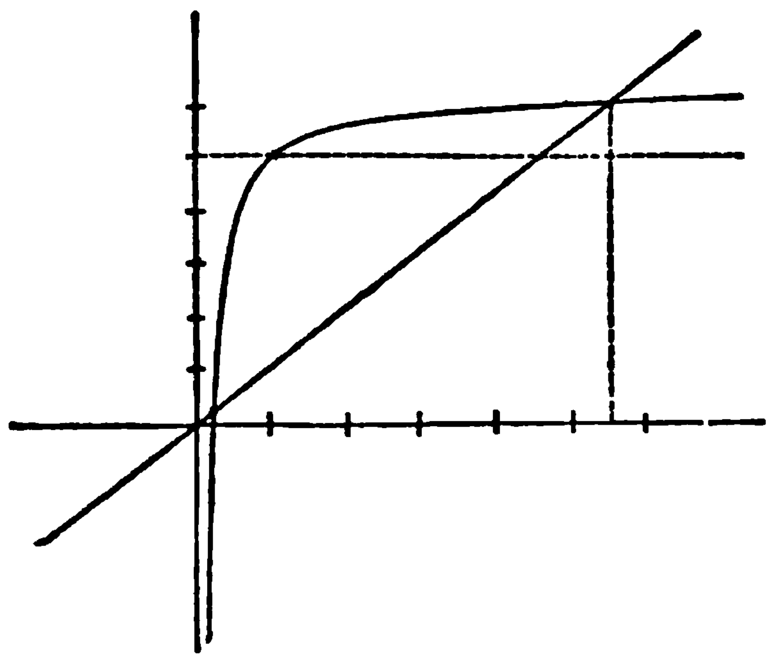
Le calcul deviendra plus simple, si nous prenons les logarithmes vulgaires des deux membres; l'équation devient alors :

$$[1] \qquad x = \tfrac{1}{2}\log x + 5{,}5178238\ldots;$$

elle est ainsi sous la forme qui permet d'appliquer la méthode.

En posant $y = x$, et $y = \frac{1}{2}\log x + 5{,}5178238$,

nous aurons deux lignes, dont les abscisses des points d'intersection représentent les racines de l'équation.



La première est une droite, bissectrice de l'angle des coordonnées orthogonales; la seconde est une ligne logarithmique, formée par une seule branche infinie, et ayant pour asymptote l'axe des y. Les deux lignes se coupent en deux points; le premier très-voisin de l'origine; l'abscisse du second est comprise entre 5 et 6. Il ne peut y avoir d'autres points de rencontre; et, par suite, l'équation n'a que deux racines positives.

Comme la valeur du terme connu de l'équation [1] est près de 6, posons, en premier lieu : $x = 6$, et substituons cette valeur dans le second membre de l'équation [1]; nous aurons alors une valeur de x plus rapprochée que la première,

$$x = \tfrac{1}{2}\log 6 + 5{,}5178 = 5{,}9069.$$

En substituant cette seconde valeur de x dans l'équation [1], nous aurons :

$$\tfrac{1}{2}\log 5{,}9069 + 5{,}517\,8238 = 5{,}903\,5036,$$

Poursuivant ce procédé, nous obtiendrons pour la troisième substitution :

$$x = \tfrac{1}{2}\log 5{,}903\,5036 + 5{,}517\,8238 = 5{,}903\,3787\,;$$

ensuite : $x = \tfrac{1}{2}\log 5{,}903\,3787 + 5{,}517\,8238 = 5{,}903\,3741,$

puis : $x = \tfrac{1}{2}\log 5{,}903\,3741 + 5{,}517\,8238,$

ou $x = 5{,}903\,3740.$

Le dernier résultat est exact à sept décimales; car on trouve :

$$\log x = \log 5{,}903\ 3740 = 0{,}771\ 1004$$

donc : $\tfrac{1}{2}\log x = 0{,}385\ 5502$

$$5{,}517\ 8238$$

d'où $\tfrac{1}{2}\log x + 5{,}5178\ldots = 5{,}903\ 3740 = x.$

Si nous reprenons les considérations générales, par lesquelles nous avons commencé ce paragraphe, nous verrons, en les appliquant à l'exemple actuel, que l'on a :

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\log x + 5{,}5178238,$$

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2}\frac{\log e}{x}.$$

Or, x étant à peu près égal à 6, cette valeur de $\varphi'(x)$ est à peu près $\frac{1}{20}$; et, par suite, chaque valeur obtenue est environ vingt fois plus approchée que la précédente.

Il nous reste encore à évaluer la seconde racine de l'équation

[1] $$x - \tfrac{1}{2}\log x - 5{,}517\ 8238 = 0,$$

racine qui est comprise entre 0 et 1. Comme x est nécessairement une fraction très-petite, nous pouvons négliger le premier terme de l'équation, qui deviendra alors :

$$\tfrac{1}{2}\log x = -5{,}517\ 8238,$$

$$\log x = -11{,}035\ 6476$$

$$= \overline{12}{,}964\ 3524\,;$$

d'où l'on tire $x = 0{,}00000\ 00000\ 09211\ 97,$

valeur exacte à dix-sept décimales.

§ III. Résolution des équations transcendantes par la méthode de Newton.

276. Exposé de la méthode. La méthode de Newton s'applique, sans modification, à la recherche des racines d'une équation transcendante, pourvu que l'on en connaisse toutefois une première valeur approchée.

Soit, en effet,

$$F(x)=0,$$

une équation; et soit a une valeur approchée de la racine, dont nous représenterons la valeur exacte par $(a+h)$.

On aura : $$F(a+h)=0;$$

mais le rapport $$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

diffère peu de $F'(a)$; et l'on a, par conséquent, en désignant par ε un nombre très-petit :

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(a)+\varepsilon;$$

d'où l'on déduit, en remarquant que $F(a+h)$ est nul :

$$h=-\frac{F(a)}{F'(a)+\varepsilon};$$

et $-\dfrac{F(a)}{F'(a)}$ est, par suite, une valeur approchée de h.

277. Exemple I. Soit donnée l'équation

$$[1] \qquad x^x-100=0.$$

Substituons d'abord à la variable x les nombres naturels; nous aurons :

$$0^0=1,\ 1^1=1,\ 2^2=4,\ 3^3=27,\ 4^4=256,\ldots$$

On en conclut que notre équation n'a qu'une seule racine réelle, et que cette racine est comprise entre 3 et 4.

Le calcul devient beaucoup plus simple, lorsque, au lieu de

traiter l'équation sous la forme donnée [1], nous prenons les logarithmes vulgaires des deux membres; nous aurons alors :

$$x \log x = 2.$$

Ainsi donc nous aurons :

$$F(x) = x \log x - 2;$$

d'où

$$F'(x) = \log x + \log e:$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

Ces valeurs de $F(x)$ et de $F'(x)$, substituées dans la formule générale, qui exprime la correction fournie par la méthode de Newton, donneront pour h.

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} = -\frac{x \log x - 2}{\log x + \log e} = \frac{2 - x \log x}{\log e + \log x}.$$

PREMIÈRE APPROXIMATION. Nous avons trouvé ci-dessus, que la valeur de x est comprise entre 3 et 4. Posons d'abord $x = 3,5$, et calculons à 3 décimales. Nous aurons alors :

$$\begin{array}{lrr} & x = 3,5 & \log e = 0,434 \\ & \log x = 0,544 & \log x = 0,544 \\ \hline \text{d'où} & x \log x = 1,904 & \log e + \log x = 0,978; \end{array}$$

et $\quad 2 - x \log x = 0,096;$

donc

$$h = \frac{0,096}{0,978} = 0,098;$$

et la valeur approchée de x sera :

$$x = 3,598.$$

DEUXIÈME APPROXIMATION. Nous avons :

$$\begin{array}{lrr} & x = 3,598 & \log e = 0,434\,2945 \\ \text{donc} & \log x = 0,556\,0612 & \log x = 0,556\,0612 \\ \hline & x \log x = 2,000\,7082, & \log e + \log x = 0,990\,3557; \end{array}$$

et $x \log x - 2 = 0,000\,7082;$

donc $$h = -\frac{0,000\ 7082}{0,990\ 3557} = -0,00071\ 50966;$$

et $$x = 3,598 - 0,00071\ 510$$

$$x = 3,597\ 2849.$$

Troisième approximation. Pour avoir une valeur de x encore plus approchée, posons maintenant :

$$x = 3,597\ 285;$$

nous aurons :

$$\begin{array}{rl|rl} \log x & = 0,5559404378 & \log x & = 5,55594\ 04378 \\ x \log x & = 1,99909\ 997677 & \log e & = 0,43429\ 44819 \\ \hline \end{array}$$

d'où $x \log x - 2 = 0,00000\ 002323$, $\log x + \log e = 0,99023\ 49197$,

ce qui donne pour valeur de h,

$$h = \frac{0,00000\ 002323}{0,99023\ 49197} = 0,00000\ 0023458;$$

et la valeur de x, exacte à dix décimales, est :

$$x = 3,59728\ 50235.$$

278. Exemple II. Résoudre l'équation :

$$x - \varepsilon \sin x = a;$$

et soient $$\varepsilon = 0,245\ 31615,$$

$$\log \varepsilon = \bar{1},389\ 7262,$$

$$a = 329°\,44'\,27'',66.$$

Cette équation se présente dans l'étude du mouvement elliptique des planètes, lorsqu'on cherche la position de l'astre dans son orbite, à une époque donnée.

Avant de passer à la résolution de cette équation, nous allons montrer comment on réduit en degrés un arc de cercle exprimé en parties de rayons, et réciproquement.

On sait que, pour le rayon $=1$, la demi-circonférence du cercle, ou $180°$, est égale à

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots;$$

donc l'arc égal au rayon sera :

$$1 = \frac{180°}{\pi} = 57°,29577\ 95130\ 82321\ldots.$$

$$= 57°17'44'',806247\ldots = 206264'',806247\ldots.$$

C'est donc par ce dernier nombre qu'il faudra multiplier la longueur d'un arc donné en parties du rayon, pour le ramener à la mesure ordinaire des arcs; et réciproquement, en divisant le nombre de secondes, que contient un arc de cercle, par 206264,806247...., *on obtient sa longueur en parties du rayon.*

Si, par exemple, nous voulions convertir en parties du rayon l'arc de cercle $a = 329°44'27'',66$, nous aurions :

$$a = 1186067'',66,$$

$$\log a = 6,074\ 4755,$$

$$\log 206264'',8 = \underline{5,314\ 4251,}$$

donc $\qquad \log x = 0,760\ 0504;$

et de là, en parties du rayon,

$$x = 5,755\ 067;$$

en sorte que l'arc de $329°44'27'',66$ vaut environ $5\frac{3}{4}$ fois le rayon.

On donne quelquefois cette règle de conversion sous une autre forme, équivalente à la première. Désignons par α la longueur d'un arc en parties du rayon, et par α' le nombre de secondes qu'il renferme : si l'on divise α par la longueur de l'arc d'une seconde en parties du rayon, on a évidemment pour quotient α'. Ainsi $\frac{\alpha}{\text{arc } 1''} = \alpha'$. Mais l'arc d'une seconde et son sinus sont égaux à moins de $\frac{1}{10^{16}}$; donc :

$$\frac{\alpha}{\sin 1''} = \alpha', \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha' \sin 1''.$$

Ainsi, *pour convertir en secondes un arc exprimé en parties du rayon, il faut diviser sa longueur par* sin 1″; *et réciproquement, pour exprimer en parties du rayon un arc évalué en degrés, minutes et secondes, il faut le convertir en secondes, et multiplier le résultat par* sin 1″.

Nous n'avons pas besoin de dire que le logarithme de sin 1″ se trouve à la première page des tables.

Ceci posé, déterminons d'abord le quadrant du cercle, qui comprend l'arc x; et pour cela, substituons à x, dans l'expression

$$F(x) = x - \varepsilon \sin x - 5{,}755067,$$

les valeurs linéaires de 0°, 90°, 180°, 270°, 390°. Le résultat sera :

$$x = 0^\circ \qquad \varepsilon \sin x = 0 \qquad F(x) = -5{,}75\ldots$$

$$x = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \qquad \varepsilon \sin x = 0{,}25 \qquad F(x) = -4{,}43\ldots$$

$$x = 180^\circ = \pi \qquad \varepsilon \sin x = 0 \qquad F(x) = -2{,}61$$

$$x = 270^\circ = \frac{3\pi}{3} \qquad \varepsilon \sin x = -0{,}15 \qquad F(x) = -0{,}79$$

$$x = 360^\circ = 2\pi \qquad \varepsilon \sin x = 0 \qquad F(x) = +0{,}53$$

Donc l'arc x est compris entre 270° et 360°, ce qui était facile à prévoir; et, comme son sinus est négatif, x est plus petit que $a = 329°44'27'',66$.

Première approximation, par parties proportionnelles. Posons d'abord $x = 320°$, et calculons la valeur correspondante de $F(x)$. Pour réduire l'expression en degrés, minutes et secondes, nous multiplierons, d'après la règle, le terme $\varepsilon \sin x$ par 206264,8..., ou nous le diviserons par sin 1″, et nous aurons :

$$\sin x = \sin 320^\circ = -\sin 40^\circ;$$

ou

$$\begin{aligned} \log(-\sin x) &= \bar{1},8081, \\ \log \varepsilon &= \bar{1},3897, \\ \log 206264 &= 5,3144, \\ \hline \log(-\varepsilon \sin x \times 206264'') &= 4,5122; \end{aligned}$$

donc $206264'' \times \varepsilon \sin x = -32525'' = -9^\circ 2' 5''$;

et de là $x = 320^\circ$.

$$-\varepsilon \sin x = +9^\circ 2' 5'',$$
$$-a = -329^\circ 44' 28''.$$

Donc : $F(x) = -42' 23'' = -2543''$;

l'arc de 320° est donc trop petit.

De la même manière, on obtiendrait pour $x = 330^\circ$,

$$F(x) = +7^\circ 17' 12'' = 26232'';$$

donc l'arc $x = 330^\circ$ est trop grand, et la racine de l'équation est comprise entre 320 et 330°.

La différence des deux valeurs,

$$F(320^\circ) = -\ 2543''$$

et

$$F(330^\circ) = +26232'',$$

étant égale à $28775''$, pour un intervalle de 10°, nous pourrons admettre comme valeur approchée de x,

$$x = 320^\circ + \frac{2543}{23775} \times 10^\circ = 320^\circ 53'.$$

Application de la méthode de Newton. On a :

$$F(x) = x - \varepsilon \sin x - 329^\circ 44' 27'', 06,$$
$$F'(x) = 1 - \varepsilon \cos x.$$

Prenons la valeur approchée de x comme point de départ. Soient $\alpha = 320^\circ 53'$ et $x = \alpha + h$;

nous aurons : $h = -\dfrac{F(\alpha)}{F'(\alpha)} = -\dfrac{\alpha - \varepsilon \sin\alpha - 329^\circ 44' 27'', 66}{1 - \varepsilon\cos\alpha}$.

$$\log(-\sin\alpha) = \bar{1},799\ 9616$$
$$\log\varepsilon = \bar{1},389\ 7262$$
$$\log 206264 = 5,314\ 4251$$
$$\log(-\varepsilon\sin\alpha) = 4,504\ 1129$$

d'où $-\varepsilon \sin\alpha = 31923'',67$
$= 8^\circ 52' 3'', 67$

$$\log\cos\alpha = \bar{1},889\ 7850$$
$$\log\varepsilon = \bar{1},389\ 7262$$
$$\log(\varepsilon\cos\alpha) = \bar{1},279\ 5112$$
$$\varepsilon\cos\alpha = 0,190\ 3317$$
$$F'(\alpha) = 1 - \varepsilon\cos\alpha = 0,809\,6683.$$

Donc
$$\begin{array}{rl} \alpha = & 320°53' \\ -\varepsilon\sin\alpha = + & 8°52'3'',67 \\ -a = - & 329°44'27'',66 \\ \hline F(\alpha) = & 36'',01. \end{array}$$
et

Mais $$h = -\frac{F(\alpha)}{F'(\alpha)} = -\frac{36'',01}{0,8096683} = -44'',48....$$

Donc $$x = 320°53' - 44''48 = 320°52'15''52,$$

valeur exacte aux centièmes de secondes.

Vérification du résultat obtenu: Nous avons trouvé :

$$x = 320°52'15'',52;$$

donc $$\sin x = -\sin 39°7'44'',48;$$

et
$$\begin{array}{rl} \log(-\sin x) = & \bar{1},800\ 0767 \\ \log\varepsilon = & \bar{1},389\ 7262 \\ \log 206264'' = & 5,314\ 4251 \\ \hline \log(-\varepsilon\sin x) = & 4,504\ 2280 \end{array}$$

D'où $$-\varepsilon\sin x = 31932'',14 = 8°52'12'',14.$$

Or
$$\begin{array}{rl} x = & 320°52'15'',52 \\ -\varepsilon\sin x = + & 8°52'12'',14 \\ -a = - & 329°44'27'',66 \\ \hline F(x) = & 0. \end{array}$$

Comme on voit, la méthode de Newton nous a donné, par un seul calcul, la valeur exacte de l'arc x.

§ IV. Résolution de l'équation $x = \operatorname{tang} x$.

Cette équation se présente dans la théorie de la chaleur, et dans la héorie des vibrations des corps élastiques.

279. Considérations générales. 1° Comme l'équation ne change pas lorsqu'on y remplace x par $(-x)$, il en résulte qu'à chaque racine correspond une autre racine égale, mais de signe

contraire. Nous ne nous occuperons donc que de la recherche des racines positives.

2° Lorsque x est positif, il faut que la tangente le soit également, pour que $(x - \operatorname{tang} x)$ devienne nul. Les arcs x sont donc terminés dans le 1er, le 3e, le 5e... quadrant du cercle, et leurs valeurs sont comprises entre $n\pi$ et $(n + \frac{1}{2})\pi$; π étant égal à la demi-circonférence du cercle ou à 180°, et n étant un nombre quelconque, entier et positif.

3° Dans chacun de ces quadrants, l'arc x va en augmentant depuis $x = n\pi$ jusqu'à $x = (n + \frac{1}{2})\pi$; la tangente augmente d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini; par conséquent, il y a dans chacun des quadrants indiqués une racine réelle, et il n'y en a qu'une seule; et l'équation proposée admet une infinité de racines positives et négatives.

4° L'équation étant vérifiée par $x = 0$, la racine correspondante au premier quadrant est zéro; pour toutes les autres valeurs de x, comprises dans le premier quadrant, on sait que $\operatorname{tang} x > \operatorname{arc} x$.

5° Si l'on représente par $(n\pi + \alpha_n)$ la n^{me} racine (α_n étant moindre que $\frac{\pi}{2}$), il est facile de voir, que cet arc α_n est d'autant plus grand que n est plus grand.

Soit, en effet, $n'\pi + \alpha_{n'}$ la solution qui correspond à un nombre n' supérieur à n, on a :

$$\operatorname{tang}(n\pi + \alpha_n) = \operatorname{tang} \alpha_n = n\pi + \alpha_n,$$

$$\operatorname{tang}(n'\pi + \alpha_{n'}) = \operatorname{tang} \alpha_{n'} = n'\pi + \alpha_{n'};$$

or, n' étant plus grand que n, la différence $n'\pi + \alpha_{n'} - n\pi - \alpha_n$ ou $(n' - n)\pi + \alpha_{n'} - \alpha_n$ est positive, puisque $(n' - n)\pi$ est au moins égal à π; donc $(n'\pi + \alpha_n')$ surpasse $(n\pi + \alpha_n)$; donc $\operatorname{tang} \alpha_{n'}$ est plus grand que $\operatorname{tang} \alpha_n$; et, par suite, $\alpha_{n'}$ est plus grand que α_n, comme nous l'avions annoncé.

6° Si la valeur approchée de la racine est trop grande, l'arc est plus petit que la tangente; si, au contraire, la valeur approchée de x est trop petite. l'arc est plus grand que la tangente,

Car, dans chaque quadrant, $(x - \text{tang}\, x)$ est positif, tant que la valeur donnée à x est inférieure à la racine ; et devient négative dès que cette valeur surpasse la racine.

280. Calcul de la première racine. Ceci posé, déterminons la plus petite des racines, celle qui est terminée dans le troisième quadrant du cercle. On sait que $\text{tang}\, 180^\circ = 0$, $\text{tang}\, 225^\circ = 1$, et $\text{tang}\, 270^\circ = \infty$; or, x étant plus grand que π, on a :

$$\text{arc}\, 225^\circ > \text{tang}\, 225^\circ, \quad \text{arc}\, 270^\circ < \text{tang}\, 270^\circ\,;$$

l'arc x est donc renfermé entre 225° et 270°.

Cherchons maintenant les valeurs linéaires des arc compris entre 250° et 260°, et de leurs tangentes respectives (on trouvera ces valeurs, qui sont souvent fort utiles, dans une table, à la fin du volume) ; nous aurons :

$$\begin{array}{ll}
\text{arc}\, 250^\circ = 4{,}363, & \text{tang}\, 250^\circ = 2{,}747, \\
\text{arc}\, 252^\circ = 4{,}398, & \text{tang}\, 252^\circ = 3{,}078, \\
\text{arc}\, 254^\circ = 4{,}433, & \text{tang}\, 254^\circ = 3{,}487, \\
\text{arc}\, 256^\circ = 4{,}468, & \text{tang}\, 256^\circ = 4{,}011, \\
\text{arc}\, 257^\circ = 4{,}485, & \text{tang}\, 257^\circ = 4{,}331, \\
\text{arc}\, 258^\circ = 4{,}503, & \text{tang}\, 258^\circ = 4{,}705,
\end{array}$$

On voit immédiatement que l'arc en question est compris entre 257° et 258° ; ou que la valeur de x, exprimée en parties du rayon, est entre 4,485 et 4,503.

Nous admettrons donc, pour première valeur approchée :

$$x = 4{,}503.$$

Première approximation par la méthode de Newton. Nous avons l'équation :

$$F(x) = x - \text{tang}\, x = 0\,;$$

sa première dérivée est, par suite :

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\,\text{tang}^2 x\,;$$

et le terme de correction sera:

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{x - \text{tang}\, x}{\text{tang}^2 x}.$$

De plus, nous supposerons $x = 4,503$.

Nous aurons alors:

$$\begin{aligned} x &= 4,503 \\ \text{tang}\, x &= 4,705 \\ \hline x - \text{tang}\, x &= -0,202. \end{aligned}$$

et

Donc $h = -\frac{0,202}{(4,705)^2} = -\frac{0,202}{22,1} = -0,0091;$

la valeur approchée de x sera donc:

$$x_1 = 4,494.$$

Deuxième approximation. Posons $x_1 = 4,494$, et calculons à sept décimales. Pour transformer l'arc x en degrés, nous nous servirons de la table de réduction contenue dans les tables de Callet, pages 214, 215 et 216.

$$x_1 = 4,494$$

$$\begin{array}{rl} 3,49065\ 850 & = 200^{\circ} \\ \hline 1,00334\ 150 & \\ 0,99483\ 767 & = 57^{\circ} \\ \hline 0,00850\ 383 & \\ 843\ 576 & = 29' \\ \hline 0,00006\ 807 & \\ 6\ 787 & = 14'' \\ \hline 0,00000\ 020 & = 0'',04; \end{array}$$

donc $x_1 = 257^{\circ}\, 29'\, 14'', 04.$

On en conclut:

$$\log \text{tang}\, x_1 = 0,653\ 7870,$$

et $\text{tang}\, x_1 = 4,505\ 956.$

Par suite, $\text{tang}\, x_1 - x_1 = 0,011\ 956$

$$\begin{aligned} \log\,[\text{tang}\, x_1 - x_1] &= \bar{2},077\ 5859 \\ \log \text{tang}^2 x_1 &= 1,307\ 5740 \\ \hline \log(-h_1) &= \bar{4},770\ 0119 \end{aligned}$$

d'où $h_1 = -\ 0,000\ 58886;$

ce qui donne une nouvelle valeur approchée de x,

$$x_2 = 4{,}493\ 411.$$

Comme la valeur de x_1 était exacte aux millièmes, l'erreur de x_2 sera de l'ordre de $\frac{1}{10^6}$.

Troisième approximation. Le dernier calcul nous a donné, avec une approximation de $\frac{1}{10^6}$ environ,

$$x_3 = \operatorname{tang} x_2 = 4{,}49341.$$

Pour obtenir une valeur de x encore plus rapprochée, au lieu de prendre $x_3 = 4{,}49341$, posons:

$$\operatorname{tang} x_2 = 4{,}49341\,;$$

ce qui facilitera de beaucoup le calcul.

Nous avons déjà trouvé (172):

$$\operatorname{arc\,cotang} 4{,}49341 = 0{,}21897\ 94968\ 94113\,;$$

de plus, nous avons:

$$\operatorname{arc\,tang} x = 270° - \operatorname{arc\,cotang} x\,;$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{mais} & 270° = \dfrac{3\pi}{2} = & 4{,}71238\ 89803\ 84690 \\
\text{et} & \operatorname{arc\,cotang} 4{,}49341 = & 0{,}21897\ 94968\ 94113\,; \\
\hline
\text{donc} & x_2 = \operatorname{arc\,tang} 4{,}49341 = & 4{,}49340\ 94834\ 90577 \\
\text{et} & \operatorname{tang} x_2 = & 4{,}49341 \\
\hline
\text{d'où} & \operatorname{tang} x_2 - x_2 = & 0{,}00000\ 05165\ 09423\,;
\end{array}$$

$$\text{mais} \qquad \operatorname{tang}^2 x_2 = 20{,}19073\ 34281\,;$$

$$\text{donc} \qquad h_2 = \frac{x - \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang}^2 x} = -\frac{0{,}00000{,}05165\ 0942}{20{,}19073\ 34281},$$

$$\text{ou} \qquad h_2 = -\ 0{,}00000\ 00255\ 815\ldots$$

Nous avons trouvé ci-dessus:

$$x_2 = 4{,}49340\ 94834\ 906\,;$$

donc $$x_3 = x_2 + h_2 = 4,493409\ 457909,$$

valeur exacte à douze décimales; ce nombre, transformé en degrés et parties de degré, devient:

$$x_3 = 257^\circ 27' 12'',231224.$$

Les tables de logarithmes de Vlacq, tables à dix décimales, donnent:

$$\operatorname{tang} x_3 = 4,4934\ 09458;$$

ce qui s'accorde parfaitement avec le résultat obtenu.

281. Résolution générale de l'équation. L'équation

$$[1] \qquad x - \operatorname{tang} x = 0,$$

qui se distingue par la rapidité avec laquelle on arrive à la détermination nette et complète de ses racines, est, en outre, remarquable par la facilité avec laquelle elle se prête à une résolution générale, analogue à celle des équations algébriques du second degré.

En effet, il suffit de trois ou quatre substitutions successives pour obtenir l'expression générale de toutes ces racines avec une grande précision.

Nous avons déjà établi (page 285), que la n^{me} racine est plus petite que $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, ou que $(2n+1)\frac{\pi}{2}$. Posons donc:

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \theta,$$

équation dans laquelle θ désigne la distance de l'extrémité de l'arc x à celle du quadrant où il se termine. Nous aurons alors:

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \theta\right] = \operatorname{cotang} \theta,$$

d'où $$\operatorname{tang} \theta = \frac{1}{\operatorname{tang} x};$$

mais nous avons également, d'après l'équation proposée:

$$\operatorname{tang} x = x;$$

donc $$\text{tang}\,\theta = \frac{1}{x},$$

et [2] $$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \text{arc. tang}\,\frac{1}{x}.$$

Or $\frac{1}{x}$ est plus petit que 1 : on peut donc développer en série cette dernière expression; et l'on a :

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots;$$

d'où, en désignant $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ par a :

[3] $$x = a - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$$

C'est de cette équation que nous tirerons la valeur de x en fonction de a.

Négligeons d'abord le terme $\frac{1}{x}$ et les termes suivants : nous aurons $x = a$; si nous substituons cette valeur à x dans le second membre de l'équation [3], nous aurons, en négligeant les 3es... puissances :

$$x = a - \frac{1}{a}.$$

Une nouvelle substitution, avec suppression des 5es puissances, donnera :

$$x = a - \frac{1}{\left(a - \frac{1}{a}\right)} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3}$$

$$= a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{3a^3} = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}.$$

Car la division donne :

$$\frac{1}{a - \frac{1}{a}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} + \dots$$

En substituant cette valeur de x dans le second membre de l'équation [3], en effectuant les divisions et en négligeant les 7es puissances, nous aurons une valeur de x encore plus approchée :

$$x=a-\frac{1}{\left(a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}\right)}+\frac{1}{3\left(a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}\right)^3}-\frac{1}{5\left(a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}\right)^5}$$

$$=a-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}-\frac{5}{3a^5}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{3}{a^5}\right)-\frac{1}{5a^5},$$

ou, en réduisant, $x=a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}+\frac{13}{15a^5}$.

Enfin, pour obtenir une nouvelle approximation, remplaçons x par cette dernière valeur, effectuons les divisions et négligeons les 9es puissances ; le résultat sera :

$$x=a-\frac{1}{\left(a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}-\frac{15a^5}{13}\right)}+\frac{1}{3\left(a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}\right)^3}-\frac{1}{5\left(a-\frac{1}{a}\right)^5}+\frac{1}{7a^7},$$

ou

$$x=a-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}+\frac{5}{3a^5}+\frac{16}{5a^7}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{3}{a^5}+\frac{8}{a^7}\right)$$

$$-\tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{a^5}+\frac{5}{a^7}\right)+\frac{1}{7a^7},$$

ou

$$x=a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}-\frac{13}{15a^5}-\frac{146}{105a^7}.$$

Un nouveau calcul donnerait le 6e terme de la série, qui est $-\frac{781}{315a^9}$.

En remplaçant, dans cette formule, a par sa valeur $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, et π par 3,14159 26...., l'équation se présentera sous la forme :

$$[4]\quad x=(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{(2n+1)}\times 0{,}63661\,97723\,67581$$

$$-\frac{1}{(2n+1)^3}\times 0{,}17200\,81836-\frac{1}{(2n+1)^5}\times 0{,}09062\,596$$

$$-\frac{1}{(2n+1)^7}\times 0{,}05892\,837-\frac{1}{(2n+1)^9}\times 0{,}04258\,5$$

. . . .

Pour avoir immédiatement la valeur de la 1re, de la 2e, de la 3e.... racine, on n'aurait qu'à substituer à n les nombres 1, 2, 3....

A mesure que le nombre n augmente, le nombre des termes diminue pour un même degré d'exactitude; et la valeur de x finit par se réduire au premier terme

$$x=(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

lorsque n devient infini.

Si, par exemple, on voulait obtenir, à sept décimales, la 10e racine, il suffirait des quatre premiers termes; on aurait:

$$2n+1=21,$$

$$x=21\times 90^\circ=32{,}986\,72286\ldots.$$ (voy. Callet, p. 214)

$$\begin{aligned}&-\ 0{,}030\,31523\\&-\ 0{,}000\,01857\\&-\ 0{,}000\,00002\end{aligned}$$

ou $$x=32{,}956\,3890.$$

Le calcul devient encore plus simple, lorsqu'on convertit les coefficients de l'équation [2] en degrés, minutes et secondes; opération qui serait extrêmement simple à l'aide de la table de réduction de Callet.

On obtient alors:

$$[5]\quad x=(2n+1).90^\circ-\frac{131312'',25}{(2n+1)}-\frac{35479'',24}{(2n+1)^3}$$
$$-\frac{18693''}{(2n+1)^5}-\frac{12155''}{(2n+1)^7}-\frac{8784''}{(2n+1)^9}-\ldots.$$

Calculant, d'après cette formule, la 5e racine de l'équation, on aura:

$$n=5,\quad 2n+1=11.$$

Il suffira d'évaluer les quatre premiers termes, et encore le

quatrième n'influe-t-il que sur les fractions de secondes. On aura :

$$x = 11 \times 90^{\circ} - (11937'',48 + 26''.66 + 0'',12)$$

$$= 11 \times 90^{\circ} - \quad 11964'',26$$

ou $$x = 11 \times 90^{\circ} - 3^{\circ}\, 19'\, 24''\, 26.$$

Voici les valeurs des onze premières racines :

$$x_0 = \qquad 90^{\circ} - 90^{\circ},$$

$$x_1 = \ 3 \times 90^{\circ} - 12^{\circ}\, 32'\, 48'',$$

$$x_2 = \ 5 \times 90^{\circ} - \ 7^{\circ}\, 22'\, 32'',$$

$$x_3 = \ 7 \times 90^{\circ} - \ 5^{\circ}\, 14'\, 22',$$

$$x_4 = \ 9 \times 90^{\circ} - \ 4^{\circ}\ \ 3'\, 59'',$$

$$x_5 = 11 \times 90^{\circ} - \ 3^{\circ}\, 19'\, 24'',$$

$$x_6 = 13 \times 90^{\circ} - \ 2^{\circ}\, 48'\, 37'',$$

$$x_7 = 15 \times 90^{\circ} - \ 2^{\circ}\, 26'\ \ 5'',$$

$$x_8 = 17 \times 90^{\circ} - \ 2^{\circ}\ \ 8'\, 51'',$$

$$x_9 = 19 \times 90^{\circ} - \ 1^{\circ}\, 55'\, 16''.$$

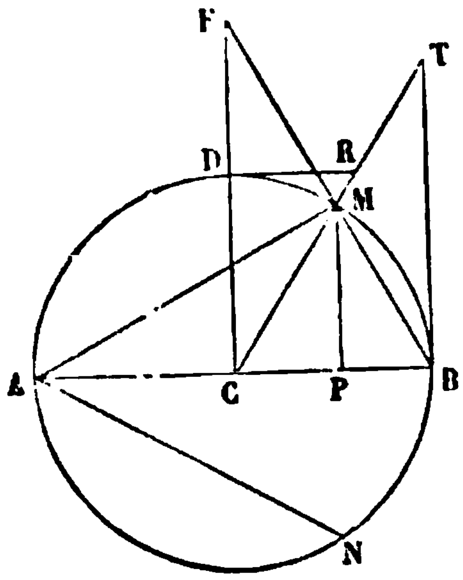
$$x_{10} = 21 \times 90^{\circ} - \ 1^{\circ}\, 44'\, 17''.$$

RÉSUMÉ.

270. But de ce chapitre. — **271.** Indication de la méthode des différences. — **272, 273.** Exemples. — **274.** Indication de la méthode des substitutions successives. — **275.** Exemple. — **276.** Indication de la méthode de Newton. — **277, 278.** Exemples. — **279.** Considérations générales relatives à la résolution de l'équation $x = \tan x$. — **280.** Calcul de la première racine. — **281.** Résolution générale de l'équation $x = \tan x$.

EXERCICES.

I. Étant donné un quadrant de cercle BCD, trouver un arc BM, tel que le secteur BCM soit égal au triangle CDR formé par le rayon CD, la cosécante CR et la cotangente DR.



Soit l'arc $BM = x$; l'équation à résoudre sera

$$x = \operatorname{cotg} x.$$

Et l'on trouvera:

$$= 49°17'36'',55,$$

$$x = \operatorname{cotang} x = 0,860\,3334.$$

II. Trouver un secteur BCM, qui soit la moitié du triangle CBT formé par le rayon CB, la tangente BT et la sécante CT

Équation : $$2x = \operatorname{tang} x.$$

Solution : $$x = 66°46'54'',23,$$

$$2x = \operatorname{tang} x = 2,331\,122.$$

III. Partager le demi-cercle ADMB en deux parties équivalentes, par une corde AM menée à l'extrémité du diamètre.

On cherche l'angle $MCD = \varphi$.

Équation : $$\varphi = \cos \varphi.$$

Solution : $$\varphi = 42°\,20'\,47'',25,$$

$$\varphi = \cos \varphi = 0,739\,0851.$$

IV. Étant donné un quadrant de cercle BCD, mener une perpendiculaire MP au rayon CB, qui partage l'aire du quadrant en deux parties égales.

Soit l'arc $BM = x$; on obtient l'équation :

$$2x - \frac{\pi}{2} = \sin 2x.$$

En posant : $$2x - \frac{\pi}{2} = z,$$

l'équation deviendra $$z = \cos z.$$

Solution de l'exercice III.

V. Déterminer le secteur du cercle ACM, de manière que la corde AM le partage en deux parties équivalentes, c'est-à-dire que le triangle ACM soit égal au segment ADM.

Soit l'arc AM $= x$; l'équation à résoudre sera :

$$x = 2 \sin x.$$

Solution : $x = 108°36'13'',76,$

$$x = 2 \sin x = 1,8954942.$$

VI. Mener d'un point de la circonférence deux cordes AM et AN, telles qu'elles divisent l'aire du cercle en trois parties égales.

Soit BCM $= x$; on aura l'équation :

$$x + \sin x = \frac{\pi}{3}.$$

Solution : $x = 30°43'33'',0,$

$$= 0,536267.$$

VII. Déterminer, dans le quadrant BCD, l'arc BM, de manière que cet arc soit égal à la corde BM prolongée jusqu'au point F.

Équation : $x \sin \frac{x}{2} = 1.$

Solution : $x = 84°53'38'',83,$

$$= 1,481682.$$

VIII. Résoudre l'équation :

$$\frac{\sin^3 a - \sin^3 x}{\text{cotang}\, x - \text{cotang}\, a} = 0,05848868,$$

a étant égal à $32°19'24'',93$.

On trouve : $x = 14°14'35'',34.$

IX. Résoudre l'équation : $10^x = 19,3229 \times x.$

On trouve : $x = 1,446354.$

X. Résoudre l'équation : $e^x = 17,64391 \times x.$

On trouve : $x = 4,337745.$

XI. Résoudre l'équation :

$$x^x = e^{\frac{3\pi}{2}} = 111,3177\ldots.$$

On trouve : $x = 3,644173675.$

Cette équation se présente dans la théorie des spirales logarithmiques, et, en général, dans la théorie des courbes qui coïncident dans tous les points avec leurs développées.

XII. Résoudre l'équation :

$$(e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0.$$

On trouve : $$x = 4{,}7300\,4099.$$

Cette équation se présente dans la théorie de la chaînette.

XIII. Résoudre l'équation :

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0.$$

On trouve : $$x = 1{,}8751\,0402.$$

XIV. Résoudre l'équation

$$\operatorname{tang} x = \frac{x}{1 - \frac{3x^2}{4}}$$

On trouve : $$x_1 = 2{,}563\,4342.$$

$$x_2 = 6{,}058\,6701.$$

Les trois dernières équations se présentent dans la théorie des corps élastiques.

APPENDICE.

RÉSOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS IMPORTANTES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

282. But de ce chapitre. Lorsque les deux termes d'une fraction sont des polynomes entiers par rapport à une même lettre x, on peut, en effectuant leur division autant que possible, décomposer cette fraction en un polynome entier par rapport à cette lettre, et en une autre fraction dont le numérateur soit de degré moindre que le dénominateur. Le but de ce chapitre est de montrer, comment cette fraction peut elle-même être décomposée en d'autres plus simples. Nous supposerons seulement qu'on ait résolu l'équation obtenue en égalant le dénominateur à zéro, et qu'on en connaisse toutes les racines. Nous supposerons, en outre, que les deux termes de la fraction n'ont aucun facteur commun.

§ I. Cas des racines inégales.

283. Forme de la fraction dans ce cas. Soit la fraction rationnelle

$$[1] \qquad \frac{f(x)}{F(x)},$$

où $f(x)$ désigne un polynome en x, de degré moindre que $F(x)$. Soient a, b, c, ..., k, l les racines de l'équation

$$F(x) = 0.$$

Nous supposerons d'abord qu'elles soient toutes inégales. Nous

allons faire voir que, dans ce cas, on peut toujours mettre la fraction [1] sous la forme :

$$[2]\quad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{K}{x-k}+\frac{L}{x-l},$$

A, B, C, ..., K, L désignant des constantes. Pour le démontrer, nous considérerons A, B, C, ... K, L, comme des coefficients indéterminés, dont nous déterminerons la valeur; puis nous vérifierons qu'ils rendent l'équation [2] identique.

L'équation [2], si on multiplie ses deux membres par $F(x)$, devient

$$[3]\quad f(x)=\frac{AF(x)}{x-a}+\frac{BF(x)}{x-b}+\ldots+\frac{KF(x)}{x-k}+\frac{LF(x)}{x-l}.$$

Comme l'équation [3] doit être identique, il faut qu'elle soit satisfaite pour les valeurs $x=a, x=b, \ldots, x=l$. Si l'on fait, par exemple, $x=a$, et si l'on remarque que, $F(a)$ étant égal à zéro, tous les termes du second membre disparaissent, excepté celui qui est divisé par $(x-a)$, on a :

$$f(a)=A\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a,$$

en désignant par $\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a$ la valeur que prend le quotient $\frac{F(x)}{x-a}$, quand on y fait $x=a$. Or on a :

$$F(x)=F[a+(x-a)]=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{F''(a)}{1.2}(x-a)^2$$
$$+\ldots+\frac{F^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^m;$$

en remarquant que $F(a)=0$, on en conclut :

$$\frac{F(x)}{x-a}=F'(a)+\frac{F''(a)}{1.2}(x-a)+\ldots+\frac{F^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^{m-1};$$

puis, en faisant $x=a$, tous les termes du second membre disparaissent, à l'exception du premier; en sorte que

$$\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a=F'(a);$$

et, par suite, l'équation [3] devient :

$$f(a) = AF'(a);$$

d'où l'on conclut :

$$[4] \qquad A = \frac{f(a)}{F'(a)}.$$

Cette valeur de A n'est pas nulle; car $f(x)=0$ n'admet pas la racine a. Elle n'est pas infinie; car $F(x)=0$ n'a pas de racines égales.

On trouvera de même :

$$B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \quad C = \frac{f(c)}{F'(c)}, \ldots . L = \frac{f(l)}{F'(l)}.$$

Pour déterminer les valeurs précédentes, nous avons commencé par admettre la possibilité du développement [2] et de l'équation [3], qui en est une conséquence. Il est donc nécessaire de démontrer que ces valeurs, qui évidemment sont les seules possibles, satisfont effectivement. Pour cela, remarquons qu'en les adoptant, l'équation [3] sera satisfaite pour les valeurs a, b, ... k, l de x; or $f(x)$ étant, par hypothèse, de degré moindre que $F(x)$, cette équation est de degré $(m-1)$; elle ne peut donc avoir m racines, sans être satisfaite identiquement. Ainsi ces valeurs rendent identique l'équation [3] et, par suite, le développement [2].

284. Cas des racines imaginaires inégales. D'après ce qui précède, en désignant par $f(x)$ un polynome de degré moindre que $F(x)$, et par a, b, c ...., k, l les m racines de $F(x)=0$, on a identiquement :

$$[1] \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a)}{F'(a)(x-a)} + \frac{f(b)}{F'(b)(x-b)} + \ldots + \frac{f(l)}{F'(l)(x-l)}.$$

Cette formule suppose seulement que les racines a, b, ..., k, l sont inégales. Elle s'applique au cas où quelques-unes d'entre elles seraient imaginaires. Seulement, dans ce cas, il sera convenable de faire subir au second membre quelques réductions, destinées à en faire disparaître les quantités imaginaires qui y sont en évidence.

Soient $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, deux racines imaginaires ; il est facile de voir que $f(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ et $f(\alpha-\beta\sqrt{-1})$ ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{-1}$; en sorte que, l'une des deux expressions étant $P+Q\sqrt{-1}$, l'autre sera $P-Q\sqrt{-1}$. De même, $F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ et $F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})$ pourront être représentés par $M+N\sqrt{-1}$ et $M-N\sqrt{-1}$; en sorte que la somme des deux termes du second membre de [1], qui correspondent aux racines considérées, est de la forme :

$$\frac{P+Q\sqrt{-1}}{(M+N\sqrt{-1})(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})}+\frac{P-Q\sqrt{-1}}{(M-N\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})},$$

ou, en réduisant au même dénominateur, et supprimant les termes qui se détruisent :

$$\frac{2(PM+QN)(x-\alpha)+2PN\beta-2QM\beta}{(M^2+N^2)[(x-\alpha)^2+\beta^2]}.$$

On voit donc que les deux fractions simples, qui correspondent à deux racines conjuguées, peuvent être réunies en une seule, dont le numérateur est du premier degré par rapport à x, et dont le dénominateur est du second degré.

§ II. Cas des racines égales.

288. Forme de la fraction dans ce cas. Si le dénominateur de la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

contient des racines égales, les formules précédentes ne sont plus applicables ; on peut néanmoins décomposer cette fraction en d'autres plus simples. Pour le montrer, nous établirons d'abord le théorème suivant.

Théorème. *Si* a *désigne une racine multiple de l'équation* $F(x)=0$,

« son degré de multiplicité, la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ *pourra toujours être décomposée de la manière suivante :*

$$[1] \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)},$$

A désignant une constante, $f_1(x)$ *un polynome entier et rationnel,* $F_1(x)$ *le quotient de la division de* $F(x)$ *par* $(x-a)^\alpha$.

On a, en effet, identiquement, quel que soit A :

$$[2] \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f(x)-AF_1(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)}.$$

Si nous déterminons A par la condition

$$[3] \qquad f(a) - AF_1(a) = 0,$$

le numérateur du second terme du second membre s'annulera pour $x=a$, et sera, par conséquent, divisible par $(x-a)$; en posant donc :

$$\frac{f(x)-AF_1(x)}{x-a} = f_1(x),$$

il viendra : $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. $F_1(x)$ étant le quotient de la division de $F(x)$ par la plus haute puissance de $(x-a)$ qui puisse le diviser, $F_1(a)$ ne sera jamais nul; et l'équation [3] fournira toujours pour A une valeur finie. On peut remarquer que cette valeur ne sera jamais nulle : car la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ étant réduite à sa plus simple expression, $f(x)$ et $F(x)$ ne peuvent pas avoir de racine commune; et, par suite, le numérateur $f(a)$ de A ne peut être égal à zéro.

Après avoir mis la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ sous la forme

$$[1] \qquad \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)},$$

si l'on applique la même méthode au second terme de l'expression [1], on le mettra sous la forme

$$[2] \qquad \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)};$$

A_1 étant une constante qui, cette fois, peut être nulle, et $f_2(x)$ une fonction entière.

On pourra de même décomposer $\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)}$ en une somme de la forme

$$[3] \qquad \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-2}}+\frac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)};$$

et, en continuant ainsi, on voit que la fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$ peut être mise sous la forme

$$[4] \qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)};$$

A, A_1,... $A_{\alpha-1}$ étant des constantes finies et déterminées, dont la première n'est pas nulle.

On peut remarquer que le degré de $f(x)$ étant supposé inférieur à celui de $F(x)$, celui de $f_\alpha(x)$, est inférieur à celui de $F_1(x)$; car, en multipliant la formule [4] par $F(x)$, on a identiquement :

$$[5] \qquad f(x)=AF_1x+A_1(x-a)F_1(x)+\dots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}F_1(x) \\ +(x-a)f_\alpha(x)$$

or $f(x)$ est au plus du degré $(m-1)$; il doit donc en être de même de $(x-a)^\alpha f_\alpha(x)$: donc $f_\alpha(x)$ est au plus du degré $(m-\alpha-1)$, tandis que $F_1(x)$ est du degré $(m-\alpha)$. De plus, il n'existe aucun facteur commun entre $f_\alpha(x)$ et $F_1(x)$; car ce facteur, divisant $f_\alpha(x)$ et $F_1(x)$, diviserait $f(x)$, d'après [5], et serait ainsi commun à $f(x)$ et à $F(x)$. Il résulte de là, que la fraction $\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}$ se présente dans les mêmes conditions que $\frac{f(x)}{F(x)}$.

Soient maintenant b une seconde racine de $F(x)=0$, et β son degré de multiplicité; en sorte que l'on ait :

$$F_1(x)=(x-b)^\beta F_2(x);$$

on peut appliquer la méthode précédente à la fraction $\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}$; et l'on obtiendra une expression de la forme :

$$\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}=\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}+\frac{f_\beta(x)}{F_2(x)},$$

$B, B_1, \dots B_{\beta-1}$ étant des constantes déterminées, dont la première n'est pas nulle, et $f_\beta(x)$ étant une fonction entière de degré moindre que celui de $F_2(x)$, et qui n'a aucun facteur commun avec $F_2(x)$. Il résulte de là qu'en général, si on suppose :

$$F(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-c)^\gamma,$$

la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ pourra être décomposée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}=&\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\ &+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+\frac{C}{(x-c)^\gamma}+\frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}}+\dots+\frac{C_{\gamma-1}}{x-c}\end{aligned}$$

$A, A_1, \dots B, B_1, \dots C, C_1, \dots$ étant des constantes, parmi lesquelles $A, B, \dots C$, ne sont pas nuls.

La méthode précédente, en prouvant la possibilité de cette décomposition, donne en même temps le moyen de l'effectuer.

286. La décomposition n'est possible que d'une seule manière. Nous allons maintenant prouver, qu'une fraction rationnelle ne peut être mise que d'une seule manière, sous la forme indiquée dans le paragraphe précédent.

Supposons, en effet, que l'on ait trouvé deux développements d'une même fraction rationnelle :

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+E(x),$$

et

$$\frac{A'}{(x-a')^{\alpha'}}+\frac{A'_1}{(x-a')^{\alpha'-1}}+\ldots+\frac{A'_{\alpha'-1}}{x-a'}+\frac{B'}{(x-b')^{\beta'}}+\ldots+E'(x);$$

ils sont égaux, quel que soit x. Multiplions-les par $(x-a)^\alpha$, et faisons ensuite $x=a$; le premier se réduit à A ; le second s'annulerait si aucun de ses dénominateurs ne contenait le facteur $x-a$. Il faut donc que les puissances de $(x-a)$ forment les dénominateurs de quelques fractions. Soit, par exemple, $a'=a$; je dis qu'alors on doit avoir $\alpha'=\alpha$, $A'=A$. Supposons en effet, s'il est possible, que l'un des deux exposants, α par exemple, soit plus grand que l'autre ; tirons de l'équation qui exprime l'égalité des deux développements, la valeur de $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, et réduisons tous les autres termes au même dénominateur ; on aura un résultat de la forme :

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

ou

$$A=(x-a)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

φ et ψ désignant des polynomes dont le second n'est pas divisible par $(x-a)$. D'ailleurs A est une constante ; il faut donc qu'elle soit nulle ; car l'équation précédente donne $A=0$ pour $x=a$. Donc $\alpha=\alpha'$.

Je dis maintenant que $A=A'$; en effet, en égalant les développements, et en faisant passer le terme $\frac{A'}{(x-a)^\alpha}$ dans le premier membre, on pourra recommencer le raisonnement précédent, et prouver que $(A-A')$ doit être égal à zéro.

Les termes qui renferment les plus hautes puissances $(x-a)$ dans les deux développements étant égaux entre eux, on pourra les supprimer de part et d'autre, et les restes seront égaux. Il faudra, par conséquent, que les termes qui, dans ces restes, con-

tiennent les plus hautes puissances de $(x-a)$, soient aussi égaux entre eux; et, en continuant ainsi, on prouvera que les fractions simples qui composent les deux développements, et, par suite, enfin, les parties entières $E(x), E'(x)$, sont égales chacune à chacune.

287. MÉTHODE POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS. Pour effectuer la décomposition d'une fraction rationnelle, on peut employer un procédé beaucoup plus simple que celui qui résulte de la méthode indiquée plus haut (**285**).

Soient $\frac{f(x)}{F(x)}$ la fraction proposée, et $(x-a)^n$ un facteur multiple de son dénominateur; en sorte que l'on a :

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^n F_1(x)}.$$

Pour trouver, par une seule opération, les fractions simples qui ont pour dénominateurs les diverses puissances de $(x-a)$, on posera :

$$x-a=h,$$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n F_1(x)}=\frac{f(a+h)}{h^n F_1(a+h)}.$$

Ordonnant ensuite les deux polynomes $f(a+h)$ et $F_1(a+h)$ suivant les puissances *croissantes* de h, on aura :

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_mh^m}{(B+B_0h+B_2h^2+\ldots+B_ph^p)h^n}.$$

Si l'on effectue actuellement la division du numérateur par le premier facteur du dénominateur, en ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de h, on obtiendra des restes successifs dout les degrés croîtront sans cesse. Le premier terme de l'un des restes finira donc par être de degré égal ou supérieur à n. On arrêtera alors l'opération: le quotient sera de degré $(n-1)$; et l'on aura:

$$\frac{A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_mh^m}{B+B_1h+B_2h^2+\ldots+B_ph^p}=C+C_1h+C_2h^2+\ldots+C_{n-1}h^{n-1}$$
$$+\frac{\varphi(h)}{B+B_1h+\ldots+B_ph^p},$$

ou, en divisant les deux membres par h^n, remarquant que tous les termes de $\varphi(h)$ contiennent h à une puissance au moins égale à n, et posant :

$$\frac{\varphi(h)}{h^n}=\varphi_1(h),$$

il vient :

$$\frac{A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_mh^m}{h^n(B+B^1h+\ldots+B_ph^p)}=\frac{C}{h^n}+\frac{C^1}{h^{n-1}}+\ldots+\frac{C_{n-1}}{h}$$
$$+\frac{\varphi_1(h),}{B+B_1h+\ldots+B_ph^{p\cdot}}$$

Si l'on remplace h par la valeur $(x-a)$, le premier membre de cette équation devient, précisément, la fraction proposée ; le second se compose de la somme des fractions simples

$$\frac{C}{(x-a)^n}+\frac{C_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{C_{n-1}}{(x-a)},$$

qui ont pour dénominateurs les puissances $(x-a)$, et d'une fraction rationnelle dont le dénominateur ne contient plus de facteur $(x-a)$. On traitera cette fraction de la même manière que la proposée, pour en déduire les fractions simples relatives aux autres racines, et qui complètent le développement.

288. Cas des racines imaginaires égales. La méthode que nous venons d'exposer ne suppose nullement que les racines multiples de l'équation proposée soient réelles. On doit remarquer seulement que, si elles étaient imaginaires, on pourrait, dans le résultat, grouper les termes deux par deux, de manière à faire disparaître les imaginaires ; mais il sera plus simple d'adopter, dans ce cas, une forme de développement, dont la possibilité résulte du théorème suivant.

Théorème. *Si le dénominateur d'une fraction rationnelle* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *admet* n *fois une racine imaginaire* $(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ *et sa conjuguée* $(\alpha-\beta\sqrt{-1})$, *en sorte que l'on ait :*

$$F(x)=(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^nF_1(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^nF_1(x),$$

on pourra toujours poser

$$[1]\quad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)},$$

P *et* Q *étant des constantes, et* $f_1(x)$ *un polynome réel.*

On a, en effet, identiquement, quels que soient P et Q :

$$[2]\ \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n F_1(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{f(x)-(Px+Q)F_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n F_1(x)}.$$

Or, on peut, évidemment, déterminer P et Q, de manière que le numérateur de la deuxième partie du second membre s'annule pour les hypothèses :

$$x=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad x=\alpha-\beta\sqrt{-1},$$

et soit, par conséquent, divisible par $(x-\alpha)^2+\beta^2$.

Si l'on suppose, en effet,

$$f(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})=M\pm N\sqrt{-1},$$

$$F_1(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})=M'\pm N'\sqrt{-1},$$

la condition demandée équivaudra à

$$(M\pm N\sqrt{-1})-[P(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+Q](M'\pm N'\sqrt{-1})=0:$$

et, en égalant séparément à zéro le coefficient de $\sqrt{-1}$ et l'ensemble des termes réels, on obtiendra deux équations qui fourniront, pour P et Q, des valeurs réelles.

Le numérateur $f(x)-(Px+Q)F_1(x)$ étant divisible par $(x-\alpha)^2+\beta^2$, on peut le représenter par $[(x-\alpha)^2+\beta^2]f_1(x)$, et l'équation [2] devient alors :

$$[3]\quad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{f_1(x)}{[(x-a)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}.$$

Si l'on applique le même procédé de décomposition à la fraction $\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}$, on la mettra sous la forme

$$\frac{P_1x+Q_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\frac{f_2(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-2}F_1(x)},$$

et, en continuant de la même manière, on verra que la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ peut se décomposer de la manière suivante :

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{P_1x+Q_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\ldots$$
$$+\frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f_{n-1}(x)}{F_1(x)},$$

$f_{n-1}(x)$ étant de degré moindre que $F_1(x)$, et n'ayant aucun facteur commun avec lui.

En rapprochant ce résultat de celui qui a été obtenu (285), on obtient le théorème suivant :

289. Théorème. *Si l'on décompose le polynome* $F(x)$ *en facteurs réels du premier et du second degré, en sorte que l'on ait :*

$$F(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^n\ldots(x^2+rx+s)^m,$$

on pourra décomposer la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ *de la manière suivante :*

$$\frac{F(x)}{f(x)}=E(x)+\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}$$
$$+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}$$
$$+\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{(x^2+px+q)}$$
$$+\frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^m}+\ldots+\frac{R_{m-1}x+S_{m-1}}{x^2+rx+s},$$

$E(x)$ désignant une partie entière qui peut être nulle, et $A, A_1\ldots. A_{\alpha-1}, B, B_1\ldots. B_{\beta-1}, P, Q,$ des constantes réelles.

Le procédé, qui nous a servi à prouver la possibilité de la décomposition donne aussi le moyen de l'effectuer : et l'on pourra l'appliquer, pour former les termes qui correspondent aux facteurs du second degré : $x^2+px+q,\ x^2+rx+s\ldots.$

On pourrait démontrer, comme nous l'avons fait (286), que la décomposition en fractions de la forme indiquée précédem-

ment n'est jamais possible que d'une seule manière et déduire de là un moyen de trouver, par la méthode des coefficients indéterminés, les fractions qui répondent à une racine donnée. Mais nous supprimons ces détails, qui ne présentent ni difficulté ni intérêt.

RÉSUMÉ.

282. But de ce chapitre. — **283.** Cas où le dénominateur de la fraction à décomposer n'a pas de racines égales. — **284.** Transformation du résultat dans le cas où il y a des racines imaginaires. — **285.** Cas des racines égales. — **286.** La décomposition sous la forme précédente n'est possible que d'une seule manière. — **287.** Méthode pour calculer les coefficients. — **288.** Cas des racines imaginaires égales. — **289.** Théorème général qui résulte de la théorie exposée dans ce chapitre.

EXERCICES.

I. Si $\varphi(x)=0$ est une équation de degré n, et $a, b, x..., k, l$ ses racines, on a, pour toute valeur de p plus petite que $(n-1)$:

$$0=\frac{a^p}{\varphi'(a)}+\frac{b^p}{\varphi'(b)}+\ldots+\frac{l^p}{\varphi'(l)}.$$

On s'appuie sur la décomposition, en fractions simples, de la fraction $\frac{x^{p+1}}{\varphi(x)}$.

II. $$\frac{3+2x}{(2x-3)(5x-4)}=\frac{\frac{12}{7}}{2x-3}-\frac{\frac{23}{7}}{5x-4}.$$

III. $$\frac{x}{x^2+11x+30}=\frac{6}{x+6}-\frac{5}{x+5}.$$

IV. $$\frac{x}{a^3-x^3}=\frac{1}{3a(a-x)}+\frac{x-a}{3a(x^2+ax+a^2)}.$$

V. $$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}.$$

VI. $$\frac{4+3x}{x(x-1)(x^2+1)}=-\frac{4}{x}+\frac{7}{2(x-1)}+\frac{x-7}{2(x^2+1)}.$$

VII. $$\frac{3+x}{(5-x)^2}=\frac{8}{(5-x)^2}-\frac{1}{5-x}.$$

VIII. $$\frac{5+6x-2x^2}{(3+2x)^3}=-\frac{17}{2(3+2x)^3}+\frac{6}{(3+2x)^2}-\frac{1}{2(3+2x)}.$$

IX. $$\frac{2+3x}{(4-x)^3}=\frac{14}{(4-x)^3}-\frac{3}{(4-x)^2}.$$

X. $$\frac{1+x+x^2+3x^3}{(1-x+5x^2)^2}=\frac{1}{25}\cdot\frac{17+18x}{(1-x+5x^2)^2}+\frac{1}{25}\cdot\frac{8+15x}{1-x+5x^2}.$$

XI. $$\frac{1}{1+x^4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}+x}{1+x\sqrt{2}+x^2}+\frac{\sqrt{2}-x}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right\}.$$

XII. $$\frac{70-114x+143x^2+107x^3+46x^4+8x}{(7+x)(1+x)^5}$$

$$=\frac{7}{7+x}+\frac{5}{(1+x)^5}+\frac{3}{(1+x)^3}+\frac{1}{1+x}.$$

CHAPITRE II.

SUR LES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

§ I. Calcul des expressions imaginaires.

290. BUT DE L'INTRODUCTION DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES DANS LE CALCUL. La résolution des équations du second degré conduit, dans certains cas, à des expressions qui n'ont aucune valeur numérique, et qui renferment l'indication d'opérations impossibles à effectuer. C'est dans un but de généralisation, que l'on a été conduit à employer ces expressions *imaginaires*. Nous avons vu, par exemple, qu'en les adoptant, on a l'avantage de pouvoir énoncer, sans restriction, des théorèmes tels que les suivants :

Toute équation du second degré a deux racines.

Dans toute équation du second degré, de la forme $x^2+px+q=0$, la somme des racines est égale au coefficient du second terme, pris en signe contraire ; et leur produit est égal au terme tout connu.

Ces avantages, qui dans le cas que nous citons, sont à peu près insignifiants deviennent très-importants dans la théorie générale des équations.

Les expressions imaginaires peuvent aussi être introduites utilement dans la solution de quelques questions, comme nous le montrerons dans ce chapitre.

291. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS. On donne le nom d'expression imaginaire à une expression de la forme $a+\sqrt{-K}$ $-K$ désignant un nombre négatif. $\sqrt{-K}$ n'est pas un nombre, en ce sens qu'il ne peut servir de mesure à aucune grandeur ; mais il peut figurer utilement dans les calculs, d'après cette condition que *son carré soit toujours remplacé par* $-K$. Si l'on applique, en outre, aux nombres imaginaires toutes les règles démontrées généralement pour les nombres réels, les opérations relatives à ces nombres seront suffisamment définies, et fourniront toujours, comme on le verra, des résultats de même forme qu'eux.

292. Type de l'expression imaginaire. — K, étant négatif, peut être représenté par un carré pris en signe contraire, $-b^2$; le type d'une expression imaginaire devient alors $a+\sqrt{-b^2}$, que l'on écrit souvent :

$$a+b\sqrt{-1}.$$

Remarque. On substitue à $\sqrt{-b^2}$ l'expression $b\sqrt{-1}$, en vertu de la convention faite plus haut : *appliquer aux nombres imaginaires toutes les règles démontrées généralement pour des nombres réels*. En effet, $-b^2$ peut être considéré comme le produit $b^2\times(-1)$: et, en vertu d'une règle démontrée généralement pour les nombres réels, on peut faire sortir le facteur b^2 du radical.

293. Expressions imaginaires conjuguées. Quels que soient les nombres réels a et b, l'expression imaginaire, $(a+b\sqrt{-1})$, est la racine d'une équation du second degré,

$$(x-a)^2+b^2=0.$$

La seconde racine de cette équation est, comme on le voit facilement, $a-b\sqrt{-1}$.

Les deux racines $(a+b\sqrt{-1})$ et $(a-b\sqrt{-1})$ se nomment les *expressions imaginaires conjuguées* : leur somme est réelle et égale à $2a$ et leur produit égal à (a^2+b^2).

294. Puissances de $\sqrt{-1}$. Dans les calculs que l'on effectue sur les expressions de la forme $(a+b\sqrt{-1})$, on applique (**291**) à ces expressions toutes les règles du calcul algébrique, en opérant comme si $\sqrt{-1}$ était un nombre. Quelques géomètres représentent ce symbole par une lettre i; et, dans les résultats, ils remplacent i^2 par -1 : les puissances successives de i ou $\sqrt{-1}$ se trouvent par là déterminées : car on a :

$$(\sqrt{-1})^3=i^3=i^2\times i=-i=-\sqrt{-1},$$

$$(\sqrt{-1})^4=i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,$$

$$(\sqrt{-1})^5=i^5=i^4\times i=i=\sqrt{-1};$$

et ainsi de suite. On a, en général, n désignant un nombre entier :

$$(\sqrt{-1})^{4n} = (i^4)^n = 1,$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = i^{4n} \times i = i = \sqrt{-1},$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = i^{4n} \times i^2 = i^2 = -1,$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = i^{4n} \times i^3 = i^3 = -\sqrt{-1}.$$

Toutes ces conventions sont nécessaires, si l'on veut pouvoir appliquer aux calculs faits sur les expressions imaginaires, les règles générales relatives aux nombres réels. Elles permettent de démontrer le théorème suivant, qui est fort important.

295. PRODUIT DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES. THÉORÈME. *Si l'on considère un nombre quelconque d'expressions imaginaires,*

$$(a_1 + b_1\sqrt{-1}), (a_2 + b_2\sqrt{-1}), (a_3 + b_3\sqrt{-1}), \ldots (a_n + b_n\sqrt{-1}),$$

que l'on effectue leur produit d'après les règles de la multiplication algébrique, en remplaçant les puissances de $\sqrt{-1}$ par les valeurs indiquées plus haut; quel que soit l'ordre dans lequel on opère, le résultat sera identiquement le même, c'est-à-dire que l'on obtiendra la même partie réelle et le même coefficient réel pour $\sqrt{-1}$.

Si nous remplaçons, en effet, $\sqrt{-1}$ par i, on sait que le résultat sera identiquement le même, quel que soit l'ordre que l'on adopte pour les multiplications successives; et que les coefficients des mêmes puissances de i auront, dans tous les cas, les mêmes valeurs. Si donc, dans les polynomes identiques, on remplace les puissances de i par les valeurs indiquées plus haut, savoir : i^{4n} par 1, i^{4n+1} par $\sqrt{-1}$, i^{4n+2} par -1, i^{4n+3} par $-\sqrt{-1}$, les résultats ne sauraient être différents; or il est tout à fait indifférent de remplacer, à la fin du calcul, chaque puissance de i par sa valeur, ou de faire successivement les substitutions après chaque opération partielle : car ces substitutions se réduisent toutes à remplacer le produit de deux facteurs égaux à i par le facteur -1; et peu importe qu'on le fasse en une fois ou sucessivement.

296. Application. Nous donnerons immédiatement une application du théorème précédent.

Considérons le produit :

$$P=(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1});$$

si on multiplie les deux premiers facteurs, on trouve :

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1};$$

et, en multipliant les deux derniers, on trouve :

$$(a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1};$$

en sorte que l'on a :

$$P=[(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}][(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1}],$$

ou, en effectuant :

$$P=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

D'un autre côté, en multipliant le premier facteur par le troisième, et le second par le quatrième, on a :

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2,$$

$$(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=c^2+d^2;$$

donc :

$$P=(a^2+b^2)(c^2+d^2);$$

ce qui donne la formule :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2,$$

laquelle est, du reste, extrêmement facile à vérifier.

§ II. Introduction des lignes trigonométriques dans les expressions imaginaires.

297. Forme nouvelle de l'expression imaginaire. Les expressions imaginaires peuvent se mettre sous une forme particulière, qui simplifie souvent les calculs auxquels on doit les soumettre.

Soit l'expression $a+b\sqrt{-1}$;

si l'on pose :

$$[1] \qquad a=\rho\cos\varphi, \qquad b=\rho\sin\varphi, \qquad [2]$$

on pourra, quels que soient a et b, trouver pour ρ une valeur positive, et pour φ une valeur moindre que 2π, qui satisfassent à ces deux équations; il suffira de prendre :

$$[3] \qquad \rho^2=a^2+b^2, \qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{b}{a}. \qquad [4]$$

Les équations [3] et [4] se déduisent, en effet, des équations [1] et [2], en ajoutant leurs carrés, et en les divisant membre à membre.

Réciproquement, si ρ et φ ont les valeurs indiquées par les équations [3] et [4], on aura :

$$\cos\varphi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{a}{\pm\sqrt{b^2+a^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}}=\frac{\frac{b}{a}}{\pm\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{b}{\pm\sqrt{b^2+a^2}},$$

et, en remplaçant $\sqrt{b^2+a^2}$ par ρ,

$$\cos\varphi=\frac{a}{\pm\rho}, \qquad \sin\varphi=\frac{b}{\pm\rho};$$

c'est-dire $\quad a=\pm\rho\cos\varphi, \qquad b=\pm\rho\sin\varphi;$

ce qui coïncidera avec les équations [1] et [2], si l'on a soin de prendre pour φ celui des deux angles qui, ayant pour tangente $\frac{b}{a}$, a son sinus de même signe que ρ.

D'après ce qui précède, une expression imaginaire $(a+b\sqrt{-1})$ peut toujours se mettre sous la forme

$$\rho\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et ne peut évidemment s'y mettre que d'une seule manière, (ρ devant être positif et φ moindre que 2π).

ρ se nomme le *module* et φ l'*argument* de cette expression imaginaire. Nous allons voir qu'il y a un avantage de simplicité à mettre les expressions imaginaires sous cette forme.

298 Multiplication des expressions imaginaires. Soit à multiplier les deux expressions :

$$\rho\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi\right),\quad \rho'\left(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\,\sin\varphi'\right).$$

En effectuant le produit, et en remplaçant seulement le carré de $\sqrt{-1}$ par -1, on trouve :

$$\rho\rho'\left[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + \sqrt{-1}\left(\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi'\right)\right]$$
$$= \rho\rho'\left[\cos(\varphi+\varphi') + \sqrt{-1}\,\sin(\varphi+\varphi')\right].$$

Par conséquent, *pour multiplier, l'une par l'autre, deux expressions imaginaires, il faut multiplier les modules et ajouter les arguments.*

La règle précédente permet évidemment de faire le produit d'un nombre quelconque d'expressions imaginaires.

299. Division des expressions imaginaires. *Pour diviser, l'une par l'autre, des expressions imaginaires, il suffit de diviser les modules et de retrancher les arguments.* On a :

$$\frac{\rho\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi\right)}{\rho'\left(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\,\sin\varphi'\right)} = \frac{\rho}{\rho'}\left[\cos(\varphi-\varphi') + \sqrt{-1}\,\sin(\varphi-\varphi')\right].$$

En effet, cette égalité devient évidente, si l'on chasse le dénominateur, et que l'on effectue la multiplication du second membre, d'après la règle donnée précédemment.

300. Puissances d'une expression imaginaire : cas où *m* est entier et positif. Si l'on suppose que les expressions à multiplier deviennent toutes égales entre elles, les théorèmes précédents prouvent que :

La puissance entière d'une expression imaginaire a pour module

la puissance correspondante du module, et pour argument le produit de l'argument par l'indice de la puissance. Ainsi l'on a :

$$[1]\qquad [\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^m = \rho^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi).$$

Cette formule, due à *Moivre*, très-importante en analyse, s'étend, comme nous allons le faire voir, au cas où m désigne un nombre fractionnaire ou négatif.

301. Cas où m est fractionnaire. Supposons d'abord que m y soit remplacé par $\frac{1}{m'}$, m' étant entier, il s'agit de montrer que l'on a :

$$[2]\qquad [\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^{\frac{1}{m'}} = \rho^{\frac{1}{m'}}\left(\cos\frac{\varphi}{m'} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{m'}\right).$$

Pour vérifier cette égalité, élevons les deux membres à la puissance m' : le premier donnera, évidemment, pour résultat, $\rho\left(\cos + \varphi\sqrt{-1}\sin\varphi\right)$; et la règle, donnée pour les puissances entières, montre qu'il en est de même du second.

Remarque. Cos φ et sin φ étant donnés, cos $\frac{\varphi}{m}$ et sin $\frac{\varphi}{m}$, ne sont pas complétement déterminés; ils restent susceptibles de plusieurs valeurs distinctes. Il en résulte aussi des valeurs distinctes pour l'expression

$$[\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^{\frac{1}{m}};$$

ce qui est conforme aux principes indiqués dans la théorie des équations.

Si nous considérons maintenant le cas, où l'exposant m est remplacé par une fraction $\frac{m}{n}$, il faut prouver que :

$$[3]\qquad [\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\varphi}{n}\right).$$

En effet, élever une expression à la puissance $\frac{m}{n}$, c'est, par définition, en prendre la racine n^{me}, puis élever le résultat à la puissance m^{me}. Or, les formules [1] et [2] permettent de faire

successivement ces deux opérations; et l'on est ainsi conduit à la formule [3].

302. Cas où m est négatif. Supposons enfin que m ait une valeur négative $-m'$; il faut prouver que l'on a :

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{-m'}=\rho^{-m'}[\cos(-m'\varphi)+\sqrt{-1}\sin(-m'\varphi)].$$

Pour cela, remarquons que, par définition :

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{-m'}=\frac{1}{[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{m'}};$$

or
$$\frac{1}{[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{m'}}=\frac{1}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)}$$

puisque m' est positif (**300**); mais on a :

$$\frac{1}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)]}=\frac{\cos 0+\sqrt{-1}\sin 0}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)}$$
$$=\rho^{-m'}[\cos(-m'\varphi)+\sqrt{-1}\sin(-m'\varphi)]:$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ III. Applications.

Nous indiquerons quelques applications des formules précédentes.

303. Théorème. *Tout trinome de la forme* x^4+px^2+q *est décomposable en deux facteurs réels du second degré.*

Posons $x^2=z$. Nous distinguerons deux cas :

1° Supposons que l'équation du second degré,

$$z^2+pz+q=0,$$

ait deux racines réelles α et β; on aura :

$$z^2+pz+q=(z-\alpha)(z-\beta);$$

et, par suite :

$$x^4+px^2+q=(x^2-\alpha)(x^2-\beta).$$

2° Supposons que l'équation du second degré,

$$z^2+pz+q=0,$$

ait deux racines imaginaires, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; on aura :

$$z^2+pz+q=(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})(z-\alpha+\beta\sqrt{-1});$$

et, par suite :

$$[1] \quad x^4+px^2+q=(x^2-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x^2-\alpha+\beta\sqrt{-1});$$

ce qui peut s'écrire :

$$x^4+px^2+q=(x-\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}})(x+\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}).$$

$$\times(x-\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}})(x+\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}).$$

Puis, en posant :

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$\alpha-\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et, par suite (**292**),

$$\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

il vient :

$$x^4+px^2+q$$

$$=\left[x-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]\left[x+\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$\times\left[x-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]\left[x+\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

ou, en réunissant le premier et le troisième facteur, et le second et le quatrième, qui, évidemment, sont conjugués :

$$x^4+px^2+q$$

$$=\left[\left(x-\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2+\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]\left[\left(x+\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2+\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}\right];$$

et le trinome est ainsi décomposé en deux facteurs réels
cond degré.

304. Problème. *Exprimer* $\cos m\varphi$ *et* $\sin m\varphi$ *en foncti*
$\cos\varphi$ *et de* $\sin\varphi$.

On a :

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi$$

en développant le premier membre par la formule du bin
et en égalant le résultat au second membre, c'est-à-dire, en
vant que les parties réelles sont égales, ainsi que les pa
imaginaires, on a :

$$\cos m\varphi=\cos^m\varphi-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi+\ldots,$$

$$\sin m\varphi=m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m+3}\varphi\sin^3\varphi+\ldots$$

305. Problème. *Évaluer* $x^m+\frac{1}{x^m}$ *en fonction de* $x+\frac{1}{x}$.

Posons : $x=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi;$

et, par suite : $\frac{1}{x}=\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi;$

on en tire, d'une part :

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\varphi;$$

et, de l'autre :

$$x^m=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi,$$

$$\frac{1}{x^m}=\cos m\varphi-\sqrt{-1}\sin m\varphi;$$

d'où l'on conclut :

$$x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\varphi.$$

Ainsi, la formule, qui donne $\cos m\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$, permettra de calculer $\dfrac{x^m+\dfrac{1}{x^m}}{2}$ en fonction de $x+\dfrac{1}{x}$.

Remarque. Pour obtenir la formule demandée, nous avons supposé à x une valeur imaginaire

$$x=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi;$$

le résultat est-il suffisamment établi pour une valeur réelle quelconque de x? Pour démontrer que la formule est générale, il faut remarquer que, si l'on chasse les dénominateurs, elle est de degré $2m$; et l'on sait, par la théorie des équations, qu'elle doit alors être identique, si elle a lieu pour plus de $2m$ valeurs réelles ou imaginaires de la variable.

RÉSUMÉ.

290. On rappelle que les expressions imaginaires se sont introduites dans un but de généralisation, dont l'importance devient plus grande encore dans la suite de l'algèbre. — 291. Une expression imaginaire, n'étant la mesure d'aucune grandeur, n'est pas un nombre; mais, à l'aide de conventions convenables, elle peut figurer utilement dans les calculs. — 292. On a l'habitude de donner aux expressions imaginaires la forme $(a+b\sqrt{-1})$. — 293. Toute expression imaginaire est racine d'une équation du second degré; l'autre racine se nomme expression conjuguée. — 294. Puissances successives de $\sqrt{-1}$. — 295. Un produit de facteurs imaginaires ne change pas, quand on intervertit les facteurs. — 296. Application du théorème précédent à la démonstration d'une formule d'algèbre entre nombres réels. — 297. Expression trigonométrique des expressions imaginaires; définition du module et de l'argument. — 298. Produit de deux expressions imaginaires. — 299. Quotient de deux expressions imaginaires. — 300. Puissances entières d'une expression imaginaire. — 301, 302. Extension du résultat obtenu au cas d'un exposant fractionnaire ou négatif. — 303, 304, 305. Application des formules précédentes à quelques résultats où ne figurent plus que des quantités réelles.

EXERCICES.

I. Démontrer, sans avoir recours à des expressions trigonométriques, que

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$$

est la forme $$p+q\sqrt{-1}.$$

On applique une méthode analogue à celle qui est exposée (I, 217).

II. Trouver les racines réelles ou imaginaires de l'équation

$$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$$

On trouve : $$x=\pm 8,\quad x=\pm\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{-1}.$$

III. n désignant un nombre impair premier avec 3, $(x+y)^n-x^n-y^n$ s'annule pour $x=y\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$.

On applique la formule de Moivre (300).

IV. Résoudre l'équation

$$x^6-2x^3\cos\varphi+1=0.$$

On trouve 2 valeurs pour x^3, et l'on en tire 6 valeurs pour x, en remplaçant φ par tous les arcs qui ont le même sinus et le même cosinus.

V. Quelles sont les expressions imaginaires, dont la puissance m^{me} est réelle ?

On trouve : $$r\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}\right).$$

VI. Trouver une expression imaginaire, dont le cube soit égal à l'unité. Il en existe deux dont chacune est le carré de l'autre.

On trouve : $$\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

VII. En nommant α l'expression dont le cube est égal à l'unité, vérifier la formule :

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

On effectue les calculs indiqués.

VIII. Le module de la somme de deux expressions imaginaires est plus petit que la somme de leurs modules et plus grand que leur différence.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ.

§ I. Formules générales pour la résolution des équations du troisième degré.

306. Réduction de l'équation générale. Soit l'équation du troisième degré :

[1] $$\varphi(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Posons $$x = x' + h;$$
elle deviendra :

$$\varphi(x'+h) = \varphi(h) + x'\varphi'(h) + \frac{x'^2}{1.2}\varphi''(h) + \frac{x'^3}{1.2.3}\varphi'''(h);$$

et, si nous posons : $$\varphi''(h) = 0,$$

c'est-à-dire $$6h + 2a = 0, \quad \text{ou} \quad h = -3a,$$

l'équation en x' ne contiendra pas de terme en x'^2, et sera de la forme

[2] $$x'^3 + px' + q = 0.$$

C'est sous cette dernière forme que nous étudierons l'équation du troisième degré, en supprimant l'accent de la lettre x.

307. Résolution de l'équation $x^3 = 1$. Nous commencerons par traiter l'équation plus simple

[1] $$x^3 = 1.$$

L'une de ses racines est, évidemment, $x = 1$. Pour avoir les deux autres, écrivons la proposée sous la forme

$$x^3 - 1 = 0,$$

et divisons le premier membre par $(x-1)$; nous obtiendrons :

$$x^2+x+1=0,$$

dont les racines sont : $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

L'unité a donc une racine cubique réelle, égale à 1, et deux racines cubiques imaginaires ; dans ce qui va suivre, nous représenterons l'une de ces dernières par la lettre α ; l'autre sera α^2, comme on peut facilement le vérifier :

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{-3}-3}{4}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Il est clair, d'ailleurs, que, si l'on a :

$$\alpha^3=1,$$

on a aussi : $\alpha^6=1$, ou $(\alpha^2)^3=1$;

donc α^2 doit être racine de l'équation [1], toutes les fois que α y satisfait lui-même.

308. Résolution algébrique de l'équation du troisième degré. Reprenons actuellement l'équation,

$$[1] \qquad x^3+px+q=0,$$

à laquelle peut se ramener (**306**) toute équation du troisième degré ; posons, pour la résoudre :

$$x=y+z;$$

elle deviendra :

$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0;$$

ce que l'on peut écrire :

$$y^3+z^3+(y+z)(3yz+p)+q=0.$$

y et z étant assujettis à la seule condition d'avoir pour somme la racine cherchée x, nous pouvons établir entre elles une relation arbitraire, et poser

$$[2] \qquad 3yz+p=0;$$

l'équation devient alors :

$$[3] \qquad y^3+z^3+q=0.$$

Or, on résoudra les équations [2] et [3], en remarquant qu'elles font connaître la somme et le produit des quantités y^3 et z^3; on a, en effet :

$$y^3z^3=-\frac{p^3}{27}, \quad y^3+z^3=-q;$$

y^3 et z^3 sont donc les racines de l'équation,

$$u^2+qu-\frac{p^3}{27}=0;$$

et, par conséquent, ces deux quantités sont respectivement :

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \quad -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

On en déduit :

$$[4] \quad x=y+z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

309. Nombre des racines fournies par la formule. La formule précédente exige quelques explications. Un nombre quelconque A a trois racines cubiques, puisque l'équation $x^3=A$ admet nécessairement trois racines. Pour obtenir ces trois racines, il suffit d'en connaître une seule, et de la multiplier successivement par α et par α^2; ce qui, évidemment, ne change pas son cube (**307**).

D'après cela, la formule [4] qui donne la valeur de x, semble fournir neuf solutions; car chaque radical a trois valeurs, et rien n'indique la dépendance à établir entre elles. On doit remarquer pourtant, que cette dépendance existe; nous avons, en effet :

$$[2] \qquad yz=-\frac{p}{3};$$

le produit des deux radicaux doit donc être réel et égal à $-\frac{p}{3}$.

Soient, d'après cela, A et B deux valeurs des racines cubiques remplissant cette condition ; de telle sorte que l'une des racines de l'équation proposée soit :

$$x_1 = A + B;$$

les valeurs de y et de z sont, outre A et B :

$$\alpha A, \qquad \alpha^2 A,$$

$$\alpha B, \qquad \alpha^2 B;$$

et il est clair que, le produit AB étant réel, les seules combinaisons qui puissent également donner un produit réel, sont :

$$x_2 = \alpha A + \alpha^2 B,$$

$$x_3 = \alpha B + \alpha^2 A;$$

et le nombre des solutions se réduit à trois, comme cela devait être.

§ II. Conditions de réalité des racines de l'équation $x^3 + px + q + 0$.

310. Examen des cas qui peuvent se présenter. On peut remarquer d'abord que les équations

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0, \\ x^3 + px - q = 0, \end{cases}$$

ont leurs racines égales et de signes contraires ; car, si l'hypothèse $x = \alpha$ vérifie l'une, l'hypothèse $x = -\alpha$ satisfera à l'autre.

D'après cela, nous nous bornerons à chercher dans quel cas l'équation

$$[1] \qquad x^3 + px + q = 0$$

peut admettre trois racines réelles, q désignant un nombre positif.

La règle de Descartes nous apprend tout d'abord, qu'il faut nécessairement que p soit négatif. S'il en était autrement,

l'équation [1] n'aurait, en effet, aucune variation; et la transformée en $-x$

$$-x^3-px+q=0$$

n'en aurait qu'une seule. L'équation aurait, par suite, une seule racine négative, et n'aurait pas de racines positives.

311. Conditions de réalité. Examinons donc le seul cas où p est négatif. L'équation a alors, d'après la règle de Descartes, une seule racine négative; elle peut avoir deux racines positives, ou n'en pas avoir du tout. Ce sont ces deux cas que nous voulons distinguer.

L'équation proposée peut s'écrire:

$$q=-x^3-px=x(-p-x^2),$$

p étant un nombre positif.

Si x varie de 0 à $\sqrt{-p}$, le produit $x(-p-x^2)$ est d'abord nul; il augmente jusqu'à un certain maximum; puis il diminue, et redevient nul pour $x=\sqrt{-p}$. Si donc le maximum surpasse q, il y aura deux valeurs de x, pour lesquelles ce produit sera égal à q; et l'équation aura deux racines positives, moindres que $\sqrt{-p}$. Si le maximum du second membre est moindre que q, l'égalité est impossible pour les valeurs de x comprises entre 0 et $\sqrt{-p}$, et, par suite, pour toutes les valeurs positives de x; car le second membre deviendrait négatif, si x^2 était plus grand que $-p$. S'il arrive enfin, que le maximum du second membre soit précisément égal à q, l'égalité ne pourra avoir lieu que pour une seule valeur de x; et les deux racines deviendront égales.

La condition de réalité des trois racines s'obtiendra donc en cherchant le maximum de

$$x(-p-x^2),$$

et en écrivant qu'il est moindre que q. Or, ce maximum correspond à la valeur de x qui rend la dérivée égale à zéro, et qui satisfait, par suite, à l'équation:

$$-p-3x^2=0.$$

Pour cette valeur, $\sqrt{-\frac{p}{3}}$, le produit $x(-p-x^2)$, devient :

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{-\frac{4p^3}{27}};$$

la condition de réalité des trois racines est donc :

$$q<\sqrt{-\frac{4p^3}{27}},$$

ou

$$4p^3+27q^2<0.$$

Il faut en outre, comme on l'a vu, que p soit négatif; mais cette condition est évidemment nécessaire à l'exactitude de l'inégalité précédente; et il est inutile de la mentionner à part.

312. Résumé. D'après ce qui précède, et en nous servant des principes généraux de la théorie des équations, nous pouvons établir les propositions suivantes, relatives à l'équation

$$[1] \qquad x^3+px+q=0.$$

1° La *somme* des trois racines est égale à zéro. Si l'une d'entre elles est imaginaire et de la forme $(\alpha+\beta\sqrt{-1})$, il y aura nécessairement encore une autre racine imaginaire de la forme $(\alpha-\beta\sqrt{-1})$; et il n'y en aura qu'une seule.

2° Le *terme* tout connu est égal au produit des trois racines pris en signe contraire. Si deux équations de la forme [1] ne diffèrent entre elles que par le signe du terme connu, leurs racines seront respectivement égales, mais de signes contraires

Ainsi, par exemple, les racines de l'équation,

$$x^3-39x+70=0,$$

étant 2, 5 et -7, celles de l'équation

$$x^3-39x-70=0$$

seront -2, -5 et $+7$.

3° Lorsque p est *positif*, l'équation admet deux racines imaginaires.

4° Lorsque le p est *positif*, l'équation admet deux racines imaginaires.

5° Lorsque p est *négatif*, l'équation a trois racines *réelles* et *inégales*, si $\left(\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\right)$ est négatif; elle a trois racines *réelles*, dont deux *égales*, si $\left(\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\right)$ est zéro. Enfin elle a deux racines *imaginaires*, si $\left(\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\right)$ est positif.

Ainsi, par exemple, les équations suivantes ont :

$$\left.\begin{aligned} x^3+100x\pm16&=0\\ x^3+\ \ 12x\pm16&=0\\ x^3\qquad\ \ \pm16&=0\\ x^3-\ \ \ 7x\pm16&=0\end{aligned}\right\}\text{2 racines imaginaires;}$$

$$x^3-\ 12x\pm16=0\quad\text{2 racines réelles égales;}$$

$$\left.\begin{aligned} x^3-\ \ 20x\pm16&=0\\ x^3-100x\pm16&=0\end{aligned}\right\}\text{3 racines réelles inégales.}$$

§ III. Résolution trigonométrique des équations du troisième degré.

313. Cas des racines réelles. Nous allons maintenant montrer comment, à l'aide des fonctions trigonométriques, on peut déterminer directement toutes les racines, réelles ou imaginaires, d'une équation du troisième degré.

1er Cas. Racines réelles. Condition :

$$\left(\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\right)<0.$$

Lorsque l'équation [1] a ses trois racines réelles et inégales, la quantité sous le radical du second degré (**308**) est négative ; et la valeur [4] de x est la somme de deux quantités imaginaires. Pour la débarrasser de ces symboles imaginaires, posons :

$$-\frac{q}{2}=\rho\cos\varphi,\quad \text{et}\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\rho^2\sin^2\varphi;$$

la formule [4] deviendra :

$$x=\sqrt[3]{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi\sqrt{-1}}$$

et, d'après la formule de Moivre (302), on aura :

$$x=\sqrt[3]{\rho}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}.\sqrt{-1}\right)$$

$$+\sqrt[3]{\rho}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}.\sqrt{-1}\right).$$

formule où l'on doit donner à k les valeurs 0, 1, 2. Il faut d'ailleurs que k ait la même valeur dans ces deux termes, pour que le produit yz soit réel.

On aura donc : $\quad x=2\sqrt[3]{\rho}.\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{3},$

ce qui donne, pour les trois valeurs de k :

$$x=2\sqrt[3]{\rho}.\cos\frac{\varphi}{3},\quad 2\sqrt[3]{\rho}.\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right),\quad 2\sqrt[3]{\rho}.\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right),$$

ou

$$x=2\sqrt[3]{\rho}.\cos\frac{\varphi}{3},\quad -2\sqrt[3]{\rho}.\cos\left(60^\circ-\frac{\varphi}{3}\right),\quad 2\sqrt[3]{\rho}.\cos\left(120^\circ-\frac{\varphi}{3}\right).$$

Pour déterminer les valeurs de ρ et de φ (ρ étant essentiellement positif), on a :

$$\rho^2\cos^2\varphi=\frac{q^2}{4},\quad -\rho^2\sin^2\varphi=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27},$$

donc: $\quad \rho^2=-\dfrac{p^3}{27},\quad$ ou $\quad \rho=\sqrt{-\dfrac{p^3}{27}},$

et $\quad \cos\varphi=-\dfrac{q}{2\rho}.$

Remarque. Si la valeur, que la formule précédente assigne à $\cos\varphi$, est négative, on cherchera dans les tables l'arc φ', qui a pour cosinus le même nombre pris positivement; et φ sera le supplément de φ'.

314. Exemple I. *Partager un hémisphère en deux parties égales par un plan parallèle à la base.*

Soient : x la distance du plan sécant au centre de la sphère ;

y le rayon de la section circulaire ;

$r = 1$ le rayon de la sphère.

On aura l'équation :

$$\frac{2r^2\pi}{3}(r - x) - \frac{xy^2\pi}{3} = \frac{r^3\pi}{3}.$$

Or $$y^2 = r^2 - x^2;$$

donc $$2(1 - x) - x(1 - x^2) = 1;$$

ou $$x^3 - 3x + 1 = 0;$$

équation qui donnera la valeur de x.

Nous avons ici : $p = -3, \quad q = 1;$

donc : $$\rho = \sqrt[3]{\frac{27}{27}} = 1, \text{ et } \cos\varphi = -\frac{q}{2\rho} = -\frac{1}{2};$$

donc $$\varphi = 120^\circ, \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{3} = 40^\circ.$$

Les trois racines de l'équation proposée sont donc :

$$\begin{cases} x_1 = 2\cos 40^\circ = 1{,}5320888, \\ x_2 = -2\cos 20^\circ = -1{,}8793852, \\ x_3 = 2\cos 80^\circ = 0{,}3472964. \end{cases}$$

On vérifie que $$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Parmi ces trois racines, il n'y a que la dernière qui réponde au problème proposé; car seule elle est positive et inférieure au rayon de la sphère.

315. Exemple II. *Déterminer les abscisses des points d'intersection de la parabole* $x^2 = 4y$, *et de l'hyperbole* $4xy = 7(x - 1)$.

Par élimination de y, on obtient l'équation :

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

dont les racines déterminent les abscisses des points d'intersection. On a :

$$p = -7, \quad q = +7;$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log(-p^3) &= 2{,}53529412 & \log q &= 0{,}84509804 \\
\log 27 &= 1{,}43136376 & \text{C}^t.\log 2 - 10 &= \bar{1}{,}69897000 \\
\hline
\log \rho^2 &= 1{,}10393036 & \text{C}^t.\log \rho - 10 &= \bar{1}{,}44803482 \\
\cline{3-4}
\log \rho &= 0{,}55196518 & \log \cos \varphi' &= \bar{1}{,}99210286
\end{array}$$

$$\log \sqrt[3]{\rho} = 0{,}18398839 \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi' = 10^\circ\, 53'\, 36'',195 \\ \varphi = 169^\circ\ \ 6'\, 23'',805 \end{array}\right.$$

$$\frac{\varphi}{3} = 56^\circ\, 22'\, 7'',935, \quad \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = 3^\circ\, 37'\, 52'',065, \quad \left(120^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = 63^\circ\, 37'\, 52'',065$$

$$\begin{array}{rlrlrl}
\log \cos &= \bar{1}{,}7433874 & \log \cos &= \bar{1}{,}9991272 & \log \cos &= \bar{1}{,}6475281 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 & &= 0{,}3010300 & &= 0{,}3010300 \\
\log \sqrt[3]{\rho} &= 0{,}1839884 & &= 0{,}1839884 & &= 0{,}1839884 \\
\hline
\log x_1 &= 0{,}2284058 & \log(-x_2) &= 0{,}4841456 & \log x_3 &= 0{,}1325465 \\
x_1 &= 1{,}692021, & x_2 &= -3{,}048917, & x_3 &= 1{,}356893
\end{array}$$

Vérification.

$$\begin{array}{rlrl}
x_1 &= 1{,}692021 & \log x_1 &= 0{,}2284058 \\
x_2 &= -3{,}048917 & \log x_2 &= 0{,}4841456 \\
x_3 &= 1{,}356896 & \log x_3 &= 0{,}1325465 \\
\hline
x_1 + x_2 + x_3 &= 0. & \log x_1 x_2 x_3 &= 0{,}8450979 \\
& & x_1 x_2 x_3 &= 7.
\end{array}$$

316. 2° Cas. Racines imaginaires. Condition :

$$\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right) > 0$$

1° Cas où p est négatif. On a :

$$\frac{q^2}{4} > -\frac{p^3}{27},$$

et l'on peut poser, par conséquent :

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \sin \omega.$$

On aura alors :

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega}=\sqrt[3]{-q\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

et
$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega}=\sqrt[3]{-q\cos^2\frac{\omega}{2}},$$

ou, en remplaçant q par sa valeur $\frac{2}{\sin\omega}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$,

$$y=\sqrt{-\frac{p}{3}}.\sqrt[3]{\tang\frac{\omega}{2}} \quad \text{et} \quad z=\sqrt{-\frac{p}{3}}.\sqrt[3]{\cot\frac{\omega}{2}}.$$

Soit maintenant φ un angle auxiliaire déterminé par l'équation :

$$\tang\varphi=\sqrt[3]{\tang\frac{\omega}{2}},$$

on aura : $y=\sqrt{-\frac{p}{3}}.\tang\varphi,\quad z=\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cot\varphi;$

et, par suite, les valeurs de x seront :

$$\sqrt{-\frac{p}{3}}.[\tang\varphi+\cot\varphi]=\sqrt{-\frac{p}{3}}.\frac{2}{\sin 2\varphi},$$

et $-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}.[\tang\varphi+\cot\varphi]\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}.\sqrt{-p}.[\tang\varphi-\cot\varphi],$

ou
$$-\frac{1}{\sin 2\varphi}\sqrt{-\frac{p}{3}}\pm\sqrt{-1}.\sqrt{-p}.\cot 2\varphi;$$

formules calculables par logarithmes.

On cherchera d'abord :

1° $\sin\omega=\frac{2}{q}\sqrt{-\frac{p^3}{27}},$

ensuite, 2° $\tang\varphi=\sqrt[3]{\tang\frac{\omega}{2}},$

après, 3° $x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{cos\acute{e}c}2\varphi,$

et enfin, 4° $x=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{cos\acute{e}c}2\varphi\pm\sqrt{-1}.\sqrt{-p}\cot 2\varphi$

Quant aux signes des racines, on tiendra compte de ce que la racine réelle est toujours de signe contraire à celui du terme tout connu de l'équation, et que la somme des trois racines est nulle.

317. Exemple III. $x^3 - 10,871385x + 18,01032 = 0$.

On a : $p = -10,871385, \quad q = +18,01032;$

donc : $$\log\left(-\frac{p^3}{27}\right) = 1,6774908,$$

et $$\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = 0,8387454;$$

mais $$\log 2 = 0,3010300,$$
et $$\text{C}^t.\log q - 10 = \bar{2},7444786,$$
1° donc $$\log\sin\omega = \bar{1},8842540;$$

de là : $$\omega = 50^\circ, \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{2} = 25^\circ$$

$$\log\text{tang}^2\varphi = \log\text{tang}\frac{\omega}{2} = \bar{1},6686725;$$

2° donc : $$\log\text{tang}\,\varphi = \bar{1},8895575;$$
de là $$\varphi = 37^\circ\,47'\,31'',287$$
et $$2\varphi = 75^\circ\,35'\;\;2'',574;$$

3° $$\log\sqrt{-\frac{p}{3}} = 0,2795818 \qquad \log\sqrt{-p} = 0,5181424$$
$$\log 2 = 0,3010300 \qquad \log\cot 2\varphi = \bar{1},4100229$$
$$\text{C}^t.\log\sin 2\varphi - 10 = 0,0138941 \qquad \log\sqrt{-p}\cot 2\varphi = \bar{1},9281653$$
$$\log x_1 = 0,5945059 \qquad \sqrt{-p}\cot 2\varphi = 0,8475501$$
$$x_1 = 3,931026.$$

Donc les trois racines sont :

$$x = -3,931026,$$

et $$x = +1,960513 \pm 0,8475501 \times \sqrt{-1}.$$

318. Exemple IV. *Déterminer les dimensions d'un cylindre*

inscrit à la sphère, et tel que sa surface convexe soit égale à la surface convexe des deux calottes, qui ont même base que lui.

Soient : $r=1$ le rayon de la sphère,

y le rayon de la base du cylindre,

et x la distance de cette base au centre de la sphère.

On aura :
$$4\pi(1-x)=4xy\pi;$$
mais
$$y=\sqrt{1-x^2};$$
donc :
$$1-x=x^2(1+x),$$
ou
$$x^3+x^2+x-1=0.$$

Posons :
$$x=\frac{z-1}{3},$$
l'équation deviendra :
$$z^3+6z-34=0.$$

On a ici :
$$p=6,\quad q=-34;$$
mais, dans cette équation :
$$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=297;$$
donc l'équation a deux racines imaginaires, dont nous ne nous occuperons pas.

En résolvant directement l'équation proposée, à l'aide de la formule (299), nous aurons :
$$z=\sqrt[3]{17+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{17-\sqrt{297}},$$
$$=\sqrt[3]{34,2336879396}-\sqrt[3]{0,2336879396}.$$

En se servant des tables de logarithmes pour extraire les racines cubiques, on aura :
$$z=3,2470172-0,6159499$$
ou
$$z=2,6310673;$$

donc $$x = 0{,}5436891;$$

et $$2x = 1{,}0873782, \text{ hauteur du cylindre.}$$

319. 2° Cas où p est positif : on posera :

$$[1] \qquad \sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\operatorname{tang}\omega;$$

il vient alors :

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q\sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}} \quad \text{et} \quad z = \sqrt[3]{\frac{-q\cos^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}},$$

ou, en remplaçant q par $2\cot\omega\sqrt{\frac{p^3}{27}}$,

$$y = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}}, \quad \text{et} \quad z = -\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\cot\frac{\omega}{2}}.$$

Posant, comme plus haut :

$$[2] \qquad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}};$$

il vient : $y = \sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{tang}\varphi, \quad z = -\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi;$

et les racines cherchées sont :

$$[3] \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi \pm \sqrt{-p}\,.\operatorname{coséc} 2\varphi. \\ x &= -\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi; \end{aligned} \right.$$

320. Exemple. V. Soit l'équation :

$$x^3 + 2{,}3473983x - 9{,}876543 = 0.$$

$$q = -9{,}876543, \qquad p = 2{,}3473983,$$

$$\log(-q) = 0{,}9946050, \qquad \log p = 0{,}3705868;$$

donc : $$\log \frac{p^3}{27} = \bar{1},6803966$$

$$\log \frac{p^3}{27} = \bar{1},6803966$$

$$\log \sqrt{\frac{p^3}{27}} = \bar{1},8401983$$

$$\log = 0,3010300$$

$$C^t.\log(-q) - 10 = \bar{1},0053950$$

Donc : [1] $$\log \text{tang}\, \omega = \bar{1},1466233$$

De là : $$\omega = 7^\circ\, 58'\, 42'',91$$

$$\frac{\omega}{2} = 3^\circ\, 59'\, 21'',455 ;$$

d'où $$\log \text{tang} \frac{\omega}{2} = \log \text{tang}^2 \varphi = \bar{2},8434760 ;$$

donc [2] $$\log \text{tang}\, \varphi = \bar{1},6144920 ;$$

et de là : $$\varphi = 22^\circ\, 22'\, 22'',22$$

$$2\varphi = 44^\circ\, 44'\, 44'',44.$$

Or : $$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log \cot 2\varphi = 0,0038555 \qquad C^t.\log \sin 2\varphi - 10 = 0,1524513$$

$$\log \sqrt{\frac{-p}{3}} = \bar{1},9467328 \qquad \log \sqrt{-p} = 0,1852934$$

Donc [3] $$\log x_1 = 0,2516183 \qquad \log \frac{\sqrt{-p}}{\sin 2\varphi} = 0,3377447$$

$$x_1 = 1,784918 ; \qquad \frac{\sqrt{-p}}{\sin 2\varphi} = 2,1764300$$

et les racines de l'équation proposée sont :

$$x_1 = 1,784918,$$

$$x = -0,892459 \pm 2,176430 \times \sqrt{-1}.$$

RÉSUMÉ.

306. Réduction de l'équation générale du troisième degré à la forme $x^3+px+q=0$. — 307. Résolution de l'équation $x^3=1$. — 308. Résolution algébrique de l'équation $x^3+px+q=0$. — 309. On montre que la formule fournit trois racines seulement. — 310. Discussion des cas où les trois racines ne sauraient être réelles. — 311. Condition de réalité des racines. — 312. Résumé. — 313. Résolution des équations du troisième degré par le moyen des tables trigonométriques; cas des racines réelles. — 314, 315. Exemples. — 316. Cas où il y a deux racines imaginaires, le coefficient du second terme étant négatif. — 317, 318. Exemples. — 319. Cas où ce coefficient est positif. — 320. Exemples.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

§ I. Méthode générale; exemples.

321. Problème. Nous commencerons par résoudre la question suivante :

Quelle est la condition pour qu'une équation du second degré,

[1] $$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

fournisse, pour l'inconnue y, *une valeur de la forme* M x + N, M *et* N *étant indépendants de* x.

On déduit de l'équation [1], en la considérant comme une équation du second degré en y :

[2] $$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)}.$$

Pour que cette valeur de y ait la forme demandée, il est nécessaire et suffisant que le polynome placé sous le radical

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF),$$

soit un carré parfait; et, pour cela, on doit avoir

$$(BD-2AE)^2=(B^2-4AC)(D^2-4AF);$$

ou, en supprimant les termes B^2D^2 qui figurent dans les deux membres, et en divisant ensuite par le facteur commun $4A$,

[3] $$-BDE+AE^2=4ACF-FB^2-CD^2;$$

telle est la condition demandée. Si elle est remplie, la valeur de y prend la forme :

[4] $$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right).$$

322. Méthode générale de résolution. Proposons-nous actuellement de résoudre le système de deux équations numériques du second degré :

$$[5] \qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

$$[6] \qquad A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0.$$

Si nous ajoutons ces deux équations, après avoir multiplié la première par λ, le résultat pourra remplacer l'une d'elles. On obtient ainsi :

$$[7] \qquad (A\lambda+A')y^2+(B\lambda+B')xy+(C\lambda+C')x^2+(D\lambda+D')y$$
$$+(E\lambda+E')x+(F\lambda+F')=0.$$

λ étant arbitraire, nous pouvons la déterminer par la condition que les valeurs de y, déduites de l'équation [7], soient du premier degré en x.

Il suffira (**321**) de poser :

$$[8] \qquad -(B\lambda+B')(D\lambda+D')(E\lambda+E')+(A\lambda+A')(E\lambda+E')^2$$
$$=4(A\lambda+A')(C\lambda+C')(F\lambda+F')-(F\lambda+F')(B\lambda+B')^2$$
$$-(C\lambda+C')(D\lambda+D')^2,$$

équation du troisième degré en λ, qui aura, par conséquent, une racine réelle au moins. On calculera cette racine par approximation ; et, en faisant usage de la formule [4] (**321**), on obtiendra alors, pour y, deux valeurs de la forme :

$$y=Mx+N, \quad y=M_1x+N_1$$

M, N, M_1, N_1, étant connus en fonction de la racine λ, en substituant successivement ces valeurs de y dans l'une des équations [5] et [6], on obtiendra deux équations du second degré en x; il y aura, par conséquent, en tout, quatre valeurs pour x et autant pour y.

323. Discussion. Il y a plusieurs cas à considérer dans l'application de la méthode précédente ; nous les discuterons avec quelques détails. Pour plus de simplicité, nous remarquerons tout d'abord, que le problème revient à déterminer l'intersection

de deux courbes du second degré. La méthode indiquée équivaut à la détermination préalable des droites qui réunissent deux des points d'intersection.

1° Si l'équation du troisième degré en λ admet trois racines réelles, et si, en même temps, deux au moins de ces racines rendent positives la quantité

$$(B\lambda+B')^2-4(A\lambda+A')(C\lambda+C')=k,$$

ces deux racines déterminent deux couples de sécantes réelles, qui se coupent en général en quatre points. Ces quatre points sont les points d'intersection des deux courbes, et leurs coordonnées donnent les solutions des équations proposées.

2° Si l'équation du troisième degré a trois racines réelles, dont une seule rend positive la quantité k; ou, si l'équation n'a qu'une seule racine réelle, mais qui satisfasse à cette condition, les deux courbes n'admettent qu'un seul couple de sécantes communes.

Il faudra alors chercher, si ces sécantes rencontrent l'une quelconque des courbes proposées ou non : dans le premier cas, les deux équations auront deux solutions réelles et deux solutions imaginaires; dans le second cas, elles auront quatre solutions imaginaires.

3° Si enfin les racines réelles de l'équation en λ rendent négative la quantité k, les deux équations ont quatre solutions imaginaires.

324. Exemple I. *Soient données les deux équations :*

$$3y^2+4xy+3x^2-9y-15x=0 \text{ (ellipse)},$$

$$y^2-2xy+x^2+2y-10x=0 \text{ (parabole)}.$$

Ces deux équations, combinées ensemble, donnent l'équation

$$(3+\lambda)y^2+(4-2\lambda)xy+(3+\lambda)x^2-(9-2\lambda)y-(15+10\lambda)x=0;$$

et l'on obtient pour l'équation [8] ;

$$32\lambda^3+388\lambda^2+564\lambda+189=0.$$

Cette équation a trois racines réelles et négatives, qui sont :

$$\lambda=-\tfrac{1}{2},\quad \lambda=-\tfrac{9}{8},\quad \lambda=-\tfrac{21}{2}.$$

La quantité $$k=-20(1+2\lambda)$$

étant positive ou nulle pour chacune des trois valeurs de λ, les courbes données admettent trois systèmes de sécantes communes réelles, dont les points d'intersection se confondent avec ceux des deux courbes.

Il ne s'agit plus que de déterminer deux systèmes de sécantes et de chercher leurs points de rencontre.

Pour $$\lambda=-\tfrac{1}{2},$$

les deux équations du premier degré sont :

$$y=-x+2\pm2,$$

système de deux droites parallèles.

Pour $$\lambda=-\tfrac{21}{2},$$

nous aurons : $$y=\frac{5x}{3}-2\pm\left(\frac{4x}{3}+2\right).$$

Les points d'intersection des quatre sécantes sont :

$$x=0,\quad y=0,$$

$$x=1,\quad y=3,$$

$$x=3,\quad y=-3,$$

$$x=6,\quad y=-2.$$

Ces quatre points sont les sommets d'un trapèze dont les côtés sont formés par les quatre sécantes. Les deux autres sécantes, correspondant à $\lambda=-\tfrac{9}{8}$, seraient les diagonales du trapèze.

325. Exemple II. *Déterminer les points d'intersection des courbes*

$$xy-3x+6=0 \ (\textit{hyperbole}),$$

$$x^2-9y=0 \ (\textit{parabole}).$$

Si, dans la première de ces deux équations, on substitue à y sa valeur tirée de la seconde équation,

$$y=\frac{x^2}{9},$$

on obtient immédiatement l'équation du troisième degré :

$$x^3-27x+54=0,$$

dont les racines déterminent les points d'intersection des deux courbes. Cette équation a trois racines réelles, deux positives égales, $x=3$, et une négative, $x=-6$.

A ces deux abscisses correspondent les ordonnées

$$y=1 \quad \text{et} \quad y=4;$$

donc les deux courbes se *touchent* au point $(3,1)$, et se coupent au point $(-6,4)$.

326. Exemple III. *Soient données les deux équations*

$$y^2+x^2-2x=0 \ (\textit{cercle}),$$
$$2xy-1=0 \ (\textit{hyperbole});$$

l'équation résultant de la combinaison sera :

$$y^2+2\lambda xy+x^2-2x-\lambda=0$$

et en écrivant que cette équation représente deux droites, on trouvera :

$$\lambda^3-\lambda-1=0.$$

Cette dernière équation a une racine réelle et deux racines imaginaires.

Pour évaluer la racine réelle, nous nous servirons des formules données (**316**) ; nous aurons alors :

$$\log\sin\omega=\bar{1},585\,3481,$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}=\bar{1},301\,3783,$$
$$\log\operatorname{tang}\varphi=\bar{1},767\,1261,$$
$$\log\sin 2\varphi=\bar{1},940\,3459,$$
$$\log\lambda=0,122\,1235,$$
$$\lambda=1,324\,718;$$

la quantité $k=4(\lambda^2-1)$ ou $\frac{4}{\lambda}$, étant positive pour la valeur de λ que nous venons de trouver, les deux équations du premier degré,

$$y=-\lambda x\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x+\lambda),$$

auront leurs coefficients réels; et, par conséquent, les deux courbes admettent un système de deux sécantes réelles communes.

En substituant ces deux valeurs de y dans l'équation :

$$2xy-1=0,$$

on arrive à l'équation du second degré :

$$2x^2\left(-\lambda\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\pm\frac{2\lambda x}{\sqrt{\lambda}}-1=0.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles, il faut que l'on ait :

$$-\lambda\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}>0.$$

Si nous prenons le signe inférieur, le premier membre devient négatif, et la condition de réalité n'est pas remplie; par conséquent, la droite

$$y=-\lambda x-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}(x+\lambda)$$

ne rencontre pas la courbe.

Si, au contraire, nous prenons le signe supérieur, le premier membre devient positif, et la sécante

$$y=-\lambda x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x+\lambda)$$

rencontre la courbe en deux points.

En substituant à λ et $\sqrt{\lambda}$ leurs valeurs numériques, la dernière équation deviendra :

$$y = -0,455881x + 1,150964;$$

équation qui, combinée avec celle de la courbe,

$$2xy - 1 = 0,$$

donne les deux solutions réelles des équations proposées

$$x = 1,967160, \qquad y = 0,254173,$$

et

$$x = 0,557424, \qquad y = 0,896791.$$

327. Exemple IV. *Résoudre les deux équations :*

$$4y^2 + 9x^2 - 36x = 0 \text{ (ellipse)},$$

$$xy - 12 = 0 \text{ (hyperbole)}$$

L'équation de condition est :

$$\lambda^3 - 144\lambda - 432 = 0.$$

Cette équation a ses trois racines réelles ; la première positive, et comprise entre 13 et 14 ; les deux autres négatives, et comprises entre -3 et -4, et entre -10 et -11.

Parmi ces trois racines, il n'y a que la première qui rende positive la quantité

$$k = \lambda^2 - 144 = \frac{432}{\lambda};$$

par conséquent, il n'y a qu'un seul couple de sécantes réelles, dont l'équation est :

$$y = -\frac{\lambda x}{8} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\left(x + \frac{2\lambda}{3}\right);$$

mais nous allons démontrer directement qu'aucune de ces deux droites ne peut rencontrer les courbes ; car en substituant la valeur de y dans la seconde des deux équations proposées,

$$xy - 12 = 0$$

on obtient les deux équations du second degré

$$x^2\left(-\frac{\lambda}{8}\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)\pm x\sqrt{3\lambda}-12=0.$$

La condition de réalité des valeurs de x est :

$$3\lambda+48\left(-\frac{\lambda}{8}\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)>0,$$

ou

$$-\lambda\pm 24\sqrt{\frac{3}{\lambda}}>0.$$

Il est évident que cette condition n'est pas satisfaite, lorsqu'on prend le signe négatif; car alors tous les termes du membre à gauche seraient négatifs.

Mais comme on a $\lambda>13$, la condition n'est pas remplie non plus, lorsqu'on prend le signe positif.

Par conséquent, les deux droites ne peuvent pas rencontrer les courbes ; donc les deux équations proposées n'ont que des racines imaginaires.

328. Exemple V. *Soient données les deux hyperboles,*

$$4y^2-4xy+9=0,$$

$$8xy-42y+9=0;$$

déterminer leurs points d'intersection

La valeur de y, tirée de la seconde équation et substituée dans la première, conduit à l'équation du second degré en x,

$$4x^2-35x+75=0,$$

équation qui a deux racines réelles $x=5$ et $x=3\frac{3}{4}$.

Les valeurs correspondantes de y sont $y=\frac{9}{2}$ et $y=\frac{3}{4}$.

Mais les deux courbes proposées sont des hyperboles, rapportées à une asymptote commune prise pour axe des abscisses; donc, en outre des deux points d'intersection que nous venons de trouver, elles ont encore deux autres points de rencontre éloignés à l'infini de l'origine.

En effet, lorsqu'on remplace x par $\frac{1}{z}$, et qu'on égale les valeurs de y tirées de la première et de la seconde des équations proposées, on obtient l'équation du quatrième degré,

$$5z^2 - 35z^3 + 75z^4 = 0,$$

Les quatre racines de cette équation sont :

$$z^2 = 0, \quad \text{donc} \quad z = 0,$$

$$z = \tfrac{1}{5} \quad \text{et} \quad z = \tfrac{4}{15},$$

et comme $x = \frac{1}{z}$, nous aurons les quatre solutions des équations proposées :

$$z = 0, \qquad x = \infty, \qquad y = 0,$$

$$z = 0, \qquad x = -\infty, \qquad y = 0,$$

$$z = \tfrac{1}{5}, \qquad x = 5, \qquad y = \tfrac{9}{2},$$

$$z = \tfrac{4}{15}, \qquad x = 3\tfrac{3}{4}, \qquad y = \tfrac{3}{4}.$$

329. Cas particuliers. La résolution de deux équations du second degré, à deux inconnues, se réduit, dans certains cas particuliers, à la résolution d'une équation bicarrée ou d'une équation du second degré.

1° Lorsque les deux courbes sont *concentriques*, et rapportées à leur centre commun pris pour origine, leurs équations ne contiennent plus de termes du premier degré par rapport aux variables; et l'élimination d'une variable donnera une équation bicarrée par rapport à l'autre variable.

Exemple. $16y^2 - 16xy + 5x^2 - 400 = 0$ (*ellipse*),

$$y^2 - x^2 + 16 = 0 \qquad (\textit{hyperbole}).$$

Les solutions sont égales deux à deux, mais de signes contraires.

2° Lorsque les deux courbes sont *homofocales*, et rapportées à

leur foyer commun, pris pour origine des coordonnées, les deux équations se mettent sous la forme

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = (ay + bx + c)^2, \\ y^2 + x^2 = (a'y + b'x + c')^2; \end{cases}$$

donc $$ay + bx + c = \pm (a'y + b'x + c'),$$

ou $$(a \pm a')y + (b \pm b')x + (c \pm c') = 0;$$

et l'on aura deux équations du premier degré, que l'on combinera avec l'une des équations proposées.

EXEMPLE. $3y^2 - 4xy + 4y - 2x + 1 = 0$ (*hyperbole*),

$$y^2 - 2xy + x^2 - 3y - 3x - \tfrac{9}{4} = 0 \text{ (\textit{parabole})}.$$

3° Lorsque les deux courbes ont un *diamètre* commun, et qu'elles sont rapportées à un système de coordonnées obliques, ayant pour axe des abscisses le diamètre commun, et pour axe des ordonnées une parallèle aux cordes, les deux équations ne contiennent la variable y qu'à la seconde puissance, et l'élimination de cette variable réduira le problème à la résolution d'une équation du second degré en x.

EXEMPLE. $2y^2 - 3x - 36 = 0$ (*parabole*),

$$y^2 + 5x^2 - 80 = 0 \text{ (\textit{ellipse})}.$$

4° Si les deux courbes sont *semblables* et *semblablement situées*, les termes du second degré dans les deux équations ont les coefficients proportionnels.

Donc, si l'on multiplie l'une des deux équations par un facteur convenable, et qu'on la retranche de l'autre équation, on obtiendra pour reste une équation du premier degré.

EXEMPLE. $y^2 + 2xy - 3x^2 + 6x + 40 = 0$ (*hyperbole*),

$$2y^2 + 2xy - 6x^2 - 5y + 37 = 0 \text{ (\textit{hyperbole})}.$$

5° Lorsque les deux courbes sont des hyperboles ayant une *même asymptote*, et rapportées à cette asymptote commune comme axe de x, les deux équations ne contiennent la variable x

que dans le terme xy; et l'élimination de x donne une équation du second degré en y.

Exemple.
$$y^2-4xy+6y-10=0,$$
$$3y^2+2xy-10y+8=0.$$

§ II. Résolution des équations du quatrième degré.

330. Méthode de résolution. La méthode, que nous venons d'exposer, sert à réduire la résolution de l'équation du quatrième degré,

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

à la résolution d'une équation du troisième degré.

En effet, si dans l'équation proposée on remplace x^2 par y, on arrive à l'équation :

$$y^2+axy+by+cx+d=0;$$

et la résolution de l'équation du quatrième degré est ramenée à la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues, que nous pouvons résoudre au moyen d'une équation du troisième degré en λ.

331. Exemple. Soit donné l'équation,

$$x^4-2x^3-8x^2+12x-4=0,$$

équation qui n'a pas de racines commensurables.

En posant $\qquad x^2=y$ (*parabole*),

l'équation proposée deviendra :

$$y^2-2xy-8y+12x-4=0 \text{ (\textit{hyperbole})}.$$

La résolution de ces deux équations est ramenée à celle de l'équation du troisième degré,

$$\lambda^3+16\lambda^2+56\lambda-64=0,$$

qui a trois racines réelles,

$$\lambda=-8 \quad \text{et} \quad \lambda=-4\pm2\sqrt{6}.$$

la quantité $$k=4(1-\lambda)$$

est positive pour chacune de ces trois valeurs de λ ; donc, les deux équations proposées admettent trois couples de sécantes communes et quatre solutions réelles.

Les équations des sécantes, qui correspondent à la deuxième et à la troisième racine de l'équation en λ, sont ;

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda=-4+2\sqrt{6},\\ &y=x+2+\sqrt{6}\ \pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}\right)\end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda=-4-2\sqrt{6},\\ &y=x+2-\sqrt{6}\ \pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}\right)\end{aligned}\right.$$

En cherchant les points d'intersection de ces deux systèmes de droites, on obtient immédiatement les racines de l'équation du quatrième degré,

$$x=2\pm\sqrt{2}\quad \text{et}\quad x=-1\pm\sqrt{3}.$$

RÉSUMÉ.

321. Condition pour qu'une équation du second degré à deux variables se réduise à deux équations du premier degré. — **322**. Réduction de deux équations du second degré, à deux inconnues, à une équation du troisième degré. — **323**. Indication de divers cas. — **324**, **325**, **326**, **327**, **328**. Exemples. — **329**. Cas particuliers. — **330**. Résolution d'une équation du quatrième degré. — **331**. Exemple.

CHAPITRE V.

QUELQUES EXEMPLES D'ARTIFICES ALGÉBRIQUES.

332. BUT DE CE CHAPITRE. Dans un grand nombre de cas, si l'on suivait, sans modification, les règles générales du calcul, on serait conduit à des opérations compliquées, qui dépasseraient quelquefois la patience du calculateur. L'habileté du géomètre consiste à trouver, dans la forme particulière des questions qu'il traite, l'occasion de simplifier les opérations, et de parvenir plus immédiatement aux conclusions qu'il a en vue. De pareilles modifications exigent une grande habitude de l'analyse et, souvent même, un véritable génie d'invention; et l'on comprend qu'il ne nous est pas possible de donner des règles générales sur les artifices de ce genre. Nous nous bornerons à choisir, parmi les calculs algébriques les plus célèbres, quelques exemples, dans lesquels d'illustres géomètres ont poussé à un haut degré la dextérité analytique dont nous parlons.

333. PROBLÈME I. *On donne un polynome du second degré, à trois variables,*

$$[1] \qquad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+D;$$

et l'on demande de remplacer x, y, z, *par trois variables nouvelles, liées aux premières par les relations,*

$$[2] \qquad \begin{cases} x=\alpha u+\alpha' v+\alpha'' w, \\ y=\beta u+\beta' v+\beta'' w, \\ z=\gamma u+\gamma' v+\gamma'' w, \end{cases}$$

et s'imposant les conditions suivantes :

1° *Le polynome prendra la forme*

$$[3] \qquad Gu^2+G'v^2+G''w^2+Hu+H'v+H''w+K;$$

2° *Les neuf coefficients* α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'', *seront liés par les relations,*

$$[4]\quad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, \\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0, \\ \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=0, \\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0, \end{cases}$$

Ce problème se présente en géométrie analytique, lorsque l'on veut simplifier une équation du second degré, en changeant les directions des axes des coordonnées, sans qu'ils cessent d'être rectangulaires.

En multipliant respectivement les équations [2] par α, β, γ, et en les ajoutant ensuite membre à membre, on a, d'après les équations [4].

$$u=\alpha x+\beta y+\gamma z;$$

et l'on trouvera, d'une manière analogue :

$$v=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z,$$

$$w=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z.$$

Par conséquent, pour que les polynomes [1] et [3] soient équivalents, on doit avoir, en identifiant les termes du second degré :

$$\mathrm{G}(\alpha x+\beta y+\beta z)^2+\mathrm{G}'(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)^2+\mathrm{G}''(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' y)^2$$
$$=\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'xz+2\mathrm{B}''xy;$$

ce qui donne les six équations suivantes :

$$[5]\quad \begin{cases} \mathrm{G}\alpha^2+\mathrm{G}'\alpha'^2+\mathrm{G}''\alpha''^2=\mathrm{A} \\ \mathrm{G}\beta^2+\mathrm{G}'\beta'^2+\mathrm{G}''\beta''^2=\mathrm{A}, \\ \mathrm{G}\gamma^2+\mathrm{G}'\gamma'^2+\mathrm{G}''\gamma''^2=\mathrm{A}'; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{G}\alpha\beta+\mathrm{G}'\alpha'\beta'+\mathrm{G}''\alpha''\beta''=\mathrm{B}'', \\ \mathrm{G}\alpha\gamma+\mathrm{G}'\alpha'\gamma'+\mathrm{G}''\alpha''\gamma''=\mathrm{B}', \\ \mathrm{G}\beta\gamma+\mathrm{G}'\beta'\gamma'+\mathrm{G}''\beta''\gamma''=\mathrm{B}. \end{cases}$$

Multiplions respectivement la première, la quatrième et la cinquième équation du groupe [5] par α, β, γ, et ajoutons-les ensuite; il viendra :

$$[\mathrm{A}]\qquad \mathrm{G}\alpha=\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}''\beta+\mathrm{B}'\gamma.$$

Si l'on multiplie la seconde, la quatrième et la sixième équation du même groupe par β, α, γ, on aura de même :

$$[A] \qquad G\beta = A'\beta + B''\alpha + B\gamma;$$

et l'on trouvera de même :

$$[A] \qquad G\gamma = A''\gamma + B'\alpha + B\beta.$$

Ces trois équations ont lieu entre α, β, γ; elles sont du premier degré; donc on ne pourra en tirer qu'une seule valeur de chaque inconnue, *à moins* que le dénominateur commun ne soit nul. Or, on satisfait à ces équations, en posant :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Cette solution n'étant pas admissible à cause des relations [4], il faut que le dénominateur soit nul; et l'on doit avoir, par conséquent :

$$(A-G)(A'-G)(A''-G) - B^2(A-G) - B'^2(A'-G) - B''^2(A''-G) + 2BB'B'' = 0,$$

équation du troisième degré à laquelle G doit satisfaire.

En multipliant la première, la quatrième et la cinquième équation du groupe [5], respectivement par α', β', γ', on obtiendrait :

$$[B] \qquad G'\alpha' = A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma',$$

et, d'une manière analogue :

$$[B] \qquad G'\beta' = A'\beta' + B''\alpha' + B\gamma'$$

$$[B] \qquad G'\gamma' = A''\gamma' + B'\alpha' + B\beta' :$$

et, en raisonnant comme plus haut, on prouvera que le dénominateur des valeurs inconnues α', β', γ', déduites de ces dernières équations, doit être égal à zéro, et que l'on doit avoir :

$$(A-G')(A'-G')(A''-G') - B^2(A-G') - B'^2(A'-G') - B''^2(A''-G') + 2BB'B'' = 0.$$

enfin on prouvera, par un procédé tout semblable, que l'on doit avoir :

$$(A-G'')(A'-G'')(A''-G'')-B^2(A-G''-B'^2(A'-G'')-B''^2(A''-G'')$$
$$+2BB'B''=0.$$

et, par suite, G, G', G'', sont les trois racines de l'équation du troisième degré :

$$[6]\quad (A-x)(A'-x)(A''-x)-B^2(A-x)-B'^2(A'-x)-B''^2(A''-x)$$
$$+2BB'B''=0.$$

On peut prouver que cette équation a ses trois racines réelles; et, pour cela, on remarquera qu'il est permis de lui donner la forme :

$$[7]\quad \frac{P}{(A-x)-P}+\frac{P'}{(A'-x)-P'}+\frac{P''}{(A''-x)-P''}=-1$$

Si, en effet, nous chassons les dénominateurs de cette équation [7], en identifiant le résultat avec l'équation [6], il viendra :

$$2P'P''=B^2,\quad 2P''P=B'^2,\quad 2PP'=B''^2,$$
$$PP'P''=BB'B'';$$

équations auxquelles on satisfait en posant :

$$P=\frac{B'B''}{B},\quad P'=\frac{BB''}{B'},\quad P''=\frac{B'B}{B''}.$$

De sorte que l'équation [6] deviendra :

$$[8]\quad \frac{\frac{B'B''}{B}}{\left(A-x-\frac{B'B''}{B}\right)}+\frac{\frac{BB''}{B'}}{A'-x-\frac{BB''}{B'}}+\frac{\frac{B'B}{B''}}{A''-x-\frac{B'B}{B''}}+1=0.$$

Pour prouver que cette équation a ses trois racines réelles, posons :

$$A-\frac{B'B''}{B}=\lambda,\quad A'-\frac{BB''}{B}=\mu,\quad A''-\frac{B'B}{B''}=\nu;$$

et supposons que ces trois quantités soient classées par ordre

de grandeur; de telle sorte que λ soit la plus petite et ν la plus grande. Substituons successivement, à la place de x, dans le premier membre de [8],

$$-\infty,\quad \lambda-\varepsilon,\quad \lambda+\varepsilon,\quad \mu-\varepsilon,\quad \mu+\varepsilon,\quad \nu-\varepsilon,\quad \nu+\varepsilon,\quad +\infty,$$

ε désignant un nombre excessivement petit; $-\infty$ et ∞ donnent au premier membre la valeur $+1$, et le résultat des autres substitutions se voit immédiatement; car chacune d'elles rend l'un des termes infiniment plus grand que tous les autres. Remarquons, de plus, que les trois numérateurs ont essentiellement le même signe, celui de $BB'B''$; et supposons, pour fixer les idées, que ce signe soit $+$. Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant:

$-\infty$	$+$
$\lambda-\varepsilon$	$+$
$\lambda+\varepsilon$	$-$
$\mu-\varepsilon$	$+$
$\mu+\varepsilon$	$-$
$\nu-\varepsilon$	$+$
$\nu+\varepsilon$	$-$
$+\infty$	$+$

Les substitutions fournissent donc six changements de signe; mais entre $\lambda-\varepsilon$ et $\lambda+\varepsilon$, $\mu-\varepsilon$ et $\mu+\varepsilon$, $\nu-\varepsilon$ et $\nu+\varepsilon$, la fonction passe par l'infini et est discontinue; on doit donc conclure l'existence de trois racines seulement, l'une comprise entre $\lambda+\varepsilon$ et $\mu-\varepsilon$, l'autre entre $\mu+\varepsilon$ et $\nu-\varepsilon$, et la troisième entre $\nu+\varepsilon$ et ∞; c'est-à-dire que les racines sont comprises respectivement entre λ et μ, μ et ν, ν et ∞. On voit qu'elles sont inégales, toutes les fois que les nombres λ, μ, ν, sont différents.

Après avoir résolu l'équation [6] et trouvé les valeurs de G, G', G'', les équations [A][B][C], qui sont du premier degré, donnent les rapports des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \beta' \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$.

Nous laissons au lecteur le soin de discuter les divers cas par-

ticuliers que peut présenter cette solution, et notamment celui où les quantités λ, μ, ν deviennent égales.

334. Problème II. *On propose de résoudre les trois équations :*

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1. \tag{3}$$

Ces équations se présentent lorsqu'on cherche l'intersection de trois surfaces du second ordre, dont les sections principales ont les mêmes foyers.

Si, dans l'équation [1], on chasse les dénominateurs, on obtient :

$$\mu^6-\mu^4(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+\mu^2(b^2c^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2) \\ -b^2c^2x^2=0;$$

si l'on chasse de même les dénominateurs des équations [2] et [3], on trouve :

$$\nu^6-\nu^4(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+\nu^2(b^2c^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2) \\ -b^2c^2x^2=0,$$

$$\rho^6-\rho^4(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+\rho^2(b^2c^2+c^2x^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2) \\ -b^2c^2x^2=0;$$

et ces trois équations prouvent que μ^2, ν^2, ρ^2, sont les trois racines de l'équation :

$$X^3-X^2(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+X(b^2c^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2 \\ -b^2c^2x^2=0. \tag{4}$$

On en conclut :

$$\rho^2\mu^2\nu^2=b^2c^2x^2,$$

et cette équation fera connaître x^2.

Pour obtenir y^2 et z^2, remarquons qu'en posant :

$$\mu^2 - b^2 = \mu'^2,$$

$$\nu^2 - b^2 = \nu'^2,$$

$$\rho^2 - b^2 = \rho'^2.$$

les équations proposées deviennent :

$$\frac{y^2}{\mu'^2} + \frac{x^2}{\mu'^2 + b^2} + \frac{z^2}{\mu'^2 + (b^2 - c^2)} = 1,$$

$$\frac{y^2}{\nu'^2} + \frac{x^2}{\nu'^2 + b^2} + \frac{z^2}{\nu'^2 + (b^2 - c^2)} = 1,$$

$$\frac{y^2}{\rho'^2} + \frac{x^2}{\rho'^2 + b^2} + \frac{z^2}{\rho'^2 + (b^2 - c^2)} = 1,$$

et ne diffèrent des proposées que par le changement de x^2 et y^2 en y^2 et x^2, et par celui de ρ, μ, ν, en ρ', μ', ν', de b^2 en $-b^2$, et de c^2 en $c^2 - b^2$.

On peut donc écrire :

$$b^2(c^2 - b^2)y^2 = (\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)(b^2 - \rho^2).$$

On trouvera par un artifice tout semblable :

$$c^2(c^2 - b^2)z^2 = (\mu^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)(c^2 - \rho^2);$$

et ces deux équations feront connaître x^2 et y^2.

On pourrait arriver à des valeurs de x^2, y^2, z^2, par la résolution directe des équations proposées, qui sont du premier degré ; mais les calculs seraient beaucoup plus longs.

Nous remarquerons enfin que ρ^2, μ^2, ν^2, étant les racines de l'équation [4], on a :

$$\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 = b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

et, par suite :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 + b^2 + c^2,$$

formule utile dans plusieurs recherches, et dont la vérification directe exigerait quelques calculs.

335. Problème III. *Désignons par* v, v′, v″,... *les fonctions linéaires suivantes des indéterminées* x, y, z,...

$$[1] \qquad \begin{cases} v = ax + by + cz + \ldots + l, \\ v' = a'x + b'y + c'z + \ldots + l', \\ v'' = a''x + b''y + c''z + \ldots + l'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

(Le nombre des fonctions $v, v', v'',\ldots$ est supérieur au nombre des indéterminées $x, y, z,\ldots$)

Parmi tous les systèmes de coefficients x, x′, x″... *qui donnent identiquement :*

$$[k] \qquad \varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \ldots = x - \mathrm{K},$$

x, x′, x″,... *étant indépendants de* x, y, z,... *trouver celui pour lequel la somme*

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \ldots$$

est minimum.

Posons :

$$[2] \qquad \begin{cases} av + a'v' + a''v'' + \ldots = \xi, \\ bv + b'v' + b''v'' + \ldots = \eta, \\ cv + c'v' + c''v'' + \ldots = \zeta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$\xi, \eta, \zeta,\ldots$ seront des fonctions linéaires de $x, y, z,\ldots$; et l'on aura :

$$[3] \qquad \begin{cases} \xi = x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \ldots + \Sigma al, \\ \eta = x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + z\Sigma bc + \ldots + \Sigma bl, \\ \zeta = x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma c^2 + \ldots + \Sigma cl, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où

$$\Sigma a^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots,$$

$$\Sigma ab = ab + a'b' = a''b'' + \ldots,$$

et de même pour les autres Σ.

Le nombre des quantités $\xi, \eta, \zeta,\ldots$ est égal au nombre n des inconnues $x, y, z,\ldots$; on pourra donc obtenir, par élimination, une équation de la forme suivante :

$$[\mathrm{A}] \qquad x = \mathrm{A} + (\alpha\alpha)\xi + (\alpha\beta)\eta + (\alpha\gamma)\zeta + \ldots,$$

dans laquelle $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$,... sont des coefficients indépendants de x, y, z,... et de ξ, η, ζ,... que l'on sait trouver; et cette équation sera satisfaite identiquement, lorsqu'on remplacera ξ, η, ζ; par leurs valeurs [3]. Par conséquent, si l'on pose :

$$[4] \quad \begin{cases} a(\alpha\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\alpha\gamma) + \ldots = \alpha, \\ a'(\alpha\alpha) + b'(\alpha\beta) + c'(\alpha\gamma) + \ldots = \alpha', \\ a''(\alpha\alpha) + b''(\alpha\beta) + c''(\alpha\gamma) + \ldots = \alpha'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

en multipliant respectivement ces équations par v, v', v'',... et en les ajoutant, on aura identiquement, en vertu des équations [2] et [A] :

$$[5] \qquad \alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \ldots = x - \text{A},$$

pourvu que l'on remplace v, v', v'',... par leurs valeurs [1].

Cette équation montre que, parmi les différents systèmes de coefficients x, x', x''..., qui satisfont à la condition [k], on doit compter le système :

$$x = \alpha, \quad x' = \alpha', \quad x'' = \alpha''.$$

On aura d'ailleurs, pour un système quelconque, en retranchant l'identité [5] de l'identité [k] :

$$(x - \alpha)v + (x' - \alpha')v' + (x'' - \alpha'')v'' + \ldots = \text{A} - \text{K};$$

et cette équation étant identique, en vertu des équations [1], entraîne les suivantes :

$$\begin{gathered} (x - \alpha)a + (x' - \alpha')a' + (x'' - \alpha'')a'' + \ldots = 0, \\ (x - \alpha)b + (x' - \alpha')b' + (x'' - \alpha'')b'' + \ldots = 0, \\ (x - \alpha)c + (x' - \alpha')c' + (x'' - \alpha'')c'' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

que l'on obtient en remplaçant v, v', v''... par leurs valeurs [1], et en égalant à zéro le coefficients de x, y, z... Ajoutons ces équations, après les avoir multipliées par $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$; nous aurons, en vertu du système [4] :

$$(x - \alpha)\alpha + (x' - \alpha')\alpha' + (x'' - \alpha'')\alpha'' + \ldots = 0;$$

d'où en doublant cette égalité, et en la retranchant de l'identité :

$$x^2+x'^2+x''^2\ldots=x^2+x'^2+x''^2+\ldots$$

$$x^2+x'^2+x''^2+\ldots=\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2\ldots+(x-\alpha)^2+(x'-\alpha')^2+\ldots$$

Par conséquent, l'expression

$$x^2+x'^2+x''^2+\ldots$$

aura une valeur minimum, lorsqu'on aura :

$$x=\alpha,\quad x'=\alpha',\quad x''+\alpha'',\ldots$$

336. Expression du minimum. Les valeurs de α, α', α'',... sont définies par les équations [4]; et pour les obtenir, il suffira d'y remplacer $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, par leurs valeurs, que l'on pourra déduire des équations [3] par les méthodes connues. Mais le minimum s'obtiendra de la manière suivante. L'identité [5] montre que l'on a :

$$[6]\qquad \begin{cases} a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+\ldots=1,\\ b\alpha+b'\alpha'+b''\alpha''+\ldots=0,\\ c\alpha+c'\alpha'+c''\alpha''+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

équations que l'on obtient, en remplaçant v, v', v'',... par leurs valeurs [1], et en identifiant les coefficients de x, de y, de z,.. dans les deux membres.

Multiplions ces équations, respectivement, par $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, et ajoutons-les, en ayant égard aux relations [4]; nous trouverons :

$$[7]\qquad \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots=(\alpha\alpha).$$

Ainsi $(\alpha\alpha)$ est le minimum cherché.

337. Valeurs adoptées pour x, y, z... Si v, v', v'' étaient nuls, l'identité [5] montre que la valeur de x, qui vérifierait les équations [1], serait $x=A$. Mais le nombre des équations

$$v=0,\quad v'=0,\quad v''=0,\ldots$$

étant supérieur au nombre des inconnues, il est, en général, impossible de satisfaire rigoureusement à ces équations. Dans cette circonstance, les géomètres adoptent la valeur $x=A$,

comme satisfaisant aussi exactement que possible aux équations. Un calcul analogue fournirait les valeurs que l'on adopterait pour y, z,... et que nous désignerons par B, C...

On peut prouver que ces valeurs, sans annuler toutes les quantités v, v', v'', ce qui est impossible, rendent la somme de leurs carrés aussi petite que possible. Mais disons d'abord pour quelle raison les coefficients de ces diverses formules ont été désignés par la notation que nous avons adoptée.

Nous avons trouvé plus haut:

$$[7] \qquad \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots=(\alpha\alpha).$$

On peut prouver d'une manière analogue que l'on a:

$$(\alpha\beta)=\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\ldots$$

En effet, β, β', β''..., vérifient les formules:

$$[8] \qquad \begin{cases} a\beta+a'\beta'+a''\beta''+\ldots=0 \\ b\beta+b'\beta'+b''\beta''+\ldots=1 \\ c\beta+c'\beta'+c''\beta''+\ldots=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on multiplie les valeurs de α, α'...., [4], par β, β.... et qu'on ajoute les résultats, on trouvera, en ayant égard aux équations [8] qui définissent β, β'...:

$$[9] \qquad \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\ldots=(\alpha\beta);$$

et la démonstration sera la même pour les autres formules analogues. On voit donc que la notation, adoptée pour les coefficients, sert à rappeler la formation des expressions qui leur sont égales.

338. Minimum de $v^2+v'^2+v''^2+\ldots$ Si dans l'équation

$$v=ax+by+cz+\ldots+l,$$

on substitue à x, y, z... la valeur trouvée plus haut [A], et les valeurs analogues, on obtiendra, en ayant égard aux formules [4]:

$$[10] \qquad v=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\ldots+\lambda,$$

en posant: $\lambda=a\text{A}+b\text{B}+c\text{C}+\ldots+l.$

On aura de même :

$$[10]\qquad\begin{cases} v'=\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta+\ldots+\lambda', \\ v''=\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta+\ldots+\lambda'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

en posant : $$\begin{cases} \lambda'=a'A+b'B+c'C+\ldots+l', \\ \lambda''=a''A+b''B+c''C+\ldots+l''; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

c'est-à-dire en représentant par $\lambda, \lambda', \lambda''\ldots$ les valeurs de $v, v', v''\ldots$ qui résultent des valeurs A, B, C... de $x, y, z\ldots$

Si nous posons actuellement :

$$\Omega=v^2+v'^2+v''^2+\ldots,$$

nous pourrons former cette somme, en ajoutant les équations [1], après les avoir respectivement multipliées par $v, v', v''\ldots$; et nous trouverons, en ayant égard aux équations [2] :

$$\Omega\xi=x+\eta y+\zeta z+\ldots+lv+l'v'+l''v''+\ldots$$

En substituant, pour $v, v', v''\ldots$, les valeurs trouvées plus haut, et en remarquant que l'on a, en vertu de l'identité [5] :

$$\alpha l+\alpha' l'+\alpha'' l''+\ldots=-A,$$

il viendra :

$$\Omega=\xi x+\eta y+\zeta z+\ldots-\xi A-\eta B-\zeta C\ldots+\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''+\ldots$$

Mais, en multipliant respectivement les équations qui définissent $\lambda, \lambda', \lambda''\ldots$ par $\lambda, \lambda', \lambda''\ldots$, et en les ajoutant, on trouve :

$$\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots=\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''+\ldots+(\lambda a+\lambda' a'+\lambda'' a''\ldots)A$$
$$+(\lambda b+\lambda' b'+\lambda'' b''+\ldots)B+(\lambda c+\lambda' c'+\lambda'' c''+\ldots)C+\ldots$$

Or chacune des quantités, entre parenthèses, est nulle d'elle-même ; car $(\lambda a+\lambda' a'+\lambda'' a''+\ldots)$, par exemple, est la valeur que prend ξ [2], quand on y remplace $v, v', v''\ldots$ par $\lambda, \lambda', \lambda''\ldots$ ou, ce qui est la même chose, $x, y, z\ldots$, par A, B, C... ; et cette substitution annule ξ, comme on le voit d'après les équations [3] et [A].

Ainsi, l'on a :

$$\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots=\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''\ldots;$$

et, par suite :

$$\Omega=\xi(x-A)+\eta(y-B)+\zeta(z-C)\ldots+\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots$$

Substituant pour $(x-A)$, $(y-B)$, $(z-C)$..., les valeurs fournies par l'équation [A], et les équations analogues en y, z..., il vient :

$$\Omega=(\alpha\alpha)\xi^2+(\beta\beta)\eta^2+(\gamma\gamma)\zeta^2+\ldots+2(\alpha\beta)\xi\eta+2(\alpha\gamma)\xi\zeta$$
$$+2(\beta\gamma)\eta\zeta+\ldots+\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots$$

Ce qui, d'après les formules démontrées plus haut [7], [9], [10], revient à

$$\Omega=(v-\lambda)^2+(v'-\lambda')^2+\ldots+\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots$$

Par où l'on voit que

$$\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots$$

est, comme nous l'avions annoncé, le minimum de Ω.

RÉSUMÉ.

332. But de ce chapitre. — 333. Simplifier le premier membre d'une équation du second degré, à trois variables, en changeant les directions des axes coordonnés, sans qu'ils cessent d'être rectangulaires. — 334. Trouver les points d'intersection de trois surfaces du second ordre, dont les sections principales ont les mêmes foyers. — 335, 336, 337, 338. Résolution d'un système, dans lequel le nombre des inconnues est inférieur à celui des équations, par la condition que la somme des carrés des premiers membres de ces équations soit un minimum, ou méthode des moindres carrés.

NOTE I

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

339. Formule générale qui représente l'une des inconnues. Considérons n équations à n inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l}
a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_ix_i + \ldots + a_nx_n = l_1, \\
a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + \ldots + a_i^2x_i + \ldots + a_n^2x_n = l_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1^kx_1 + a_2^kx_2 + a_3^kx_3 + \ldots + a_i^kx_i + \ldots + a_n^kx_n = l_k, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1^nx_1 + a_2^nx_2 + a_3^nx_3 + \ldots + a_i^nx_i + \ldots + a_n^nx_n = l_n.
\end{array}\right.$$

$a_1, a_2 \ldots a_n, a_1^2, a_2^2 \ldots a_i^k \ldots a_n^n$ désignent des coefficients quelconques, tout à fait indépendants les uns des autres ; a_1^2 n'est, par exemple, nullement égal au carré de a_1 ; et le chiffre 2 n'y figure que comme un indice. En général, a_i^k n'a aucune liaison avec a_i, et n'en est nullement la puissance k ; l'indice inférieur i indique le numéro d'ordre de l'inconnue, et l'indice supérieur k, le numéro de l'équation.

Cela posé, considérons le produit :

$$\mathrm{P} = a_1a_2a_3\ldots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_i-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\ldots$$
$$(a_i-a_2)\ldots(a_n-a_2)(a_4-a_3)\ldots(a_n-a_3)\ldots(a_n-a_{n-1}),$$

obtenu en faisant le produit de tous les coefficients de la première équation par leurs différences deux à deux, et ayant soin de prendre, avec le signe —, dans chaque différence, le terme affecté du plus petit indice. Ce produit P se composera d'un grand nombre de termes, dans lesquels les quantités $a_1, a_2 \ldots a_n$ auront divers exposants ; chacun des termes contiendra toutes les lettres $a_1, a_2 \ldots a_n$; mais l'exposant de chacune d'elles sera au plus égal à n. Nommons R ce que devient ce produit, lorsque l'on considère les exposants comme des indices supérieurs : R contiendra alors les différents coefficients du système d'équation proposé ; et chacun d'eux figurera, dans chaque terme, au premier degré, puisque, par hypothèse, nous avons remplacé

les exposants par des indices. Si, par exemple, la puissance k de a_i figure dans le produit P, nous la remplacerons, pour obtenir R, par a_i^k, coefficient de x_i dans l'équation de rang k ; en sorte que les deux expressions P et R s'écriront de même, mais représenteront des valeurs très-différentes.

Supposons maintenant que l'on rassemble, en un seul, tous les termes de R, qui contiennent a_i affecté du même indice supérieur ; R prendra la forme

$$[2] \quad R = A_i^1 a_i^1 + A_i^2 a_i^2 + A_i^3 a_i^3 + \ldots + A_i^k a_i^k + \ldots + A_i^n a_i^n,$$

A_i^1, $A_i^2 \ldots A_i^n$ étant des sommes de produits, dans lesquels ne figure évidemment aucune des quantités a_i^1, $a_i^2 \ldots a_i^n$.

Or je dis qu'on a les équations suivantes :

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = A_i^1 a_1 + A_i^2 a_1^2 + A_i^3 a_1^3 \ldots + A_i^n a_1^n, \\ 0 = A_i^1 a_2 + A_i^2 a_2^2 + A_i^3 a_2^3 \ldots + A_i^n a_2^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = A_i^1 a_k + A_i^2 a_k^2 + A_i^3 a_k^3 \ldots + A_i^n a_k^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = A_i^1 a_n + A_i^2 a_n^2 + A_i^3 a_n^3 \ldots + A_i^n a_n^n ; \end{array} \right.$$

ou, en d'autres termes, que l'expression R s'annule, si l'on y remplace, dans tous les termes, l'indice inférieur i de la lettre a par une *autre* valeur quelconque $1, 2 \ldots k \ldots n$. En effet, l'expression P, renfermant en facteur $(a_1 - a_i)(a_2 - a_i) \ldots (a_n - a_i)$, s'annule identiquement, si l'on suppose, par exemple, $a_i = a_k$: le résultat de cette substitution doit être zéro, indépendamment de toute valeur attribuée aux lettres a_1, $a_2 \ldots a_n$. Les termes doivent donc se détruire identiquement, et être égaux deux à deux et de signes contraires. Or, il est évident que cette identité ne sera pas altérée, quand on considérera les exposants comme des indices, afin de passer de l'expression P à l'expression R.

Les équations [3] étant démontrées, on obtiendra évidemment la valeur de x_i, en multipliant les équations proposées [1] par A_i^1, $A_i^2 \ldots A_i^n$, et en les ajoutant. Les coefficients de x_1, $x_2 \ldots x_{i-1}$, $x_{i+1} \ldots x_n$, deviendront, en effet, égaux à zéro, en vertu des équations [3] ; et le coefficient de x_i deviendra égal à R, en vertu de [2].

On aura donc :

$$Rx_i = A_i^1 l_1 + A_i^2 l_2 + \ldots + A_i^n l_n,$$

d'où [4] $$x_i = \frac{A_i^1 l_1 + A_i^2 l_2 + \ldots + A_i^n l_n}{R}.$$

Ainsi, *quand on a formé le dénominateur* R, *on forme le numérateur d'une inconnue quelconque* x_i, *en remplaçant, dans chaque terme de* R, *les coefficients* a_i^1, $a_i^2 \ldots a_i^n$ *de* x_i *par les termes tout connus correspondants* l_1, $l_2 \ldots l_n$.

On obtiendra, par ce procédé, la valeur de chacune des inconnues. On voit que toutes ces valeurs ont le même dénominateur R. Si R n'est pas nul, chaque inconnue a une valeur unique et déterminée; et le système des équations ne présente aucune particularité. L'étude de l'expression R conduit à une théorie importante d'analyse algébrique, que nous ne pouvons indiquer ici.

340. Nous donnerons cependant quelques développements sur la forme du dénominateur R. Nous établirons d'abord la proposition suivante :

THÉORÈME. *Le produit* P, *et, par suite, l'expression* R, *change de signe, sans changer de valeur, si deux indices* c *et* c' *y sont changés l'un dans l'autre.*

Remarquons, en effet, que, dans le produit P, les seuls facteurs, sur lesquels ce changement exerce une influence, sont ceux dans lesquels figure a_c ou $a_{c'}$, c'est-à-dire, en supposant $c < c'$:

$$(a_c - a_1)(a_c - a_2)\ldots(a_c - a_{c-1})(a_{c+1} - a_c)\ldots(a_{c'} - a_c)\ldots(a_n - a_c)$$

$$(a_{c'} - a_1)\ldots(a_{c'} - a_{c-1})(a_{c'} - a_{c+1})\ldots(a_{c'} - a_{c'-1})(a_{c'+1} - a_{c'})\ldots(a_n - a_{c'}).$$

Si l'on change c en c', et c' en c (sans changer, bien entendu, $c-1$, $c+1$, $c'-1$, $c'+1$, qui sont des indices différents de c et c'), ces facteurs, pris ensemble, conservent les mêmes valeurs absolues, et ne font que se substituer les uns aux autres; mais il y en a un certain nombre qui changent de signe.

1° Les facteurs $(a_c - a_1)(a_c - a_2)\ldots(a_c - a_{c-1})$ de la première ligne et les facteurs $(a_{c'} - a_1)(a_{c'} - a_2)\ldots(a_{c'} - a_{c-1})$ de la seconde ligne, ne font que se changer les uns dans les autres.

2° Les facteurs $(a_{c+1} - a_c)(a_{c+2} - a_c)\ldots(a_{c'-1} - a_c)$,

$$(a_{c'} - a_{c+1})(a_{c'} - a_{c+2})\ldots(a_{c'} - a_{c'-1}),$$

échangent leurs valeurs absolues; mais chacun d'eux devient égal et de signe contraire à celui qui lui correspond. Cela fait en tout $2(c' - c - 1)$ changements de signes, qui n'exercent pas d'influence sur le signe du produit.

3° Le facteur $$(a_{c'} - a_c)$$

change de signe sans changer de valeur.

4° Les facteurs $(a_{c'+1} - a_c)(a_{c'+2} - a_c)\ldots(a_n - a_c)$

$$(a_{c'+1} - a_{c'})(a_{c'+2} - a_{c'})\ldots(a_n - a_{c'})$$

ne font que se changer les uns dans les autres.

En résumé, le seul changement, que subisse le produit, provient du changement de signe de $(a_{c'} - a_c)$; et, par suite, P et R changent de signe, sans changer de valeur, lorsqu'on change c en c', et c' en c.

341. Corollaire. Il résulte de la proposition précédente, que, *dans chaque terme des polynomes* P *et* R, *les exposants de deux lettres* a_c *et* $a_{c'}$ *sont toujours inégaux.*

Si, en effet, dans un terme de ces expressions, a_c et $a_{c'}$ avaient le même exposant, ce terme ne changerait pas par le changement des indices c et c'; il ferait donc partie du polynome $+$P et du polynome égal et de signe contraire $-$P; et, par suite, il entrerait deux fois dans P avec des signes différents, et pourrait être supprimé.

Il est clair, d'ailleurs, que chaque terme contient, au moins une fois, chacun des facteurs $a_1, a_2 \ldots a_n$; et comme l'exposant de ces lettres ne surpasse jamais n, ils ne peuvent être tous différents, qu'en reproduisant, dans un certain ordre, la série des

nombres 1, 2...n; en sorte que le terme général de P (ou de R, car c'est la même chose) est

$$\pm a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, désignant les nombres entiers 1, 2...n, pris dans un certain ordre.

On pourra donc, en intervertissant convenablement les facteurs, écrire ce terme général de la manière suivante :

$$a^1{}_{\beta_1} a^2{}_{\beta_2} \ldots a^n{}_{\beta_n},$$

$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$, représentant aussi les nombres 1, 2...n, écrits dans un certain ordre.

342. Formation de R. Cette remarque permet de former tous les termes de R ; mais il reste à déterminer le signe qui convient à chacun d'eux. On remarquera pour cela que, si l'on change dans R (339) deux indices inférieurs l'un dans l'autre, R doit changer de signe. Les termes positifs doivent donc se transformer en ceux qui sont actuellement négatifs, et réciproquement. En faisant deux changements d'indices de suite, les termes primitivement positifs reprendront le signe + (sans que pour cela chacun d'eux reprenne sa valeur) ; et, en général, un nombre pair de permutations, effectuées sur deux indices, changerait les termes positifs entre eux, tandis qu'un nombre impair de permutations transformera les termes positifs en termes actuellement négatifs, et réciproquement.

Si donc on veut savoir, si deux termes donnés ont le même signe ou des signes contraires, il suffit de compter le nombre de permutations d'indices inférieurs nécessaires pour passer de l'un à l'autre : si ce nombre est pair, les termes ont le même signe ; s'il est impair, leur signe est différent.

D'après cela, pour former tous les termes de R, on prendra le premier terme

$$a^1{}_1 a^2{}_2 a^3{}_3 \ldots a^n{}_n ;$$

puis on changera successivement les uns dans les autres les indices inférieurs, en ne faisant qu'un seul changement à la fois, et changeant chaque fois le signe du terme obtenu.

Si, par exemple, $n = 3$, on obtiendra :

$$a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3;$$

expression dans laquelle chaque terme s'obtient du précédent, en changeant son signe, après avoir interverti deux indices inférieurs de la lettre a.

RÉSUMÉ.

339. Formule générale qui représente la valeur d'une inconnue satisfaisant à un système de n équations à n inconnues. — **340**. Le dénominateur commun change de signe, lorsqu'on permute deux indices inférieurs l'un avec l'autre. — **341**. Les indices supérieurs de deux lettres sont toujours inégaux, dans un même terme. — **342**. Formation du dénominateur commun.

NOTE II

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES.

DÉFINITIONS.

343. Quand on veut évaluer approximativement un nombre x, la représentation la plus simple, mais souvent fort insuffisante, consiste à le réduire à sa partie entière.

Lorsque le nombre est moindre que l'unité, un tel mode de représentation est non-seulement insuffisant, mais devient absolument dérisoire. Dire qu'un nombre est nul *en négligeant les fractions*, c'est commettre une erreur *infinie*, celle-ci se mesurant, on le sait, par le rapport de la quantité négligée à la valeur approchée obtenue.

Pour évaluer un nombre y plus petit que l'unité, on peut considérer la valeur inverse $\frac{1}{y}$, qui est plus grande que l'unité; et si b est la partie entière de $\frac{1}{y}$, la valeur approchée de y sera $\frac{1}{b}$.

Cela posé, pour évaluer x avec une exactitude de plus en plus grande, on posera

$$x = a + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \ldots, \quad x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ étant les plus grands nombres entiers contenus dans $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$, et l'on pourra écrire

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}.$$

Cette expression se nomme une fraction continue; elle four-

nit la valeur exacte de x. Si l'on supprime la dernière fraction $\frac{1}{x_n}$, tous les dénominateurs $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ étant entiers, on aura des valeurs d'autant plus approchées que n sera plus grand, et dont nous allons étudier la loi.

344. Nous démontrerons d'abord que la fraction continue se termine, et que le dénominateur x_n devient nécessairement entier pour une valeur convenable de n, toutes les fois que x est commensurable.

Soit en effet $x = \frac{P}{P_1}$, P et P_1 étant deux nombres entiers; pour obtenir a, il faut diviser P par P_1, et l'on aura

$$P = P_1 a + P_2.$$

P_2 étant moindre que P_1, on en déduit

$$\frac{P}{P_1} = a + \frac{P_2}{P_1};$$

par conséquent $$x_1 = \frac{P_1}{P_2};$$

a_1 est la partie entière de $\frac{P_1}{P_2}$;

Soit $$P_1 = a_1 P_2 + P_3.$$

P_3 étant moindre que P_2, on en déduit

$$\frac{P_1}{P_2} = a_1 + \frac{P_3}{P_2};$$

par conséquent $$x_2 = \frac{P_2}{P_3};$$

a_2 est la partie entière de $\frac{P_2}{P_3}$.

On voit clairement que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont les quotients successifs obtenus en faisant sur les nombres P et P_1 l'opération ordinaire destinée à donner le plus grand commun diviseur. On sait

que cette opération se termine toujours, et que l'une des divisions successives se fera exactement. $\frac{P}{P_1}$ sera représenté alors, sans que rien soit négligé, par une fraction continue.

La réciproque est évidente : une fraction continue composée d'un nombre limité de termes peut toujours se réduire, par les calculs arithmétiques les plus simples, à une fraction ordinaire à termes entiers.

345. Considérons la fraction continue

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Les valeurs approchées successives de x, que l'on nomme *les réduites*, sont

$$a, \quad a + \frac{1}{a_1}, \quad a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \quad a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}, \ldots$$

On les obtient en arrêtant successivement les fractions avant le premier dénominateur ou *quotient incomplet* a_1, ou avant le second a_2, le troisième a_3, etc....

Les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que x.

a, en effet, est évidemment trop petit, puisque, pour le compléter, il faut lui ajouter une fraction positive.

$a + \frac{1}{a_1}$ est trop grand, car, pour le compléter, il faudrait augmenter le dénominateur a_1.

$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$ est trop petit, car, pour le compléter, il faudrait accroître a_2, diminuer par conséquent le dénominateur $a_1 + \frac{1}{a_2}$ et augmenter la valeur totale de l'expression.

$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$ est trop grand, car, pour le compléter, il faudrait augmenter a_3, diminuer par conséquent $a_2 + \frac{1}{a_3}$, augmenter par là le dénominateur de la fraction $\cfrac{1}{\left(a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}\right)}$, que l'on ajoute à a, et diminuer par conséquent cette fraction.

Le même raisonnement peut se continuer indéfiniment.

PROPRIÉTÉS DES RÉDUITES.

346. Le calcul successif des réduites est très-simple.

La première réduite est a;

La seconde réduite est

$$a + \frac{1}{a_1} = \frac{aa_1 + 1}{a_1}.$$

La troisième réduite s'obtiendra en remplaçant, dans la seconde, a_1 par $a_1 + \frac{1}{a_2}$; elle est

$$\frac{a\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{(aa_1 + 1)a_2 + a}{a_1 a_2 + 1}.$$

La quatrième réduite s'obtiendra en remplaçant, dans la troisième, a_2 par $a_2 + \frac{1}{a_3}$; elle est

$$\frac{(aa_1 + 1)\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + a}{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1} = \frac{[(aa_1 + 1)a_2 + a]a_3 + aa_1 + 1}{(a_1 a_2 + 1)a_3 + a_1}.$$

Le calcul s'explique sans aucune difficulté, à toutes les [illegible] toutes successivement.

Si $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ sont deux réduites consécutives, la réduite suivante $\frac{P_n}{Q_n}$ est représentée par

$$\frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}},$$

a_n étant le dernier dénominateur [illegible] [illegible] dans la formation de $\frac{P_n}{Q_n}$.

La règle se vérifie pour les premières réduites. Pour prouver qu'elle est générale, admettons qu'elle soit vraie pour [illegible] [illegible] de a_n, et que l'on ait

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}};$$

pour former la réduite suivante $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, il faudra remplacer a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$, et l'on aura

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + Q_{n-2}} = \frac{(P_{n-1}a_n + P_{n-2})a_{n+1} + P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_n + Q_{n-2})a_{n+1} + Q_{n-1}},$$

c'est-à-dire $$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

La règle de formation s'applique donc à $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, et elle est par conséquent générale.

347. *Les réduites sont des fractions irréductibles.* Soient $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ trois réduites consécutives, on a, en nommant a_n le

uotient incomplet qui termine la fraction représentée par $\frac{P_n}{Q_n}$,

[2] $$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}}.$$

On en déduit

[3] $$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{P_{n-2}Q_{n-1}-P_{n-1}Q_{n-2}}{Q_{n-1}(Q_{n-1}a_n+Q_{n-2})}=\frac{P_{n-2}Q_{n-1}-P_{n-1}Q_{n-2}}{Q_{n-1}Q_n},$$

On a aussi, identiquement,

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}=\frac{P_{n-1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n-1}}{Q_{n-1}Q_{n-2}}.$$

Les numérateurs des seconds membres sont égaux et de signes contraires. Par conséquent, si l'on calcule les différences de chaque réduite avec la précédente, tous les numérateurs, égaux en valeur absolue, seront alternativement positifs et négatifs; mais les premières réduites sont

$$\frac{P_0}{Q_0}=a,\quad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{aa_1+1}{a_1},$$

et l'on a

[4] $$\frac{P_1}{Q_1}-\frac{P_0}{Q_0}=\frac{1}{a_1}.$$

Le numérateur constant est donc l'unité, et l'on a, en général,

[5] $$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=\pm 1.$$

Cette équation montre que la réduite $\frac{P_n}{Q_n}$ est irréductible, car si P_n et Q_n avaient un facteur commun, ce facteur, divisant les deux termes du premier membre de l'équation [5], devrait diviser leur différence ± 1, ce qui est impossible.

348. *La valeur exacte de la fraction continue est comprise entre deux réduites consécutives, et chaque réduite approche plus que la précédente.*

Considérons la fraction

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}}},$$

et soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite obtenue quand on s'arrête au quotient incomplet a_n; soient $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ les deux réduites précédentes, on a

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}};$$

mais, en remplaçant a_n par l'expression $a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cdots}}$ dont il représente la partie entière et que nous nommons x_n, on obtiendra la fraction continue exacte x, par conséquent

$$x = \frac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}},$$

x_n étant un nombre compris entre a_n et $a_n + 1$.

Si l'on résout cette équation par rapport à x_n, on en déduit

[6] $$x_n = \frac{Q_{n-2}x - P_{n-2}}{P_{n-1} - Q_{n-1}x};$$

d'où

[7] $$\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}x_n = \frac{x - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x}.$$

Le premier membre étant positif et plus grand que l'unité, $x - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x$ sont de mêmes signes, et la seconde diffé-

rence est moindre que la première. Ce qui démontre le théorème énoncé.

349. La fraction continue étant comprise entre deux réduites consécutives, l'erreur commise en s'arrêtant à une réduite $\frac{P_n}{Q_n}$, est moindre, évidemment, que la différence entre cette réduite et la suivante, $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$; elle est plus petite, *à fortiori*, que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la réduite, $\frac{1}{Q_n^2}$.

350. Aucune fraction à termes plus petits que ceux d'une réduite ne peut approcher plus qu'elle de la valeur exacte de la fraction continue. Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction plus approchée que la réduite $\frac{P_n}{Q_n}$; cette fraction évidemment est comprise entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, car si la différence $\frac{\alpha}{\beta} - x$ est de même signe que $\frac{P_n}{Q_n} - x$, $\frac{\alpha}{\beta}$ est compris entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et x; et si elle est de signe contraire, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ approchant moins de x que $\frac{P_n}{Q_n}$, il faut que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit compris entre x et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. La différence

$$[8] \qquad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{Q_{n-1}\alpha - P_{n-1}\beta}{\beta Q_{n-1}}$$

est, d'après cela, plus petite en valeur absolue que

$$[9] \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\pm 1}{Q_n Q_{n-1}},$$

mais le numérateur de [8] est au moins égal à celui de [9], puisqu'il est entier; le dénominateur doit donc être plus grand, et l'on a

$$\beta > Q_n;$$

on peut prouver que l'on a aussi

$$\alpha > P_n,$$

la fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ étant comprise en effet entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ est compris entre $\frac{Q_n}{P_n}$ et $\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$, et la différence

$$\frac{\beta}{\alpha}-\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}=\frac{\beta P_{n-1}-\alpha Q_{n1}}{\alpha P_{n-1}}$$

est plus petite par conséquent en valeur absolue que

$$\frac{Q_n}{P_n}-\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}=\frac{P_{n-1}Q_n-Q_{n-1}P_n}{P_n P_{n-1}}=\pm\frac{1}{P_n P_{n-1}};$$

on en déduit

$$\alpha>P_n.$$

Les deux termes de $\frac{\alpha}{\beta}$ sont donc plus grands que ceux de $\frac{P_n}{Q_n}$;

On aurait pu se borner à prouver que le dénominateur β est plus grand que Q_n, si en effet $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}\ldots$ sont les réduites de la fraction

$$x=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\ddots}}},$$

et que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit compris entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$: les fractions inverses $\frac{Q_0}{P_0}$, $\frac{Q_1}{P_1}\ldots$, $\frac{Q_n}{P_n}\ldots$ seront les réduites de

$$\frac{1}{x}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\ddots}}}},$$

et la fraction $\frac{\beta}{\alpha}$ sera comprise entre $\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$ et $\frac{Q_n}{P_n}$; la démonstration

ne pouvait donc manquer de se faire absolument de la même manière pour les fractions inverses.

FRACTIONS PÉRIODIQUES.

381. Soit la fraction

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}}}}}}},$$

dans laquelle les fractions intégrantes se reproduisent périodiquement sans s'arrêter jamais. On a évidemment

$$[10] \qquad x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}}.$$

Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite obtenue en s'arrêtant à la fin de la première période, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ les deux réduites précédentes, on a

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}};$$

mais, pour obtenir la fraction complète x, il faut évidemment, d'après [10], changer dans $\frac{P_n}{Q_n}$, a_n en $a_n + \frac{1}{x}$; on a donc

$$x = \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{x}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{x}\right) + Q_{n-2}} = \frac{(P_{n-1}a_n + P_{n-2})x + P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_n + Q_{n-2})x + Q_{n-1}} = \frac{P_n x + P_{n-1}}{Q_n x + Q_{n-1}}$$

x est par conséquent racine de l'équation

$$Q_n x^2 + (Q_{n-1} - P_n)x - P_{n-1} = 0;$$

et comme cette équation n'a qu'une racine positive, il ne peut y avoir d'ambiguïté.

352. La valeur d'une fraction périodique mixte se calculera par une méthode semblable.

Soit

$$x=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b_1+\ddots+\cfrac{1}{b_m+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b_1+\ddots}}}}}}}}},$$

dans laquelle, après $n+1$ fractions, qui n'appartiennent pas à la période, commence la période de m termes. Soit

$$y=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b_1+\ddots+\cfrac{1}{b_m+\cfrac{1}{b+\ddots}}}},$$

on aura

$$x=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{y}}}};$$

et si $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ sont les deux réduites obtenues en s'arrêtant aux fractions $\frac{1}{a_{n-1}}$ et $\frac{1}{a_n}$, on aura

$$x=\frac{P_n y+P_{n-1}}{Q_n y+Q_{n-1}};$$

y étant connu d'après le paragraphe précédent, x le sera également. Soit, par exemple,

$$[11] \qquad x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}},$$

en posant

$$y = 2 + \frac{1}{2} + \ldots,$$

on aura

$$y = 2 + \frac{1}{y}.$$

Par conséquent,

$$y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$y = 1 + \sqrt{2},$$

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Les réduites successives de la fraction [11] sont :

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169} \ldots,$$

et chacune de ces fractions approche de $\sqrt{2}$ plus qu'aucune autre dont les termes seraient plus simples. L'erreur commise en adoptant l'une d'elles est moindre que l'unité divisée par le produit de son dénominateur par celui de la fraction suivante.

NOTE III

MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE BEZOUT ET D'EULER.

353. Soient $$f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

deux équations algébriques, la première de degré n, la seconde de degré m égal ou inférieur à n. Pour éliminer x entre les équations, il suffit, d'après une remarque faite à la même époque (1764) par Euler et par Bezout, de les combiner entre elles par addition, après les avoir respectivement multipliées par deux polygones u et v, le premier de degré $m - 1$ et le second de degré $n - 1$, en choisissant, bien entendu, les coefficients de ces polynomes de manière à faire disparaître du résultat toutes les puissances de x. Les équations à résoudre seront toujours du premier degré, et l'opération, souvent fort longue, il est vrai, ne présentera aucune difficulté.

Soient par exemple les équations :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1}$$

$$F(x) = Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{2}$$

nous écrirons :

$$(Px + Q) f(x) + (px^2 + qx + r) F(x) = 0, \tag{3}$$

en choisissant p, q, r, P, Q, de manière à faire disparaître x de l'équation [3], qui sera alors le résultat de l'élimination ou équation finale.

Ces coefficients devront, pour cela, satisfaire aux équations

$$\left\{\begin{array}{l} aP + Ap = 0 \\ bP + aQ + Bp + Aq = 0 \\ cP + bQ + Cp + Bq + Ar = 0 \\ dP + cQ + Cq + Br = 0 \\ dQ + Cr = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Quatre quelconques de ces équations déterminent les rapports des coefficients p, q, r, P, Q; le cinquième doit être une conséquence des quatre autres. Puisque quatre des équations [4] étant satisfaites, l'équation [3] se réduit précisément à la

cinquième, le système [4] doit admettre une solution autre que $p=0$, $q=0$, $r=0$, $P=0$, $Q=0$, et pour cela il faut que le dénominateur commun, ou déterminant correspondant, soit nul; l'équation finale est donc

$$\left|\begin{array}{ccccc} a & 0 & A & 0 & 0 \\ b & a & B & A & 0 \\ c & b & C & B & A \\ d & c & 0 & C & B \\ 0 & d & 0 & 0 & C \end{array}\right| = 0,$$

le carré indiquant le dénominateur du système des cinq équations du premier degré dans lesquelles les cinq lignes horizontales représentent les coefficients des inconnues P, Q, p, q, r.

384. La méthode précédente, si facile et si élégante qu'elle soit en théorie, entraîne dans les applications de très-grandes longueurs. Si l'on veut par exemple l'appliquer à deux équations de quatrième degré, le déterminant qu'il faudra former sera le dénominateur commun résultant de huit équations à huit inconnues; il se compose de 40 320 termes! Beaucoup d'entre eux sont, il est vrai, égaux à zéro; mais la recherche des autres et de leur signe serait une opération longue et pénible, sinon difficile. Il est beaucoup plus aisé d'éliminer successivement les puissances de x sans en introduire de degré plus élevé que celles qui figurent dans les équations proposées. Soient deux équations :

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + hx + k = 0 \\ Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots\ldots + Hx + K = 0, \end{array} \right.$$

on commencera par leur substituer deux équations de degré $n-1$, que l'on obtient en éliminant entre elles successivement la puissance x^n et le terme indépendant de x; on supprime dans le second cas le facteur x, qui devient commun à tous les termes, et l'on obtient les deux équations suivantes :

$$[2] \left\{ \begin{array}{l} (Ab - aB)\,x^{n-1} + (Ac - aC)\,x^{n-2} + \ldots + Ak - aK = 0 \\ (Ak - aK)\,x^{n-1} + (Bk - bK)\,x^{n-2} + \ldots + Hk - hK = 0. \end{array} \right.$$

La même méthode appliquée à ce système [2] le remplacera par deux équations de degré $n-2$; et en continuant de la sorte, on obtiendra une seule équation de degré zéro, résultat de

l'élimination entre les deux équations du premier degré qui formeront le n^e système. Cette équation est l'équation finale.

Si les deux équations proposées ne sont pas de même degré, la méthode doit être légèrement modifiée ; mais cette circonstance, on le comprend, ne peut que la simplifier. Soient par exemple deux équations, l'une de quatrième, l'autre de second degré :

$$[1] \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

$$[2] \qquad Ax^2 + Bx + C = 0;$$

on fera disparaître d'abord les termes indépendants de x, en retranchant l'équation [1] multipliée par C, de [2] multipliée par e; et en supprimant dans le résultat le facteur x, on aura une équation de troisième degré, qui, combinée de la même manière avec [2], donnera une équation de second degré, et l'on appliquera aux deux équations de second degré la méthode générale indiquée précédemment.

355. On a enfin proposé une troisième méthode, qui, comme les deux autres, réduit toutes les équations au premier degré en y considérant les puissances diverses de la lettre à éliminer comme autant d'inconnues distinctes. Nous nommons cette méthode, d'après Cauchy, *méthode abrégée de Bezout.*

Soient toujours $\quad f(x) = 0, \quad F(x) = 0$

deux équations algébriques, la première de degré n, la seconde de degré égal ou inférieur à n; posons :

$$[1] \qquad \begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \\ F(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n, \end{aligned}$$

les coefficients désignés par $b_0, b_1, \dots, b_n$, pouvant être, en partie, égaux à zéro.

Pour éliminer x^n entre les équations [1], écrivons-les sous la forme

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_ex^e = -(a_{e+1}x^{e-1} + a_{e+2}x^{e-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n),$$

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_ex^e = -(b_{e+1}x^{e+1} + b_{e+2}x^{e+2} + \dots + b_{n-1}x + b_n).$$

c désignant le nombre n ou l'un quelconque des nombres inférieurs, en les divisant membre à membre, et supprimant le fac-

teur x^c, commun aux deux termes du premier membre, on aura

$$\frac{a_0 x^{n-c} + a_c x^{n-c-1} + \dots + a_c}{b_0 x^{n-c} + b_c x^{n-c-1} + \dots + b_c} = \frac{a_{c+1} x^{c+1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_{c+1} x^{c-1} + \dots + b_{n-1} x + a_n},$$

et, en chassant les dénominateurs, on obtiendra une équation de degré $n-1$ en x. Mais cette équation peut évidemment prendre n formes différentes, suivant la valeur attribuée au nombre c, et qui peut être, nous l'avons dit, l'un quelconque des nombres non supérieurs à n; nous aurons donc un système de n équations *distinctes*, de la forme

$$[2] \qquad \begin{array}{l} A_{0,0} x^{n-1} + A_{1,0} x^{n-2} + \dots + A_{n-2,0} x + A_{n-1,0} = 0, \\ A_{0,1} x^{n-1} + A_{1,1} x^{n-2} + \dots + A_{n-2,1} x + A_{n-1,1} = 0, \\ \vdots \\ A_{0,n-1} x^{n-1} + A_{1,n-1} x^{n-2} + \dots + A_{n-1,n-1} x + A_{n-1,n-1} = 0, \end{array}$$

dont la première et la dernière sont précisément celles que l'on emploie dans la méthode précédente.

Pour éliminer x, il suffira, dans le système [2], de considérer $x, x^2, \dots, x^{n-1}$ comme autant d'inconnues distinctes, en exprimant que toutes ces équations sont compatibles.

On peut remarquer qu'en multipliant les derniers termes $A_{n-1,0}, A_{n-1,1}, \dots, A_{n-1,n-1}$ par une même inconnue nouvelle u, on formera un système de n équations à n inconnues $x, x^2, \dots, x^{n-1}$, u, dont on aperçoit immédiatement la solution $x = 0$, $x^2 = 0, \dots, u = 0$, et comme elle ne peut convenir, qu'il doit en exister une autre au moins pour laquelle $u = 1$, le déterminant du système des coefficients doit être nul, et l'équation finale est

$$\begin{vmatrix} A_{0,0} & A_{1,0} & A_{2,0} & \dots & A_{n-1,0} \\ A_{0,1} & A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n-1,1} \\ \vdots & & & & \\ A_{0,n-1} & A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \dots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

résultat beaucoup plus simple que celui obtenu [254], puisque le déterminant à former ne contient que n colonnes de n quantités, tandis que l'autre, dans le même cas, aurait contenu $2n$ colonnes. Or, le déterminant de quatre équations à quatre inconnues contient 24 termes, celui de huit équations à huit inconnues en contient 40 320.

TABLE DES ARCS ET DES SINUS ET TANGENTES,
EXPRIMÉS EN PARTIES DU RAYON,
pour servir à la résolution des équations transcendantes.

Arc.		Sinus	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.		Arc.
0	0°	0	1,0000	0	∞	90°	1,5708
0,0175	1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89°	1,5533
0,0349	2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88°	1,5359
0,0524	3°	0,0523	0,9086	0,0524	19,0811	87°	1,5184
0,0698	4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86°	1,5010
0,0873	5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85°	1,4835*
0,1047	6°	0,1045*	0,9945*	0,1051	9,5144	84°	1,4661
0,1222	7°	0,1219	0,9925*	0,1228	8,1443	83°	1,4486
0,1396	8°	0,1392	0,9903	0,1405*	7,1154	82°	1,4312
0,1571	9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81°	1,4137
0,1745	10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80°	1,3963
0,1920	11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79°	1,3788
0,2094	12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78°	1,3614
0,2269	13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77°	1,3439
0,2443	14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76°	1,3265
0,2618	15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75°	1,3090
0,2793	16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74°	1,2915*
0,2967	17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73°	1,2741
0,3142	18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72°	1,2566
0,3316	19°	0,3256	0,9455*	0,3443	2,9042	71°	1,2392
0,3491	20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70°	1,2217
0,3665*	21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69°	1,2043
0,3840	22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68°	1,1868
0,4014	23°	0,3907	0,9205*	0,4245	2,3559	67°	1,1694
0,4189	24°	0,4067	0,9135*	0,4452	2,2460	66°	1,1519
0,4363	25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445*	65°	1,1345
0,4538	26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64°	1,1170
0,4712	27°	0,4540	0,8910	0,5095*	1,9626	63°	1,0996
0,4887	28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62°	1,0821
0,5061	29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61°	1,0647
0,5236	30°	0,5	0,8660	0,5774	1,7321	60°	1,0472
0,5411	31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59°	1,0297
0,5585*	32°	0,5299	0,8480	0,6249	1.6003	58°	1,0123
0,5760	33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57°	0,9948
0,5934	34°	0,5592	0,8290	0,6745*	1,4826	56°	0,9774
0,6109	35°	0,5736	0.8192	0,7002	1,4281	55°	0,9599
0,6283	36°	0,5878	0,8090	0,7265*	1,3764	54°	0,9425
0,6458	37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53°	0,9250
0,6632	38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52°	0,9076
0,6807	39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51°	0,8901
0,6981	40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50°	0,8727
0,7156	41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49°	0,8552
0,7330	42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48°	0,8378
0,7505	43°	0,6820	0,7314	0,9325*	1,0724	47°	0,8203
0,7679	44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355*	46°	0,8029
0,7854	45°	0,7071	0,7071	1,	1,	45°	0,7854
Arc.		Cosinus.	Sinus.	Cotangente	Tangente.		Arc.

N. B. Les * placés à la suite du chiffre 5 indiquent, qu'en calculant à trois décimales, on doit augmenter le chiffre qui précède.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

COMPLÉMENT DES ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

LIVRE II.

THÉORIE DES DÉRIVÉES.

LIVRE III.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

LIVRE IV.

DES DIFFÉRENCES.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE.

20190. — Typographie Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.